

aula 15
Modelos de iluminação
IC/UFF - 2016

Sombreamento das diversas superfícies

Shading :

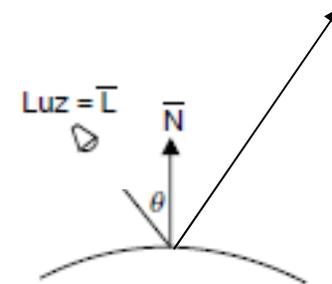
Shading se refere ao processo de **alterar** ou não a **cor do objeto/superfície/polígono** numa cena 3D, com base em um **modelo de iluminação** para o criar um **efeito realístico**.

Modelos mais comuns:

Flat ou constantes, intensidade variável, normais variáveis, como funções de reflexão bidirecionais (BRDF + ray tracing) , radiosidade.

Um *modelo de iluminação*

é um modelo utilizado para **calcular a intensidade** de luz observada em um **ponto na superfície de um objeto.**



Modelos :

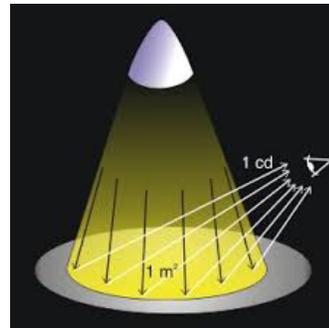
Empíricos x Físicos

Locais x Globais

O mais simples e mais usado:

Empírico - > usa o mínimo de base física

Se preocupa em “parecer” não em ser real!



e

Local - > trata cada ponto da cena em 3D e se preciso depois na forma raster (já projetado em 2D e na resolução desejada)

Modelo de iluminação: empírico e local.

Quando se *renderiza* um objeto onde o **tom de um ponto** é determinado por:

- A descrição das **fontes de luz** disponíveis;
- As superfícies dos **objetos da cena; e**
- A **posição relativa** entre as fontes de luz, as superfícies dos objetos e o observador.

Descrição das fontes de luz disponíveis

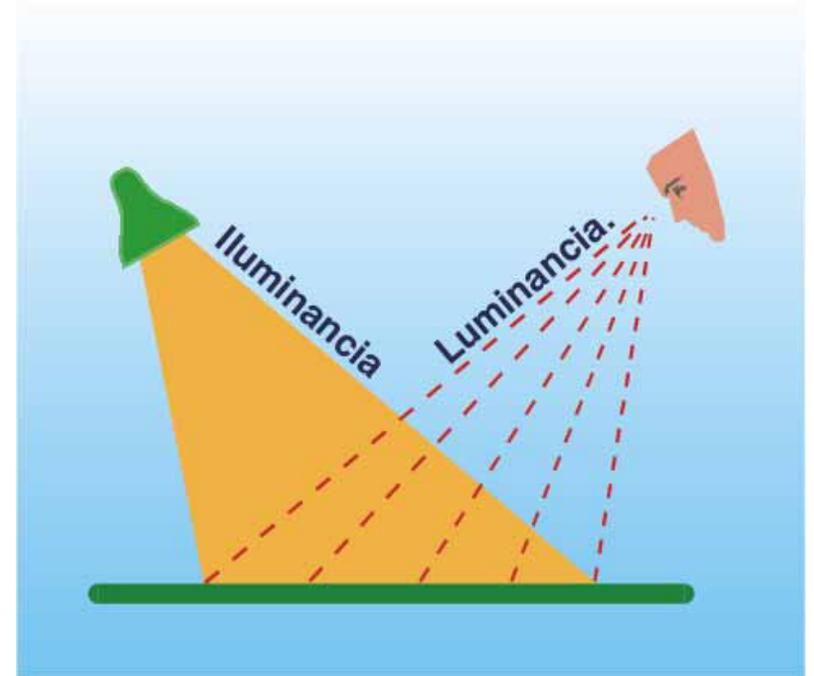
Deve incluir detalhes como:

- **Onde** estão localizadas nas coordenadas da cena
- Intensidade, cor, número
- Tipo das fontes de luz :

Ambiente – uniformemente distribuída em todas as direções da cena

Direcional,

Pontuais ou com áreas de dimensões definidas



- Fontes de luz :

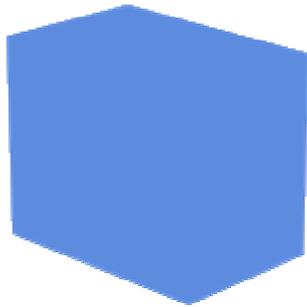
Ambiente – uniformemente distribuída em todas as direções da cena

Lighting: Difusa e *non-directional*

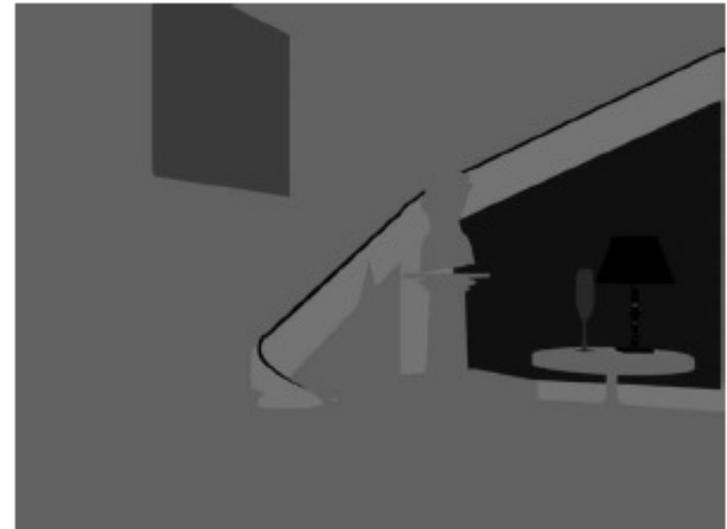
Shading com luz ambiente

Intensidade constante, cor constante → afeta igualmente todas as faces e objetos da cena:

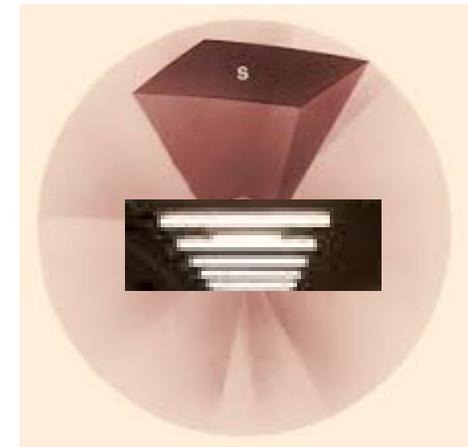
Se I = intensidade da luz no ponto em estudo,
 I_a = intensidade da luz ambiente no ponto em estudo,
 r_a = coeficiente de reflexão entre 0 e 1



Paralelepípedo e cena $I = I_a r_a$ ambiente



- Tipo das fontes de luz :
Direcional e Pontual



*Quando deixa
de
ser pontual:*

Ângulo sólido de luz

Ângulo Sólido é o ângulo com vértice no centro de uma esfera, que subentende na superfície desta esfera uma área medida pelo quadrado do raio da esfera.

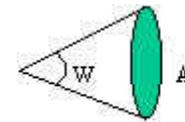
A esfera toda corresponde a um ângulo sólido de 4π esterorradianos, cujo símbolo é dado por sr.

O ângulo sólido é utilizado para cálculo de [intensidade luminosa](#).

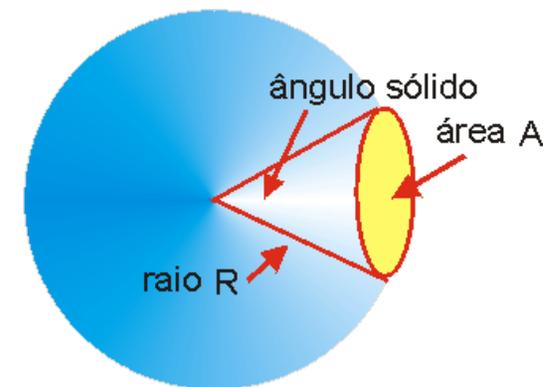
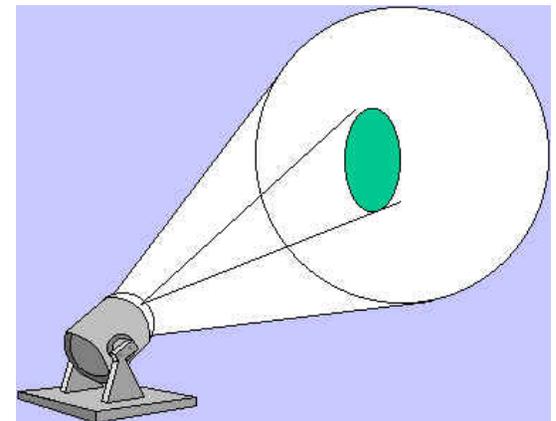
Suponhamos uma esfera de 1 m de raio, no centro da qual colocamos uma fonte com intensidade de 1 candela, em todas as direções.

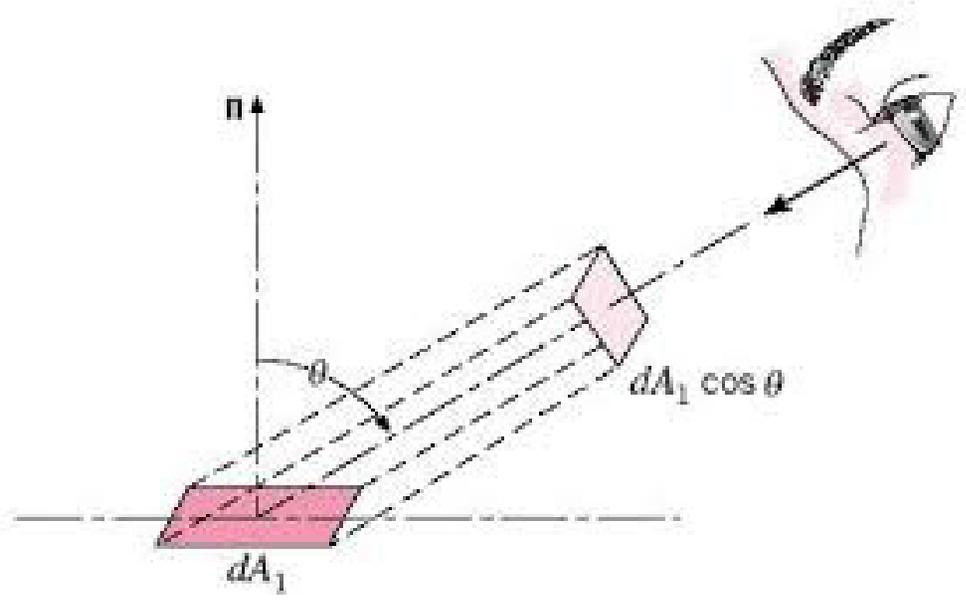
O ângulo sólido que subentende uma área de 1 m^2 é um esterorradiano.

O fluxo deste ângulo sólido, é o **lúmen**.



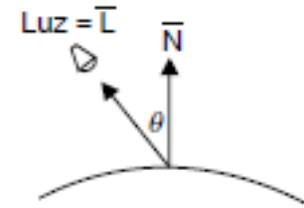
Ângulo Sólido (W)
 $W = A / r^2$ onde w é
medido em esterorradiano





Luz pontual

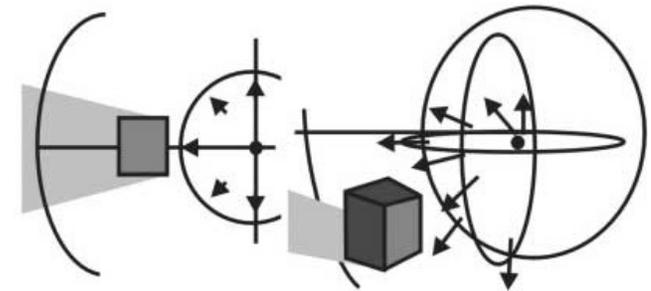
A luz é distribuída a partir de um ponto igualmente em todas as direções.



$$I = I_d r_d \cos \theta$$

Pode deixar as superfícies e as sombras com os limites muito intensos se sozinha:

$$I = I_a r_a + I_d r_d \cos \theta$$



Boa aproximação quando:

- 1) A fonte está suficientemente **distante da cena**.
- 2) A fonte tem **dimensões pequenas** comparadas aos demais objetos.

Caso o ângulo varie de ponto a ponto:

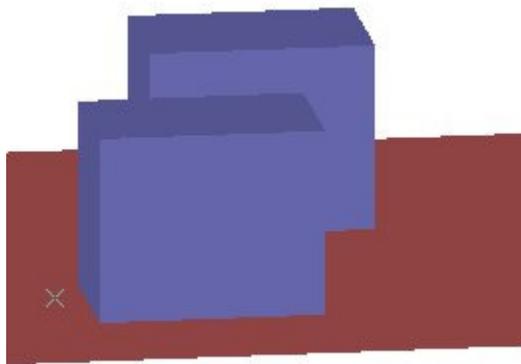
$$I = I_d r_d (\overline{u_e \cdot u_n})$$

Luz direcional

A direção da iluminação é considerada, as áreas mais distantes e mais próximas, mas com mesmo ângulo em relação a luz são iluminadas igualmente.

Isso não é muito realístico pois se espera que **áreas mais distantes da luz fiquem mais escuras!**

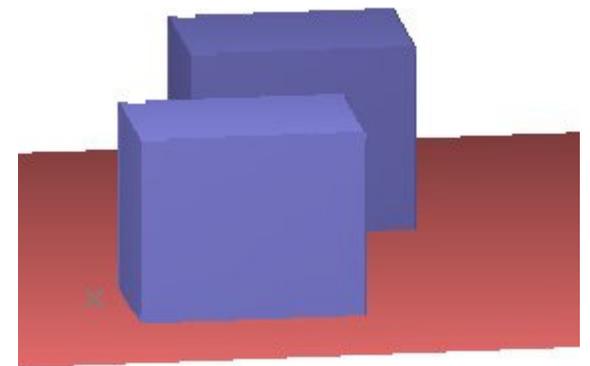
A atenuação com a distância pode ser de diversas maneiras: linear, quadrática, com fator de atenuação (associada ou não a constantes), etc.



$$I = I_a \cdot r_a + f_{at} I_d r_d \cos \theta$$

$$I = I_a \cdot r_a + I_d r_d \cos \theta / (d+k)$$

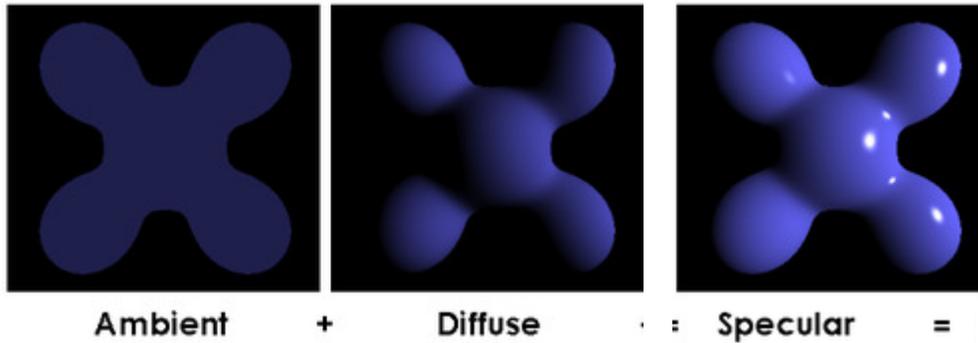
$$I = I_a \cdot r_a + I_d r_d \cos \theta / (d+k)^2$$



Superfícies dos objetos da cena

Informa como a luz é refletida pela superfícies:

- Reflexão **difusa** (superfícies foscas, sem lustro ou brilho) – aparece com mesma intensidade em todas as direções (dull, matte); e
- Reflexão **especular** – tem um efeito de ter algum brilho , como se fosse de metal, ou encerada.



Cor da luz - > **especular**

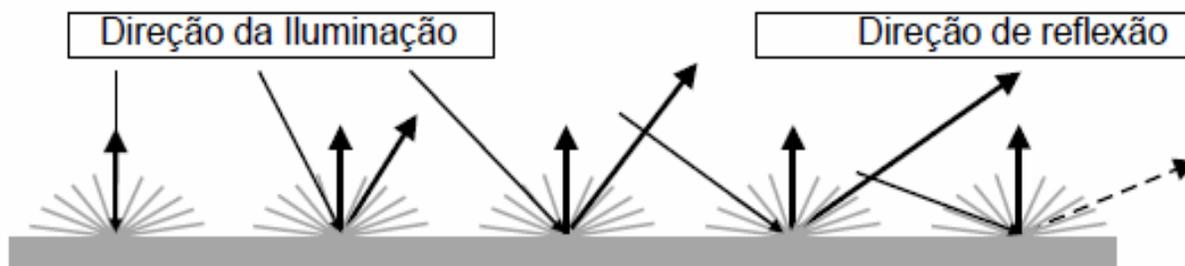
Cor da luz + cor da superfície - >
Reflexão **difusa**

As superfícies dos objetos da cena

Modelo **Lambertiano** ou de objeto **foscos**

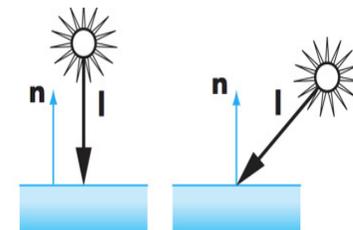
A intensidade da luz é independente do posição do visualizador da cena.

Iluminação isotrópica. A intensidade luminosa obedece a **lei dos cossenos de Lambert**



$$I_d = k_d (\mathbf{l} \cdot \mathbf{n}) L_d.$$

$$\cos \theta = \mathbf{l} \cdot \mathbf{n}.$$



Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

Físico, matemático, astrônomo e filósofo suíço. Foi um dos criadores da fotometria e autor de trabalhos inovadores sobre as geometrias não euclidianas. Provou que o $Pi=\pi$ é irracional.

Em 1760, ele publicou o livro : Photometria. Considerando que a **luz viaja em linha reta**, mostrou que a iluminação é proporcional à intensidade da fonte, **inversamente proporcional ao quadrado da distância** da superfície iluminada e ao **ângulo de inclinação da direção da luz** com a superfície. Estes resultados foram apoiados por experiências.

Em Photometria Lambert também formulou a **lei da absorção da luz** e introduziu o termo **albedo**. A **unidade** fotométrica **Lambert** é em reconhecimento ao seu trabalho.

Lambert também foi pioneiro no desenvolvimento de **modelos de cores tridimensionais** combinando pigmentos vermelhos, amarelos e azuis, e com branco.

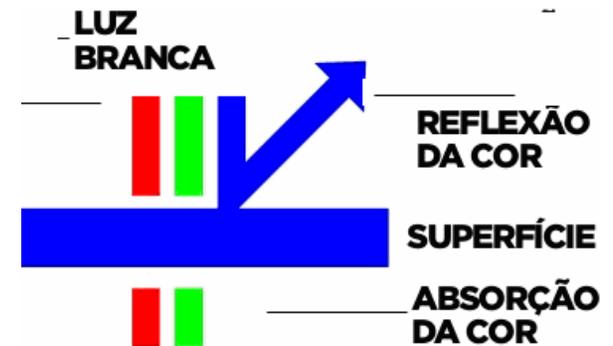
Função das cores dos objetos

Dependendo da forma de representação se usam as expressões anteriores separadamente para cada canal RGB, ou HSV, ou seja considerado :

I=cada canal da imagem,

I= R,G,B ou I = H,S,V:

$$I_I = I_{al} \cdot r_{al} + f_{at} I_{dl} (r_{dl} \cos \theta) + f_{at} I_d r_s \cos^n \alpha$$



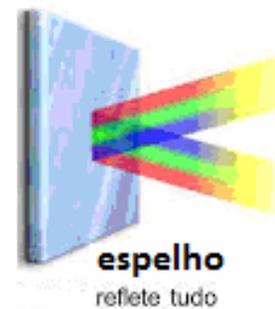
Reflexão especular

Em algumas superfícies funcionam como “espelhos” onde os fótons não interagem com os pigmentos, refletindo toda a cor original que nelas chega.

Modelos:

Cook-Torrance

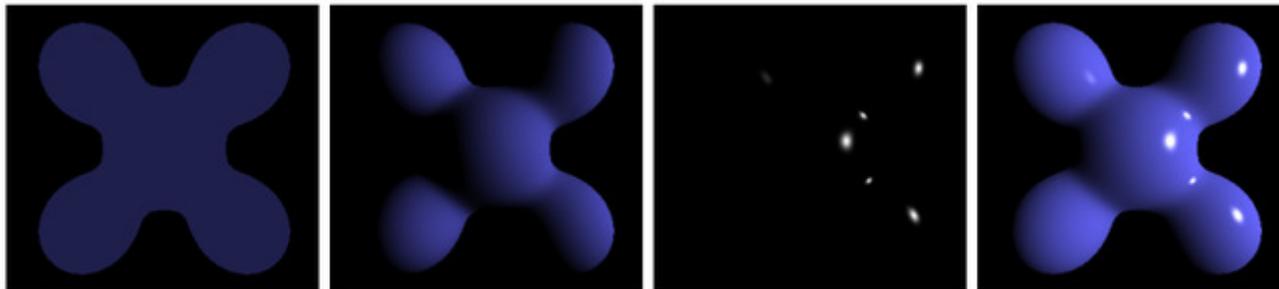
Phong



Phong reflection model

Empírico e local.

Combina luz difusa (superfícies foscas) e especular (superfícies com brilho)



Ambient

+

Diffuse

+

Specular

=

Phong Reflection

Luz branca e objeto azul

Bui Tuong Phong (1942- 1975)

Vietnamita, nascido em Hanoi, (Bui é o sobrenome e Phong seu nome, no Vietnam como o Brasil se considera mais o primeiro nome). Se formou como engenheiro em Toulouse, e entrou para o IRIA (*Institut de Recherche en Informatique et en Automatique*) em 1968. Ph.D. na University of Utah em 1973. Professor da Universidade de Stanford até morrer de leucemia.

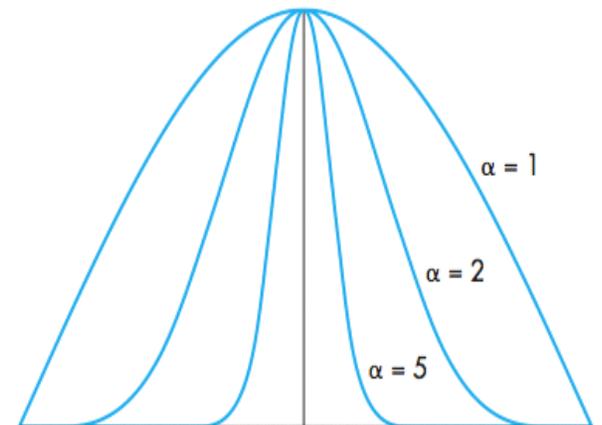
No modelo de Phong a **intensidade luminosa** é proporcional ao ângulo entre o observador e a direção de reflexão

Usando parâmetros **R** entre zero e um:

$$I = I_a + I_d + I_s = L_a R_a + L_d R_d + L_s R_s$$

$$I_s = k_s L_s \cos^\alpha \phi.$$

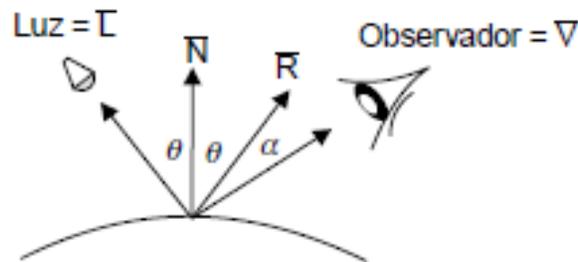
$$\cos \phi = r \cdot v$$



Phong reflection model

Aparece mais um ângulo na expressão!

$$I = I_a \cdot r_a + f_{at} I_d (r_d \cos \theta + r_s \cos^n \alpha)$$



$$I = I_a \cdot r_a + f_{at} I_d (r_d (u_e \cdot u_n) + r_s (u_r \cdot u_v)^n)$$

Múltiplas fonte:

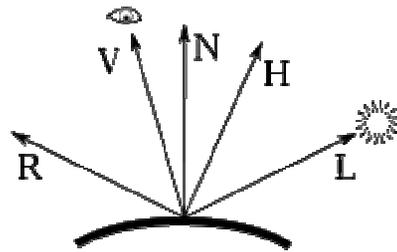
$$I = I_a \cdot r_a + \sum_{j=1}^J I_{d_j} (r_d (u_{e_j} \cdot u_n) + r_s (u_{r_j} \cdot u_v)^n) / (d_j + k_j)$$

ou

$$I = I_a \cdot r_a + \sum_{j=1}^J f_{at_j} I_{d_j} (r_a (u_{e_j} \cdot u_n) + r_s (u_{r_j} \cdot u_v)^n)$$

Outros:

ângulo entre o observador e a direção de reflexão é substituído pelo metade do ângulo que a luz refletida faz com a normal



Uma alternativa ao modelo de luz especular de Phong é o uso do vetor de *intensidade de luz especular máxima* ou *vetor de caminho médio*, H , esse vetor é definido usando a direção da fonte de luz, L , e de visualização, V , como:

$$\bar{H} = \frac{\bar{L} + \bar{V}}{|\bar{L} + \bar{V}|} \text{ ou } \bar{H} = (\bar{L} + \bar{V})/2 \text{ se } |\bar{L}| = |\bar{H}| = 1$$

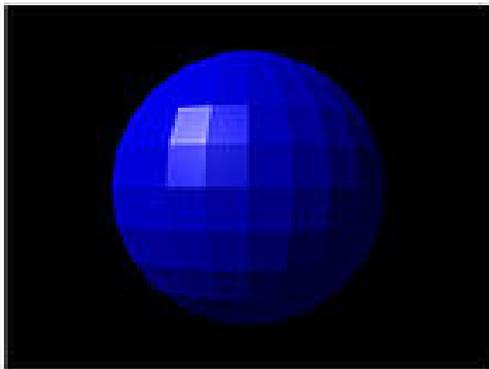
Flat shading

Produz bons resultados apenas se o objeto for mesmo de faces planas.

Cada polígono que compõem o objeto tem seu tom baseado no ângulo de sua normal com a direção da luz, sua cor e a cor da fonte de luz.

De modo que toda a face tem um tom constante.

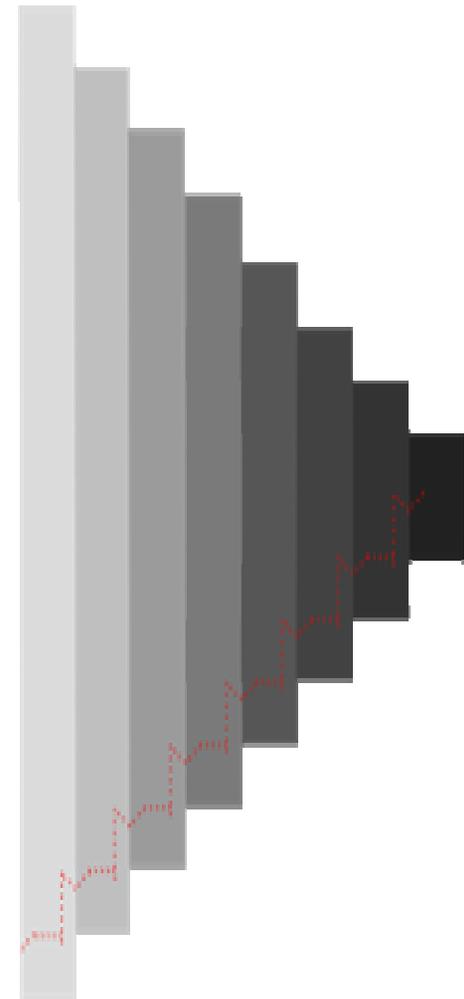
Efeito de bandas de Mach



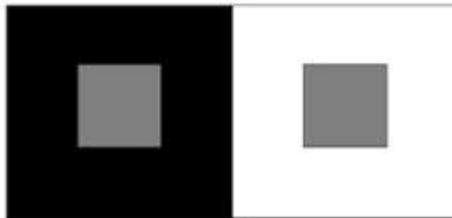
FLAT SHADING

As bandas de Mach

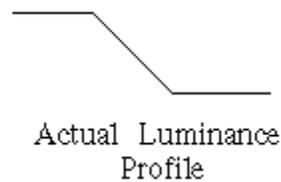
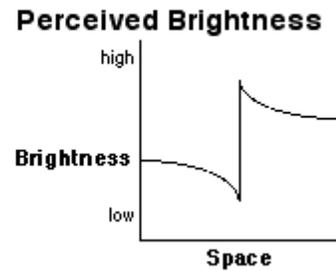
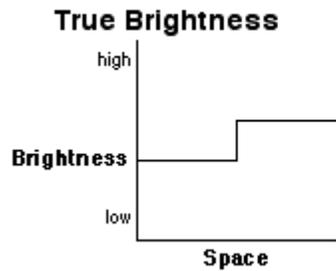
são efeitos de intensificação do contraste observado pelo olho humano: diferente gradiente de luminosidade **tem sua fronteira com contraste amplificado**. O nome desta ilusão é uma referência a Ernst Mach.



Bandas de Mach, intensidades constantes ou variações de intensidade constantes

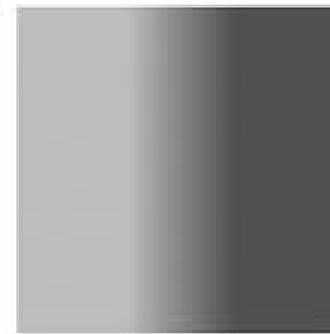


How the eye works

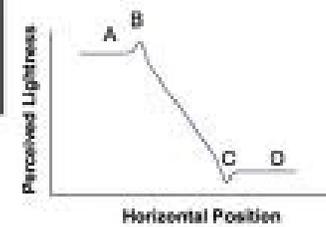
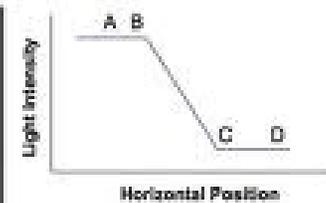


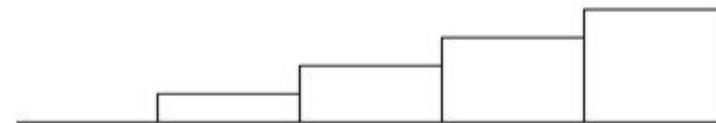
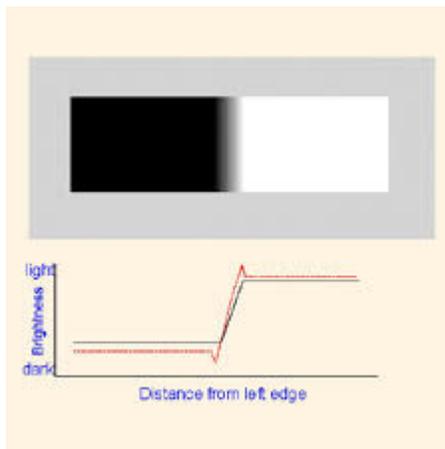
Mach Bands:
Perceived changes in luminance near the edges of a luminance gradient.

Mach bands



A B C D





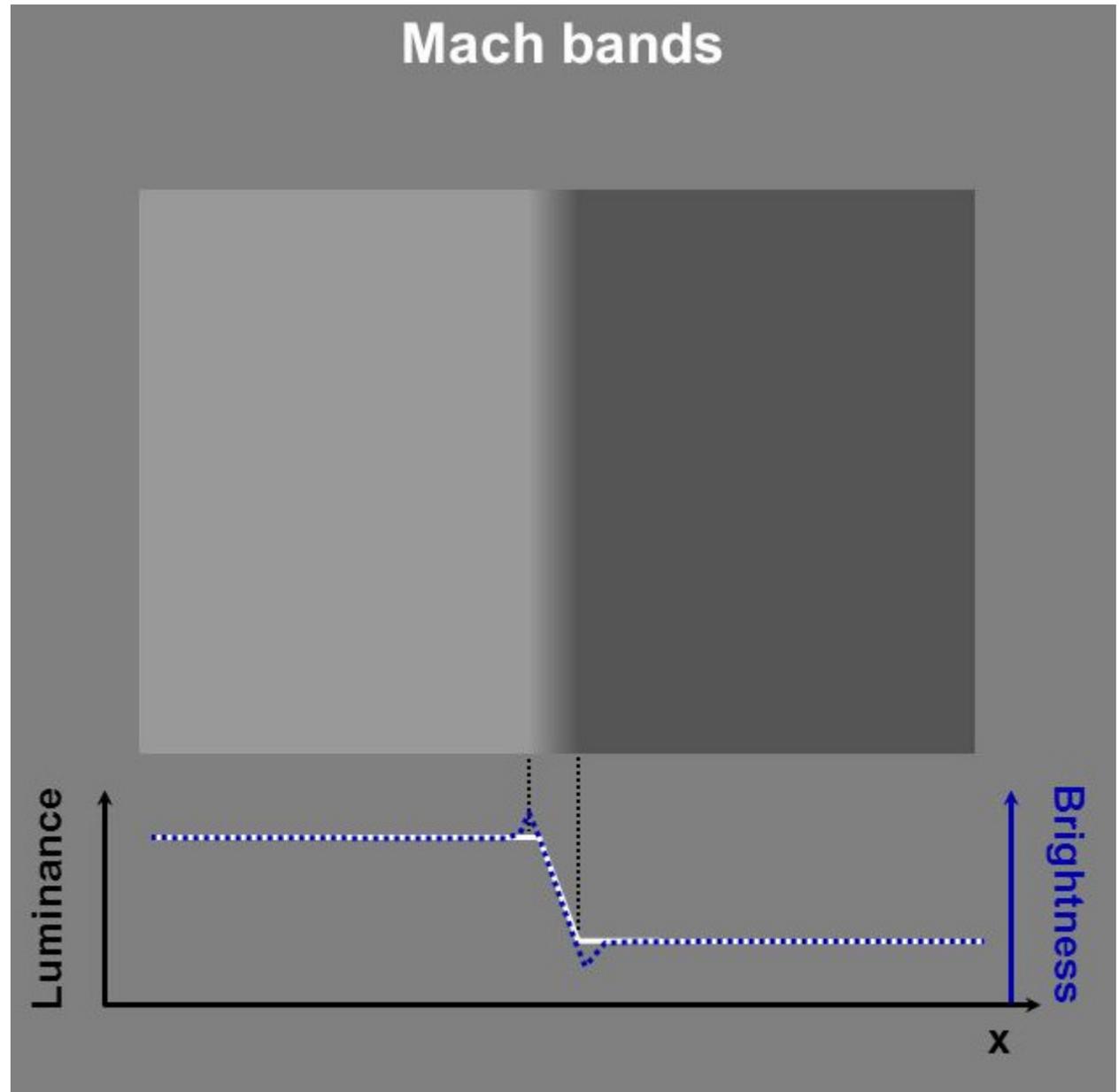
signal original



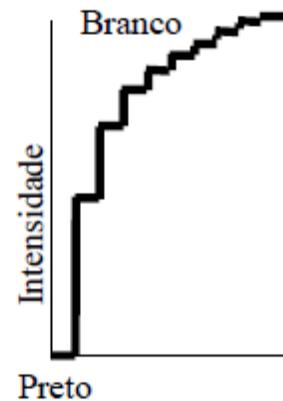
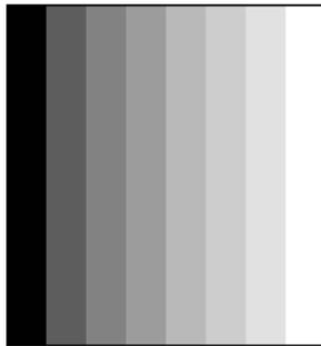
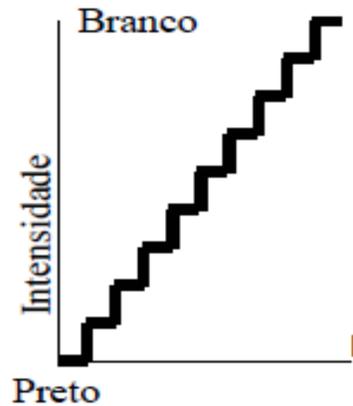
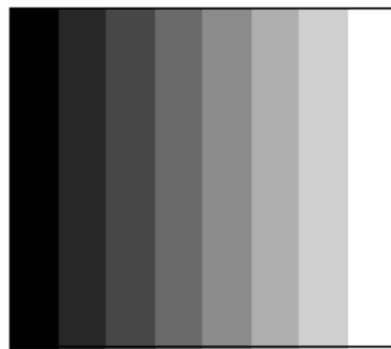
signal avec Mach bands

Bandas de Mach, intensidades constantes ou variações de intensidade constantes

Bandas de Mach,
intensidades constantes
ou variações de
intensidade constantes

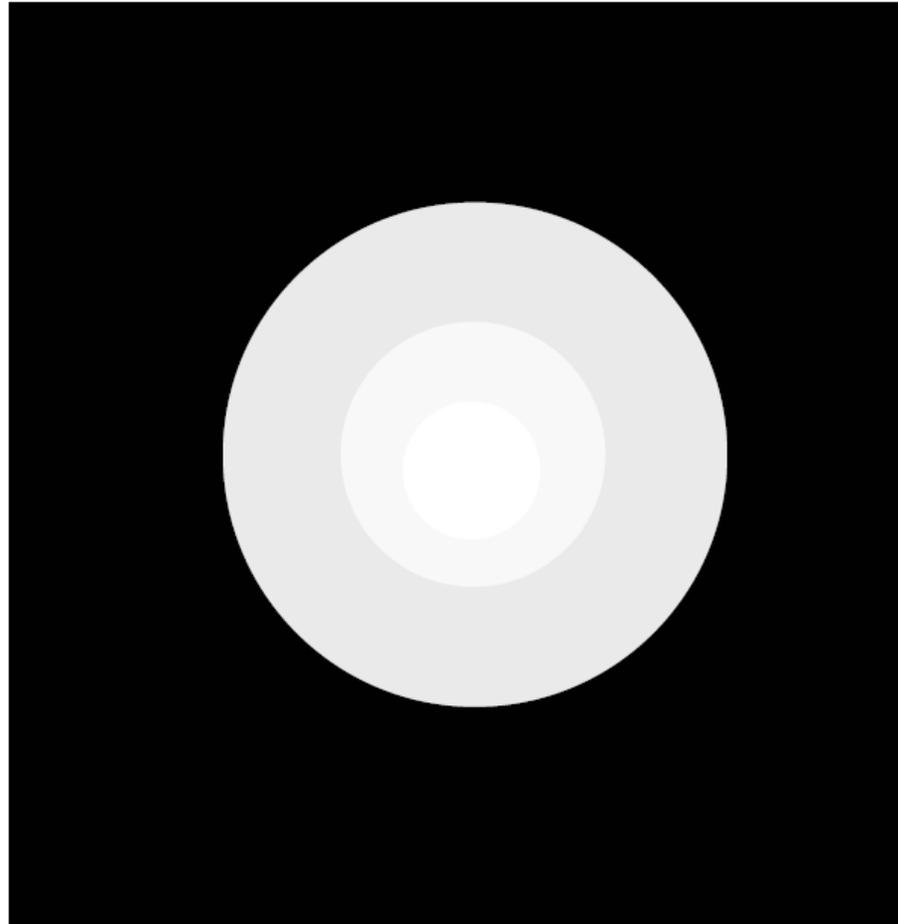


Amplificação da sensação de bordas entre regiões de tom constantes ou com variação a taxa constante.



– Nas intensidades mais escuras a percepção de variação tonal é menor nos cores aditivas mostrada relação não constante entre o acréscimo da intensidade e sua percepção, o que mostra a importância dos espaços de cores perceptualmente lineares.

Há 4 faixas tonais



Ernst Waldfried Josef Wenzel Mach

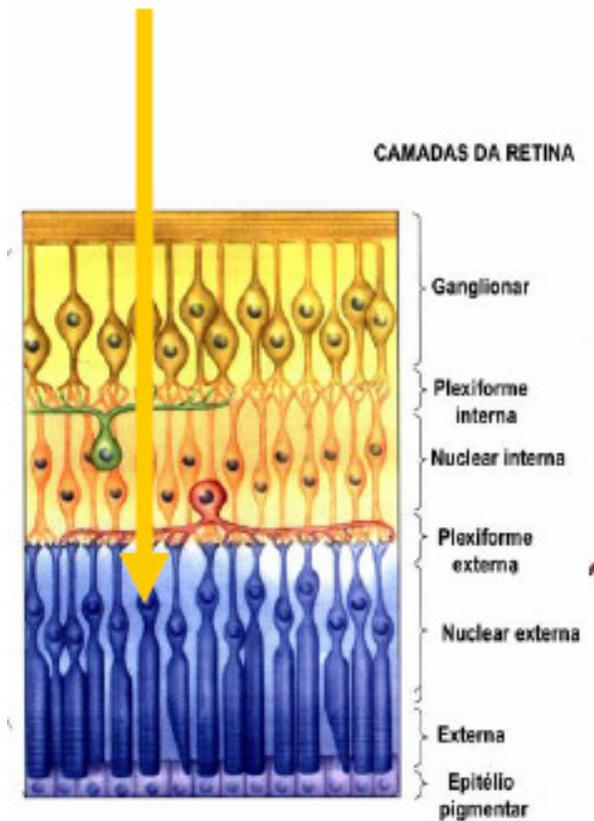
(Brno, 1838 – Vaterstetten, 1916) foi um físico e filósofo austríaco. austríaco.2

Foi professor de matemática em Graz.

Depois de física em Praga, quando opôs-se à introdução da língua tcheca como idioma oficial na mesma universidade, alinhando-se entre os partidários da dominação alemã na região.

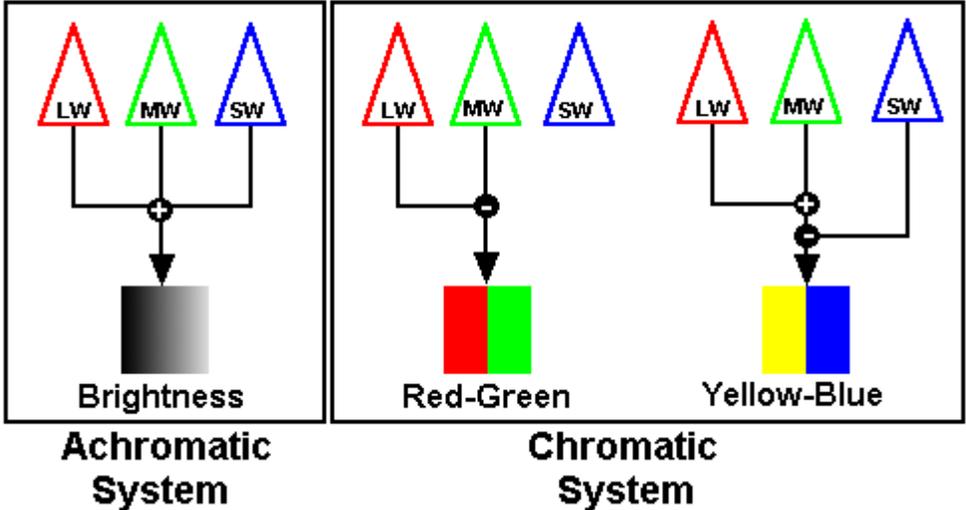
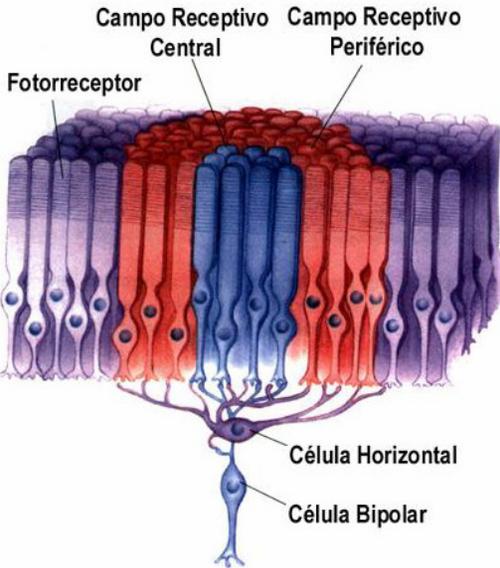
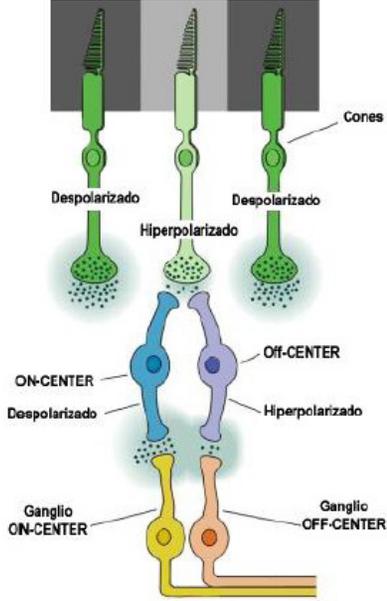
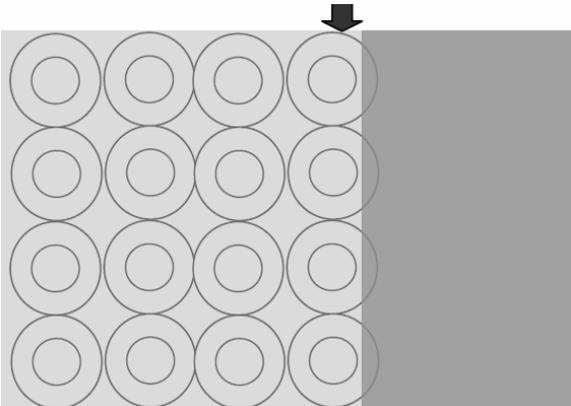
Esse é um efeito a nível de retina

Causado pelas ligações das diversas células que compoem a retina, antes do sinal neuronal sair do olho em direção ao cerebro.

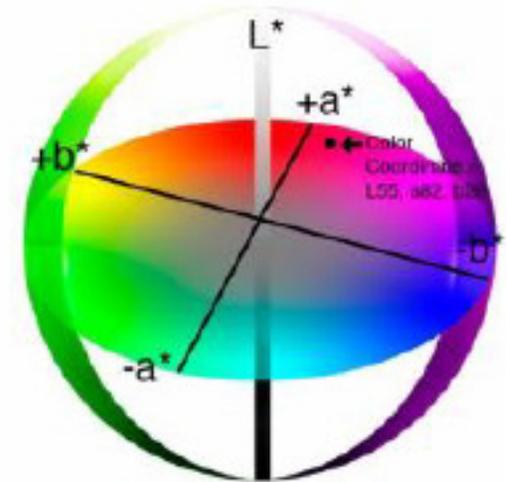
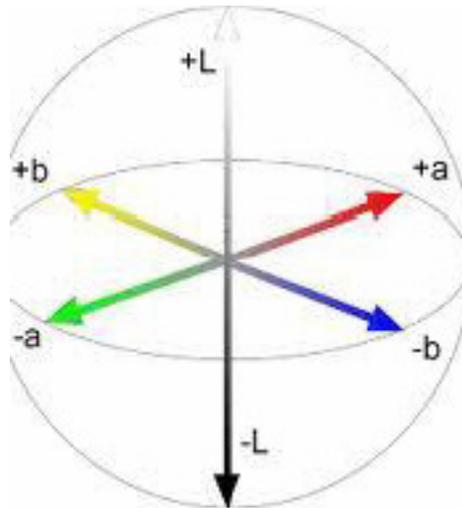
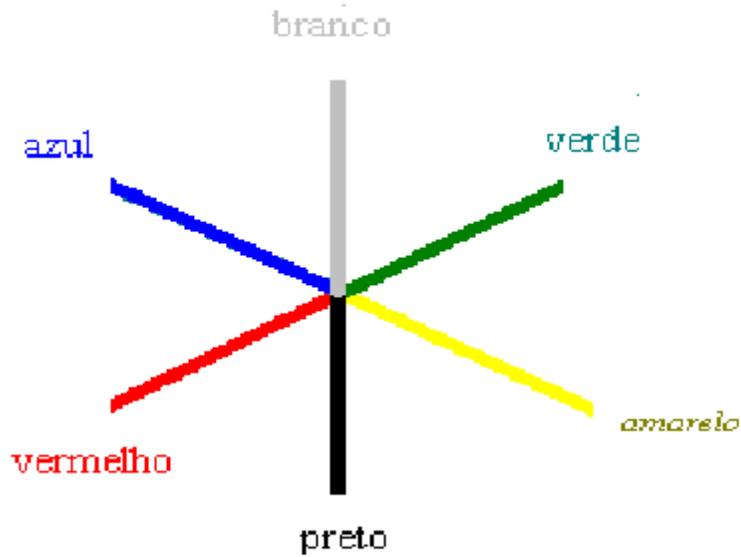


Explicado nos espaços de **cores oponentes**

Aumento do contraste



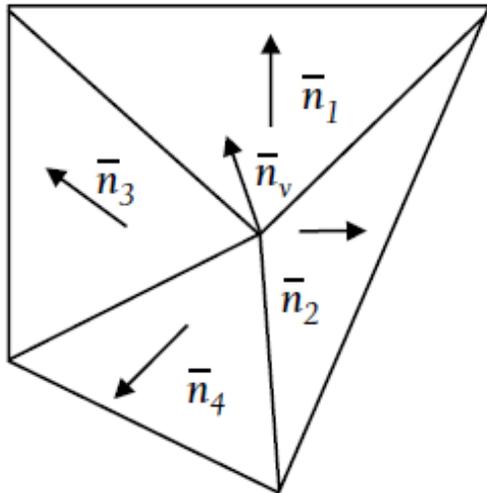
Espaços de cores oponentes



Smooth shading

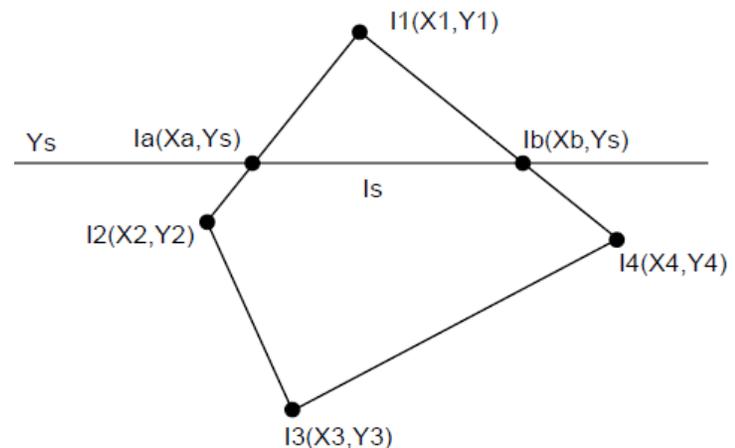
O sombreamento varia de pixel para pixel:

Gouraud shading – calcula a iluminação dos vértices e faz interpolação linear no interior. Supõem a normal nos vértices como média das normais das faces que chegam ao vértice.



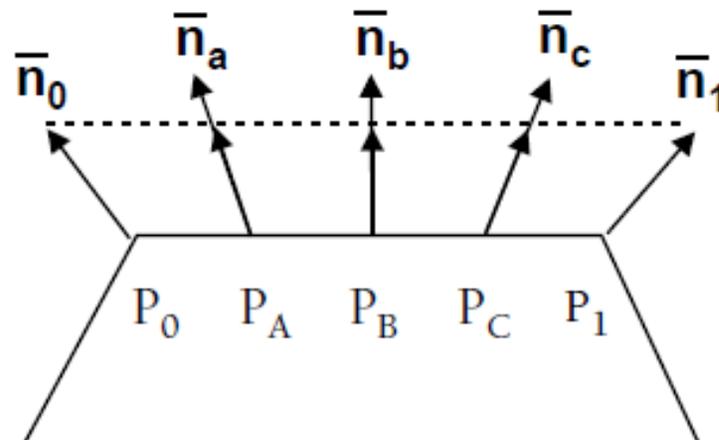
$$\bar{n}_i = \frac{n_i}{|n_x| + |n_y| + |n_z|}$$

$$n_v = \sum_{i=1}^k \frac{\bar{n}_i}{k}$$



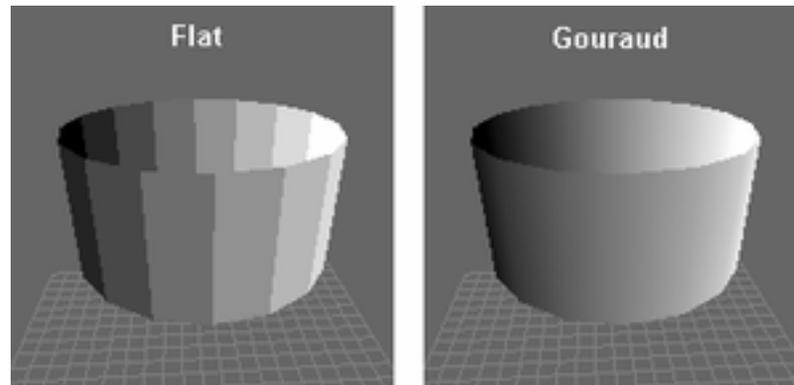
Smooth shading

Phong shading - faz a interpolação das normais dos polígonos já rasterizados para daí calcular o tom do ponto da superfície



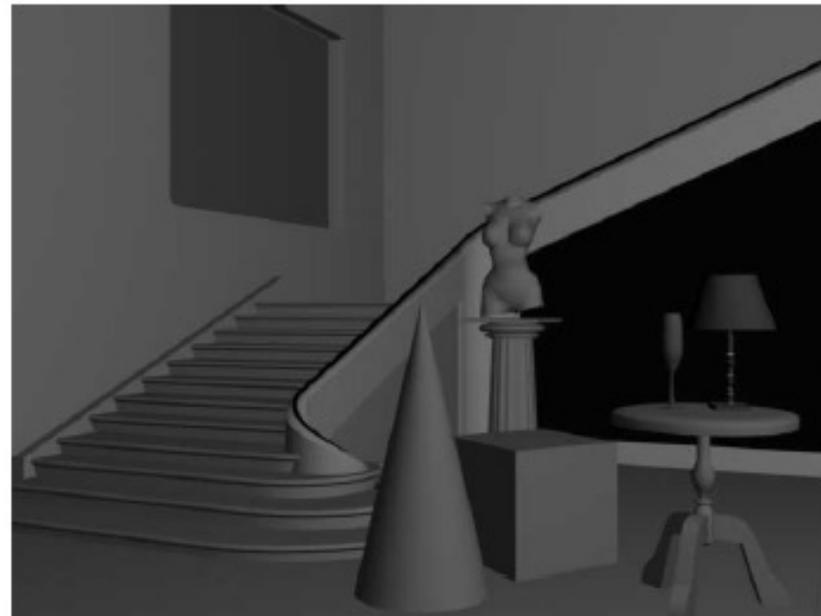
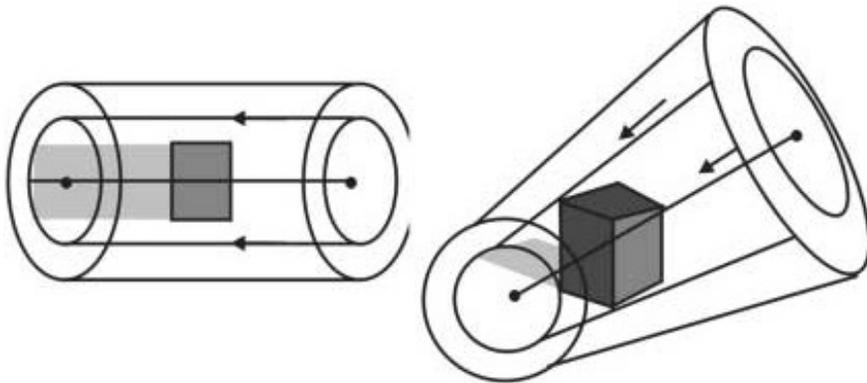
Henri Gouraud (1944- ...)

Frances, estudo de 1964–1967 na Escola Central de Paris, em 1971 recebeu seu Ph.D. pela Universidade de Utah pelo trabalho de titulo: **Computer display of curved surfaces**



Luz direcional

A direção da iluminação é considerada, mas áreas mais distantes e mais próximas com mesmo ângulo em relação a luz são iluminadas igualmente



Tratamento de Iluminação especular

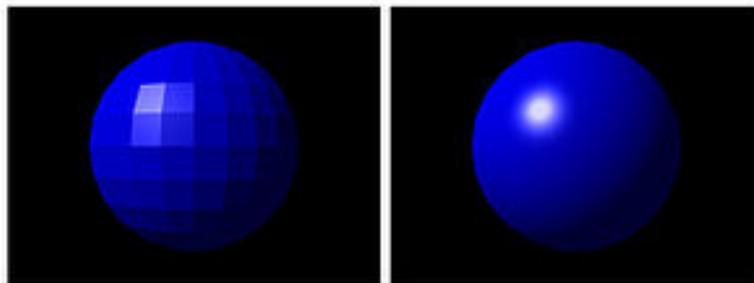
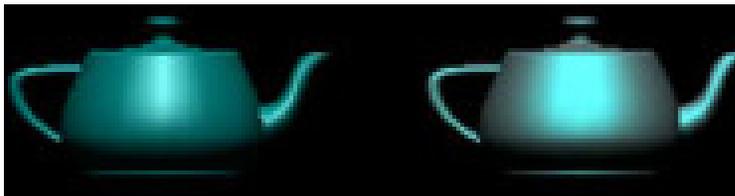
Shininess Coefficient

Ou coeficiente de brilho da luz especular:

Metais entre 100 e 200

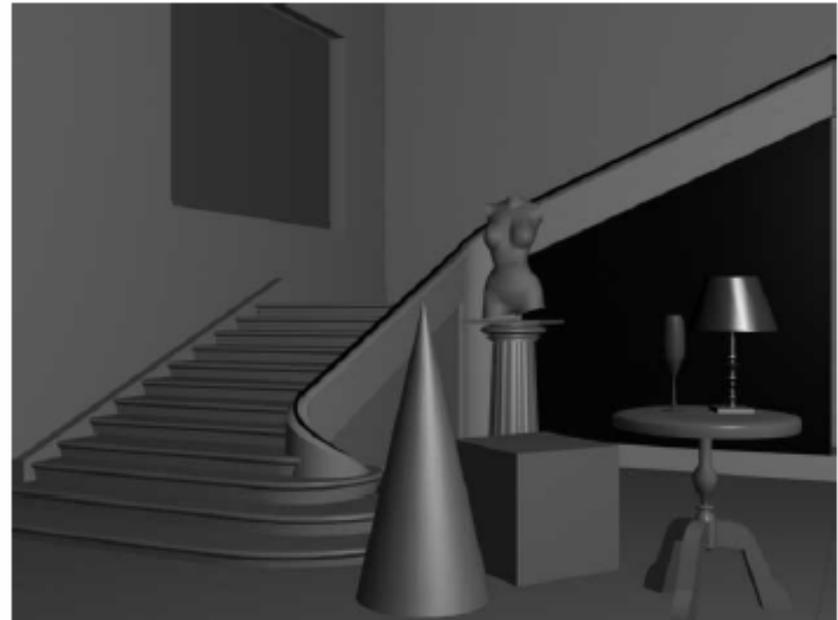
Plástico entre 5 e 10

Única diferença é o coeficiente de brilho da luz especular



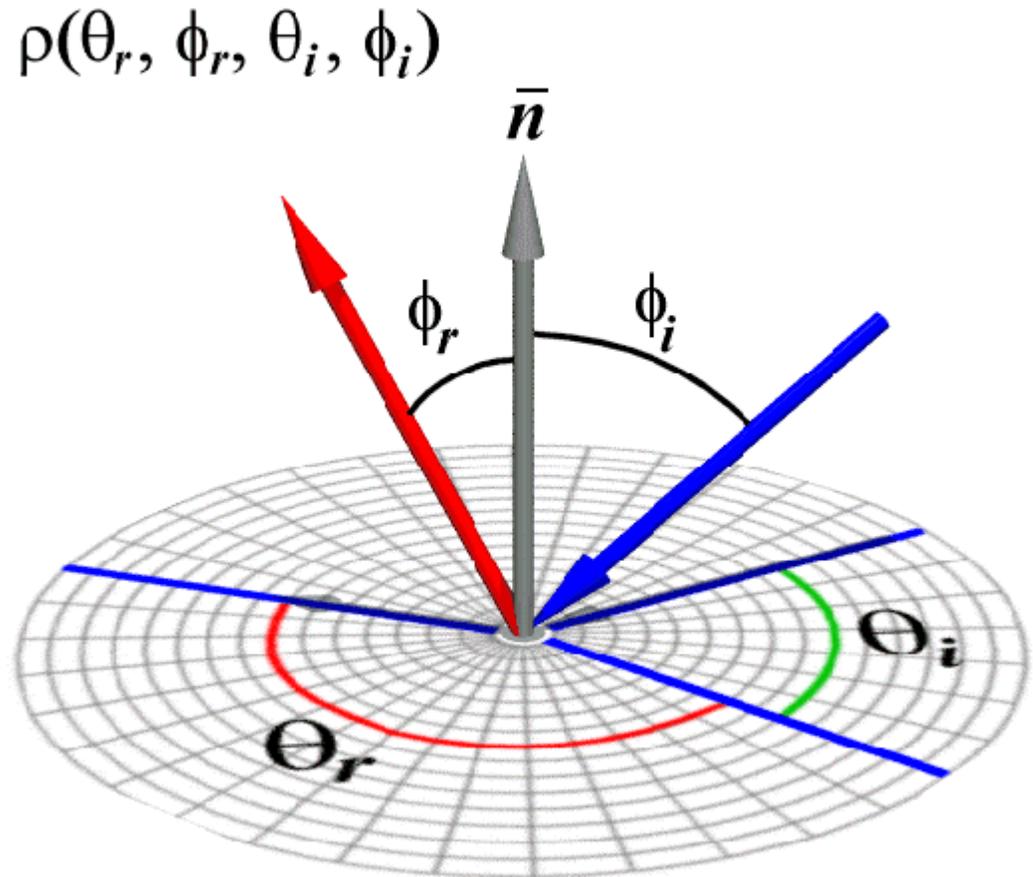
FLAT SHADING

PHONG SHADING



Bidirectional Reflectance Distribution Function (BRDF)

BRDF relates light incident in a given direction to light reflected along a second direction for a given material.

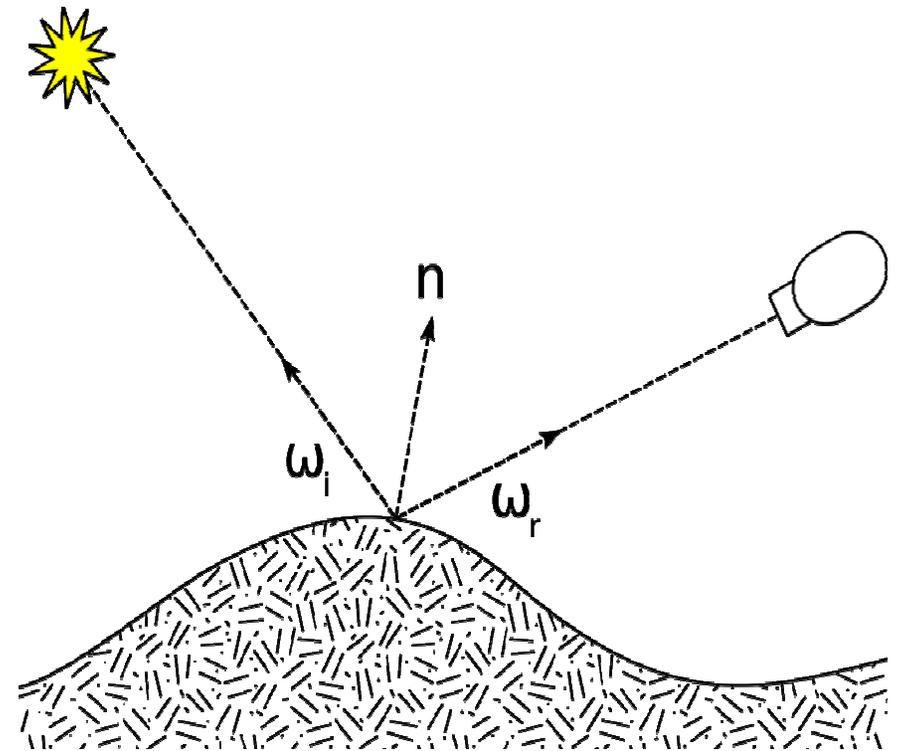


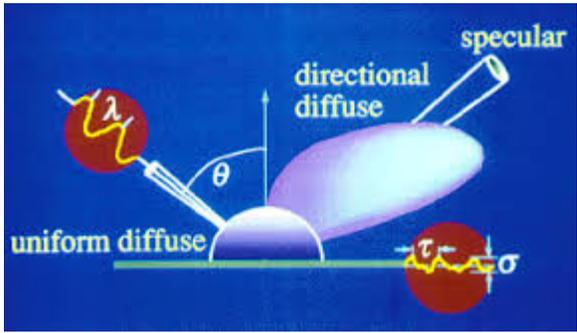
BRDF - *Leia: Bi - Ar - Di - Ef*

é uma função de quatro variáveis reais que define como a luz é refletida em uma superfície opaca.

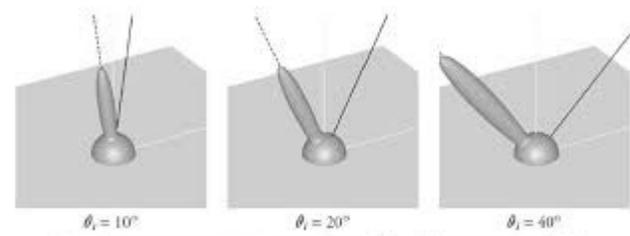
é empregada tanto na óptica como em algoritmos de CG, e em algoritmos de visão de computador (VC).

A função considera a luz incidente como na ω_i e a luz refletida na direção ω_r (considerando a superfície normal ao longo do eixo z), e retorna a razão de brilho refletido sair junto ω_r para o incidente irradiância sobre a superfície de direção ω_i . Cada direção ω é a própria parametrizado pelo ângulo de azimute ϕ e ângulo zenital θ , portanto, o BRDF como um todo é uma função de quatro variáveis. O BRDF tem unidades SR^{-1} , com steradians (sr), sendo uma unidade de ângulo sólido.

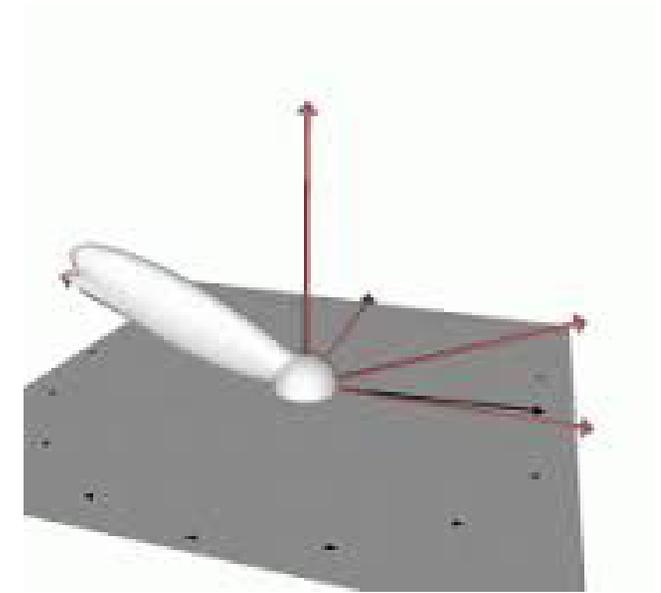
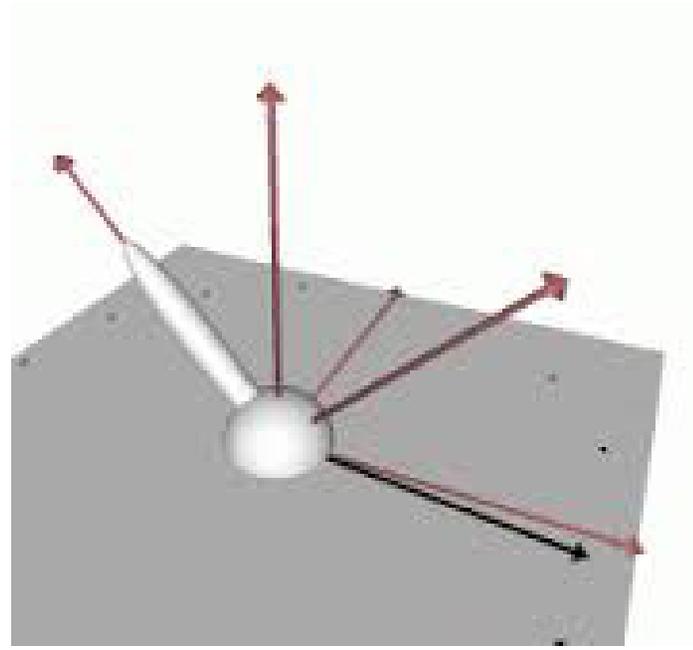




Biblioteca de diversos materiais

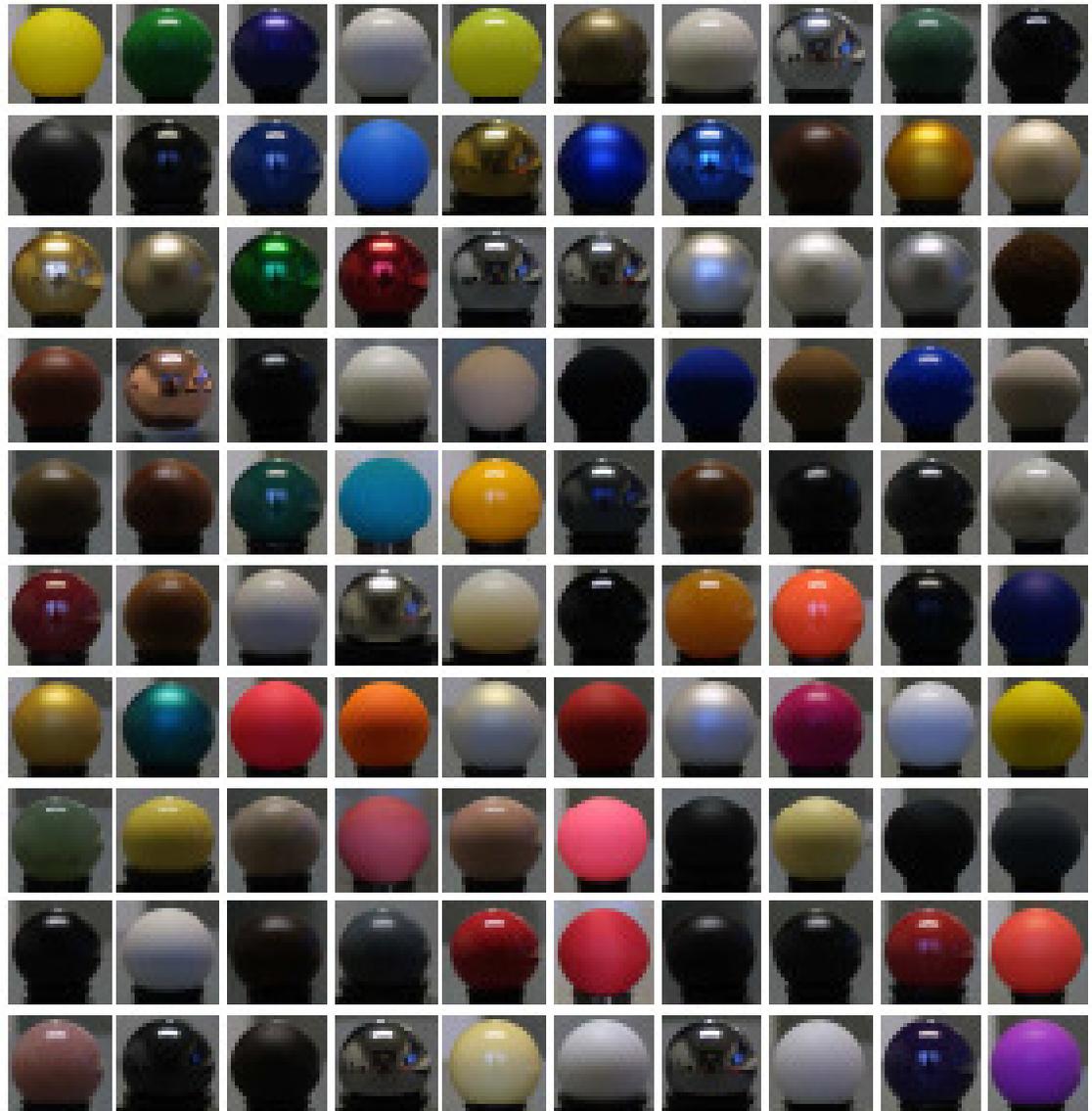


The Cook-Torrance-Sparrow BRDF seen as a function of (θ, ϕ) , for various values of (θ, ϕ) .
 Note that the position of the peak in space varies considerably.



<http://www.merl.com/brdf/>

**MERL BRDF
Database**



Texturas: Texture mapping – permite dar a uma face plana um aparência bem complexa!

[Edwin Catmull](#) em 1974, em sua tese de doutorado, foi o primeiro a adicionar detalhes de textura na superfície de modelos 3D por mapeamentos

Fazer um **texture map** em uma superfície é como aplicar uma **folha de papel auto adesivo** nela “**contact**” para **lhe dar um aspecto** semelhante a **textura do** desenho deste papel !



Edwin Earl "Ed" Catmull (1945,)

Americano formado em ciência da computação e atualmente presidente da Pixar e Disney Animation.

Tem feito diversas contribuições a CG.

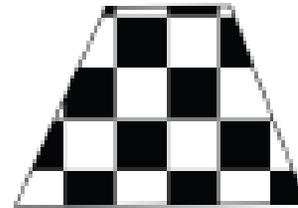
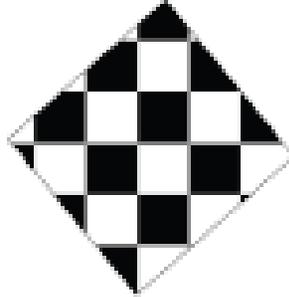
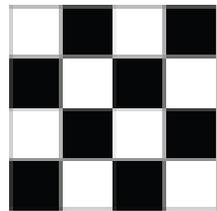
Em 2001, recebeu um **Oscar** "for significant advancements to the field of motion picture rendering".

Em 2006, foi premiado com a IEEE von Neumann medal pelas suas contribuições na *modelagem em CG, animação e rendering*.

Texture mapping pode ser:

Paramétrico ou não-Paramétrico:

Pode ser fixo (em tamanho ou orientação) ou se deformar com o objeto

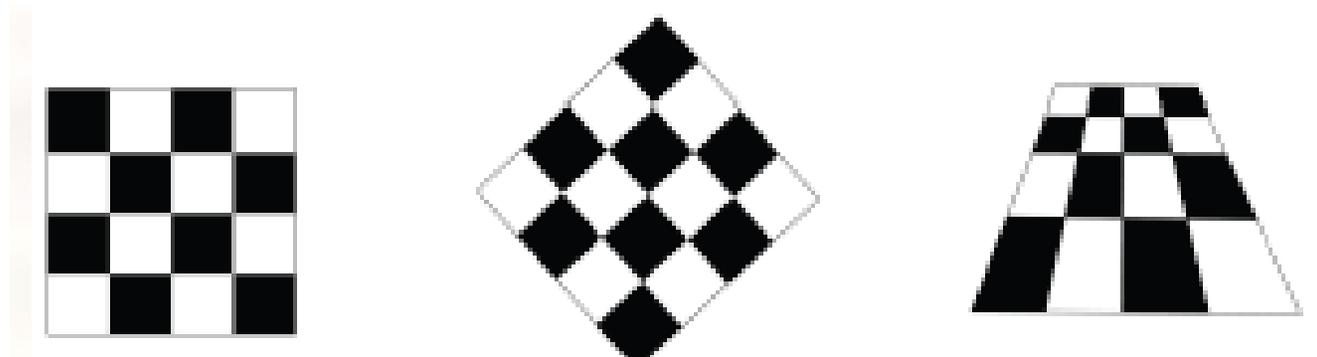


Não-Paramétrico: parece que se usou FORMA COMO CORTADOR SOBRE UM TECIDO OU MATERIAL

Paramétrico

se deforma com o objeto

Parece que A TEXTURA É do material DO OBJETO!
TEM A MESMA deformação QUE ELE NA CENA OU NA ANIMAÇÃO!

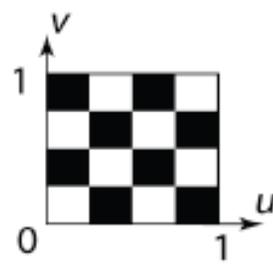


Aplicar um **texture map** é

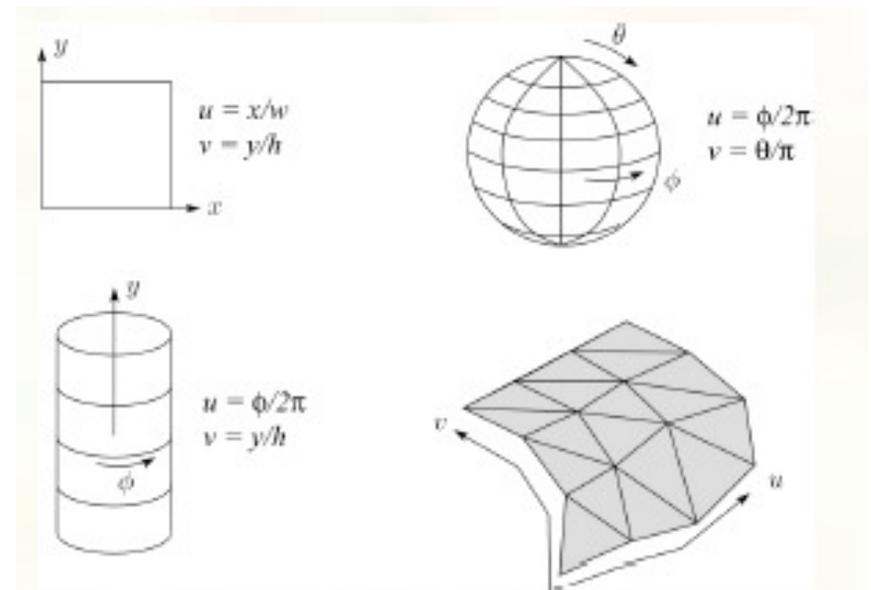
Associar às coordenadas da face , as coordenadas do mapa de textura 2D: chamadas coordenadas UV.

ESPAÇO DE TEXTURA (u,v)

As texturas são definidas em um sistema cartesiano normalizado $[0,1] \times [0,1]$



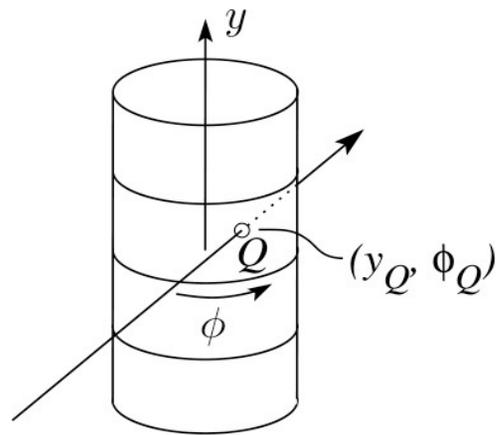
E depois usadas para
“encapar” nossos objetos,
De modo que quando
A superfície de mover
ela vá junto!



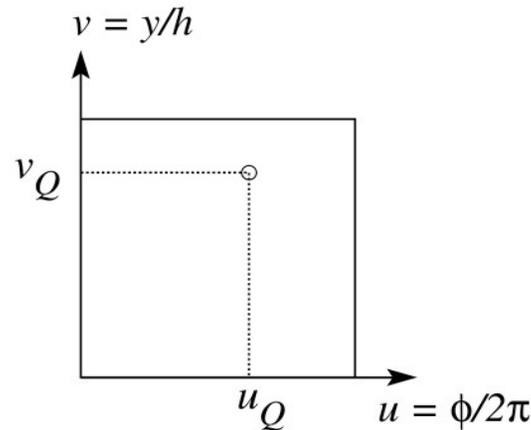
O mapa de textura é uma imagem

Essa imagem deve ser convertida para $[0,1] \times [0,1]$ e depois para as coordenadas onde será mapeada

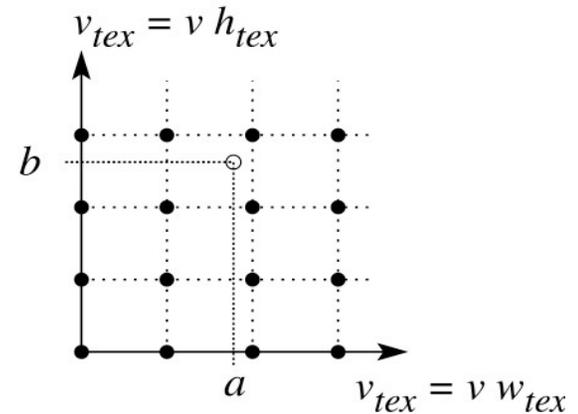
(u_{tex}, v_{tex}) entre os valores: $([0.. w_{tex}], [0.. h_{tex}])$



Ray intersection

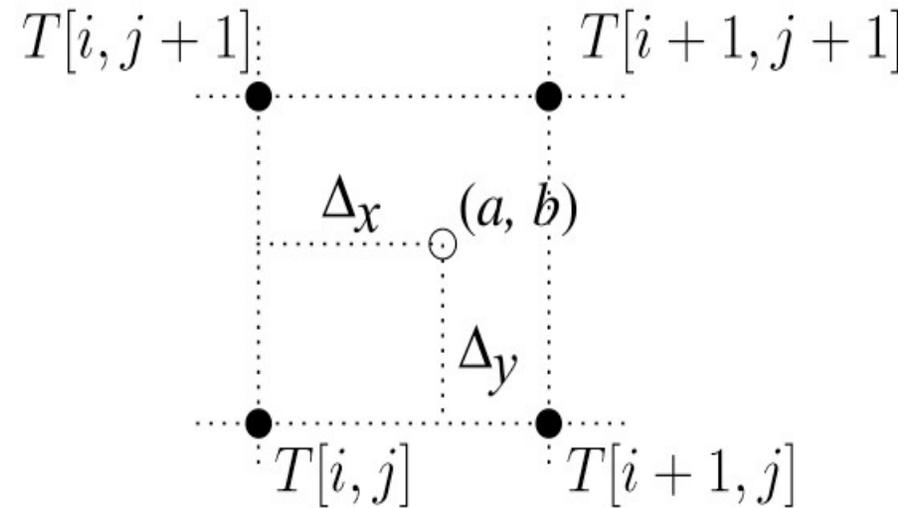
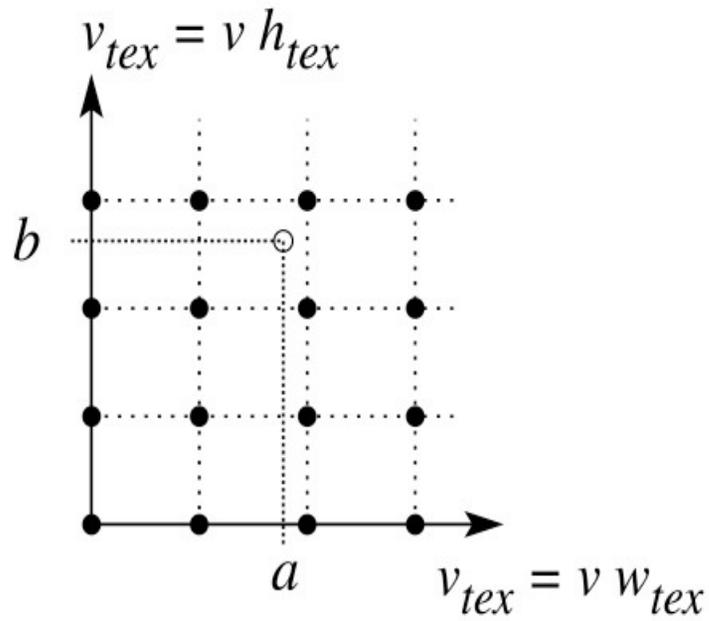


Mapping to abstract texture coords



Mapping to texture pixel coords

Reamostrando pelo uso de interpolação bilinear quando necessário



$$\begin{aligned}
 T(a,b) &= T[i + \Delta x, j + \Delta y] \\
 &= (1 - \Delta x)(1 - \Delta y) T[i, j] + \Delta x(1 - \Delta y) T[i+1, j] \\
 &\quad + (1 - \Delta x)\Delta y T[i, j+1] + \Delta x\Delta y T[i+1, j+1]
 \end{aligned}$$

Os mapas podem fazer mais que apenas mudar os tons

Podem mudar a **geometria da superfície** em que serão mapeados, por exemplo:

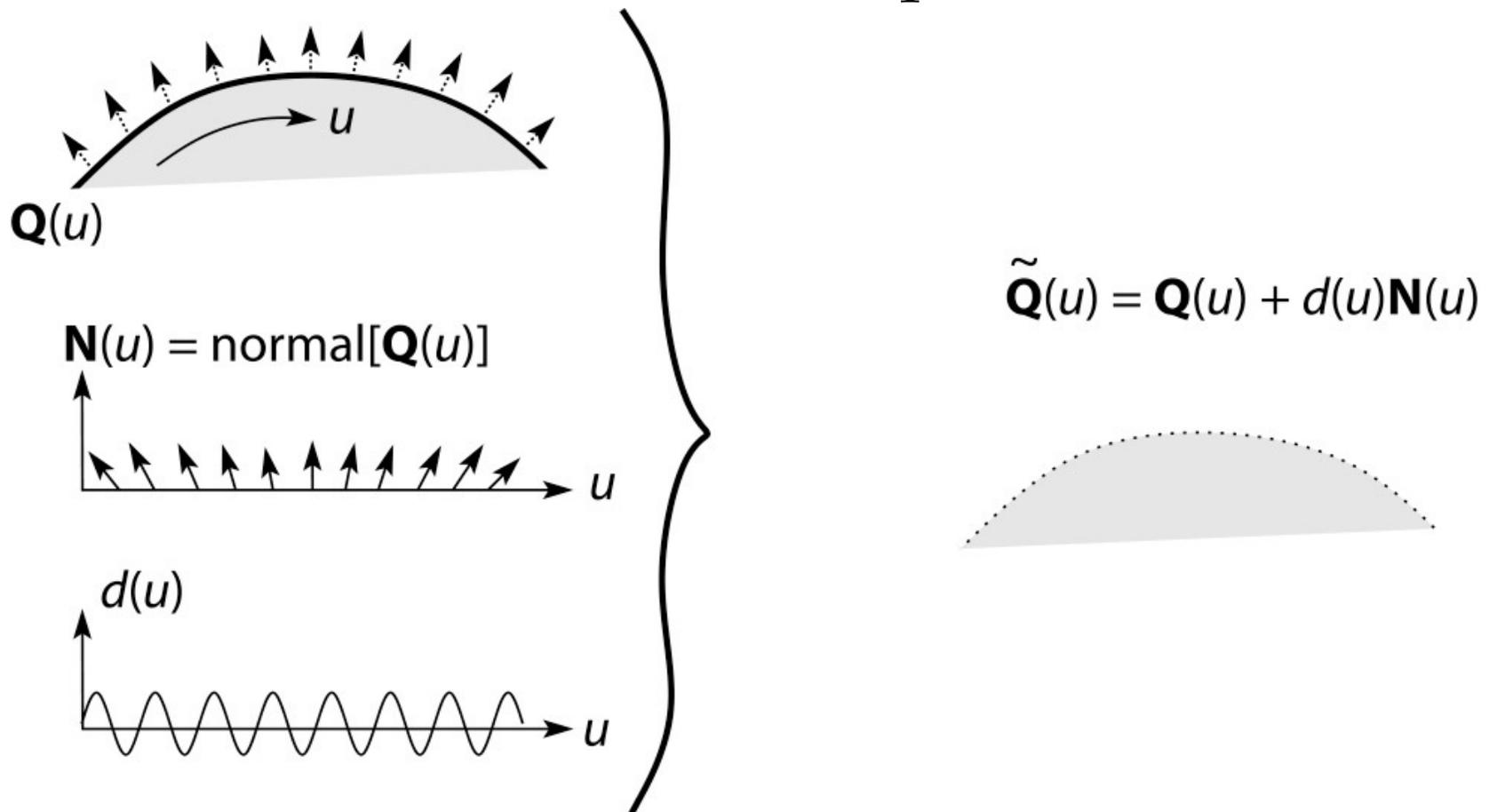
Se a superfície poder ser descrita como função de um para metro u : $Q(u)$

Sua normal, será geralmente também uma função: $N(u)$

Assim:

Displacement mapping (emboss)

Teremos assim uma nova superfície:



Bump map

Continuando com essa ideia pode-se pensar em modificar a normal da superfície (depois de fazer os tratamentos de hiddens , apenas na hora de produzir seu shading).

$$\tilde{\mathbf{N}} = \text{normal}[\tilde{\mathbf{Q}}(u)]$$



$\mathbf{Q}(u)$

Multitexturing ocorre quando mais de um mapeamento é aplicado na face ao mesmo tempo.

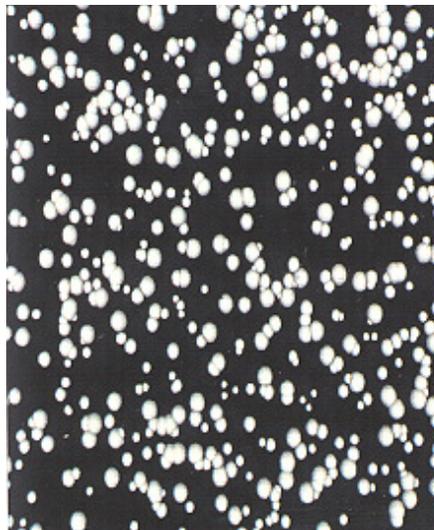
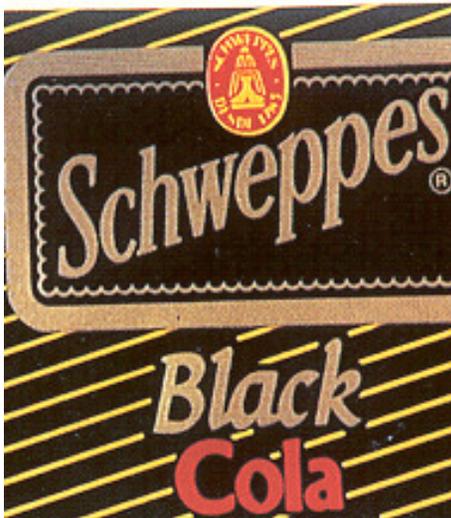
Alterações na imagem final ao ser adicionada

Da fase de rendering, como:

Textura para cor difusa

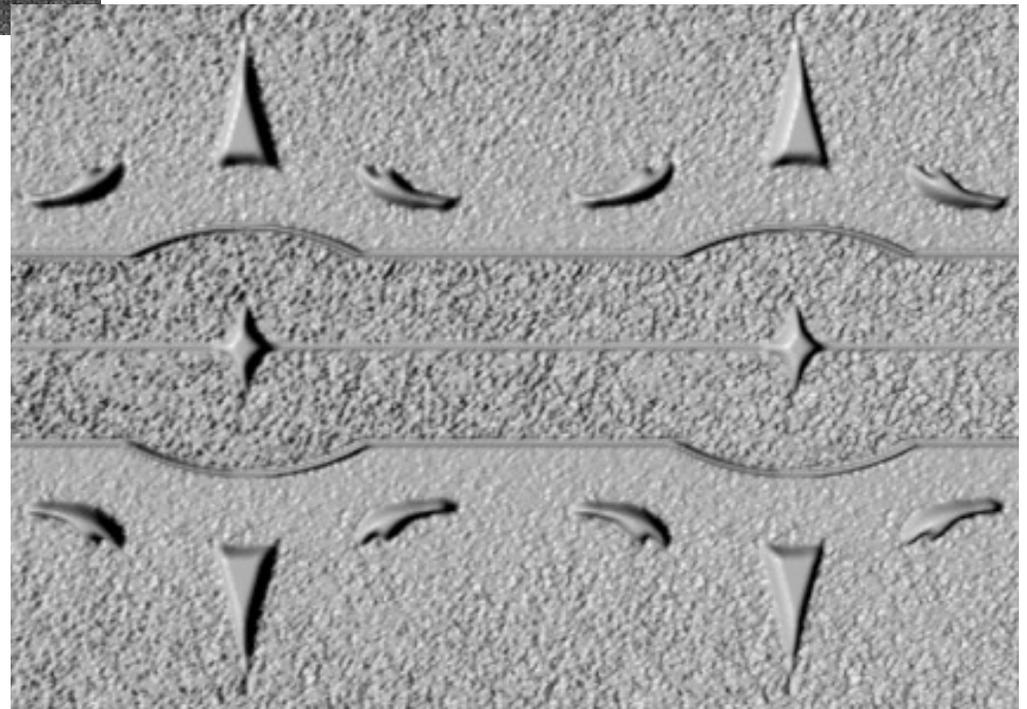
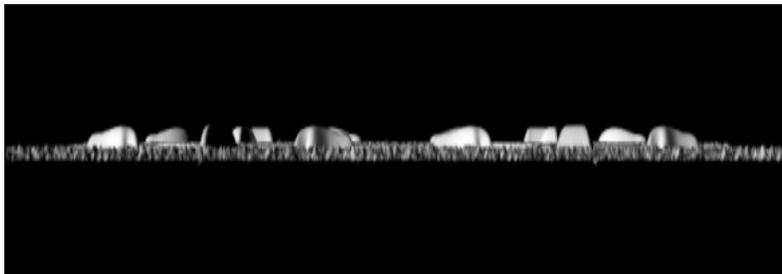
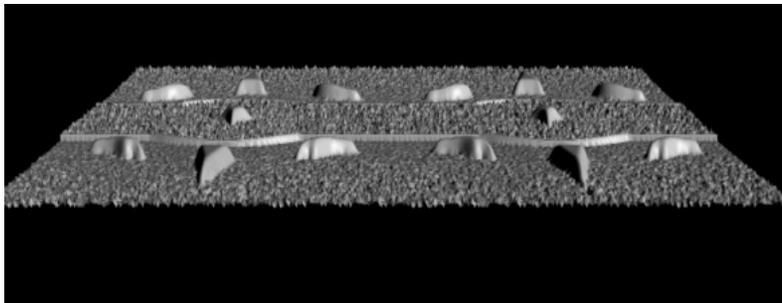
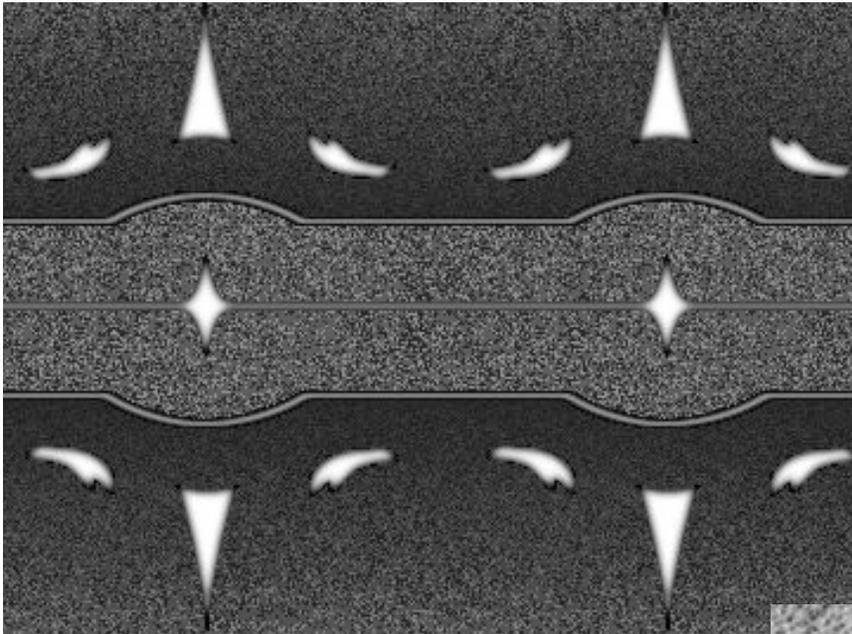
textura do bump map

imagem final



Mesma textura em fase plana

Como:
displacement map
+
bump map



Sobre uma fase cilíndrica

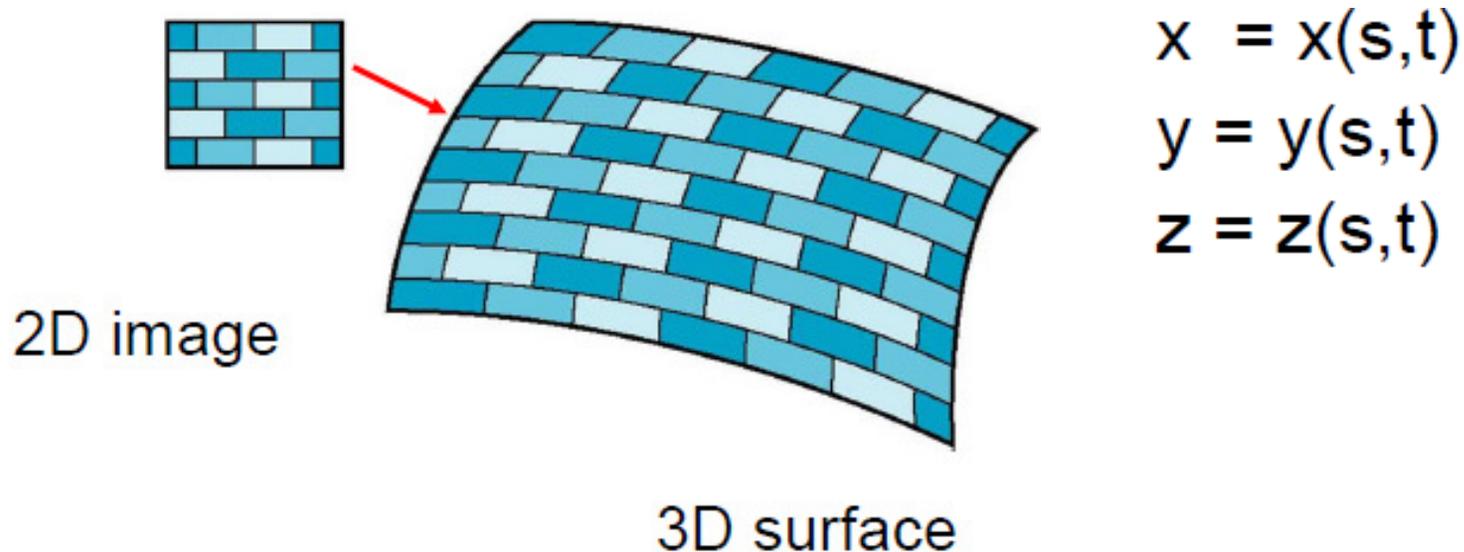
Displacement map



Displacement
map
+
bumpmap



Sistemas de coordenadas envueltos:



Forward mapping

Forwards x backwards mapping

Mapeamento direto e inverso

Dado um ponto da tela (pixel) queremos saber a que ponto do objeto ele corresponde (inverso),

e

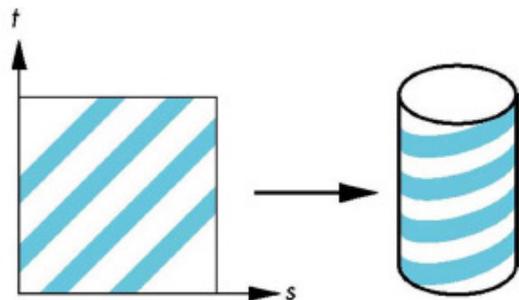
dado um ponto do objeto, queremos saber a que ponto da textura ele corresponde (direto)

Mapeamento em 2 partes

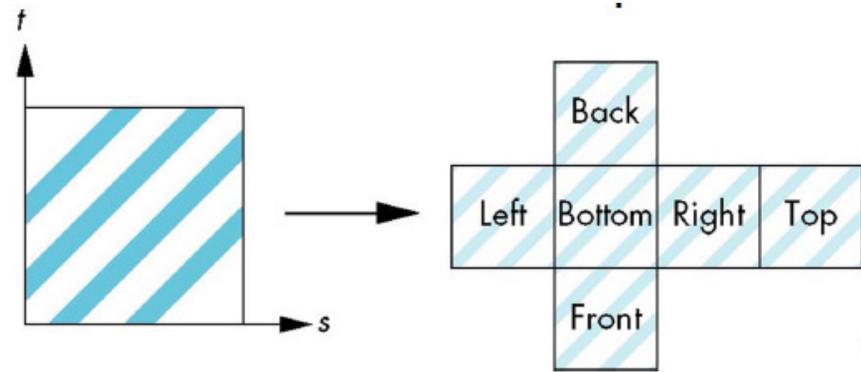
1- textura em uma forma intermediaria mais simples (cubo – projeções ortográficas, cilindro de altura h e raio r , esfera de raio r)

$$\begin{aligned}x &= r \cos 2\pi u \\y &= r \sin 2\pi u \\z &= v/h\end{aligned}$$

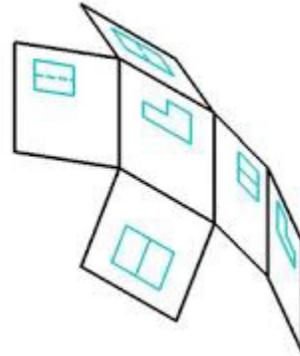
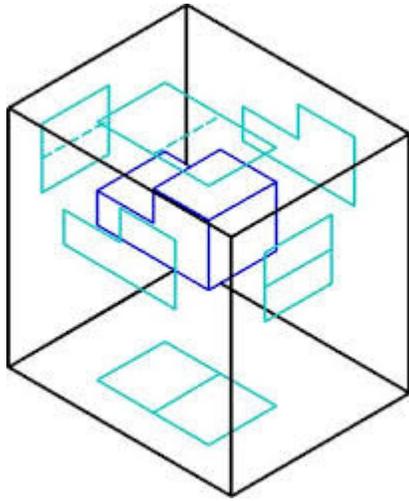
$$\begin{aligned}s &= u \\t &= v\end{aligned}$$



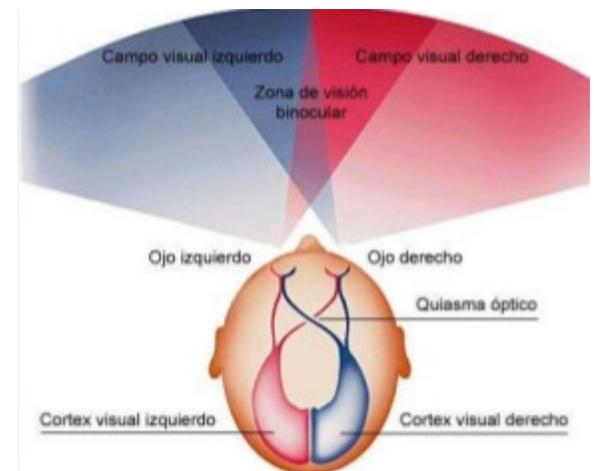
$$\begin{aligned}x &= r \cos 2\pi u \\y &= r \sin 2\pi u \cos 2\pi v \\z &= r \sin 2\pi u \sin 2\pi v\end{aligned}$$



Ideia da projeção em diferentes direções

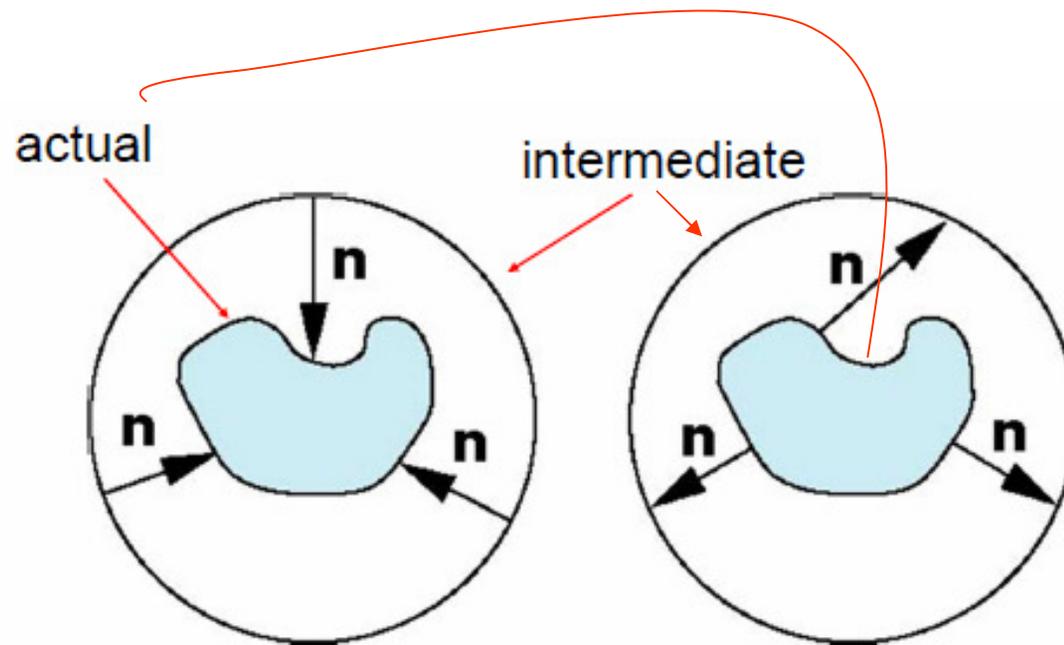


Campo visual

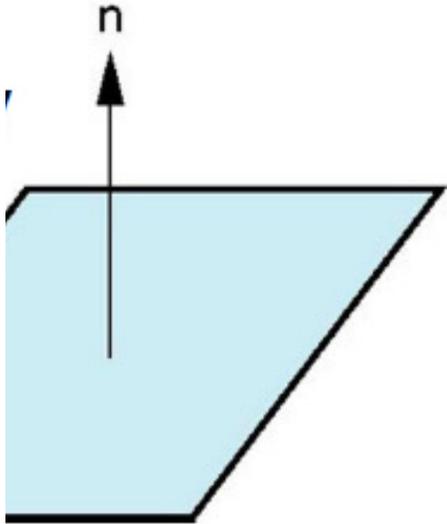


Mapeamento em 2 partes

2- da superfície mais simples para o objeto real, usando as normais (da intermediária para o objeto e do objeto para a intermediária)



Normais



Superfícies planas:

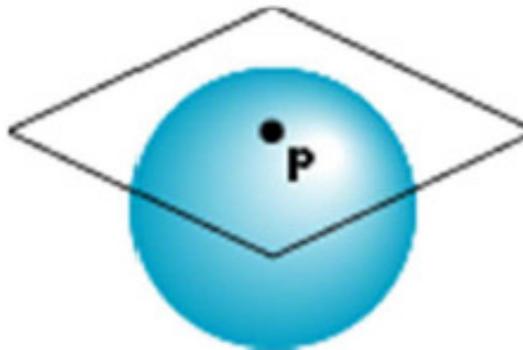
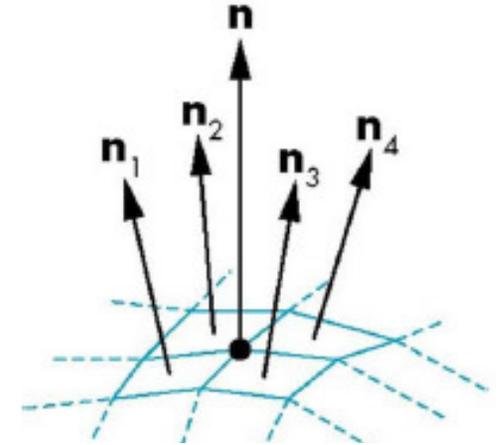
Equação do plano:

$$ax+by+cz+d = 0$$

Normal = (a,b,c)

Os por 3 pontos do plano: p_0, p_1, p_2

$$\mathbf{n} = (p_2-p_0) \times (p_1-p_0)$$



Círculos: raio do ponto ao centro

Environment ou reflection map

Usa para modelar o ambiente em uma superfície, como espelho.

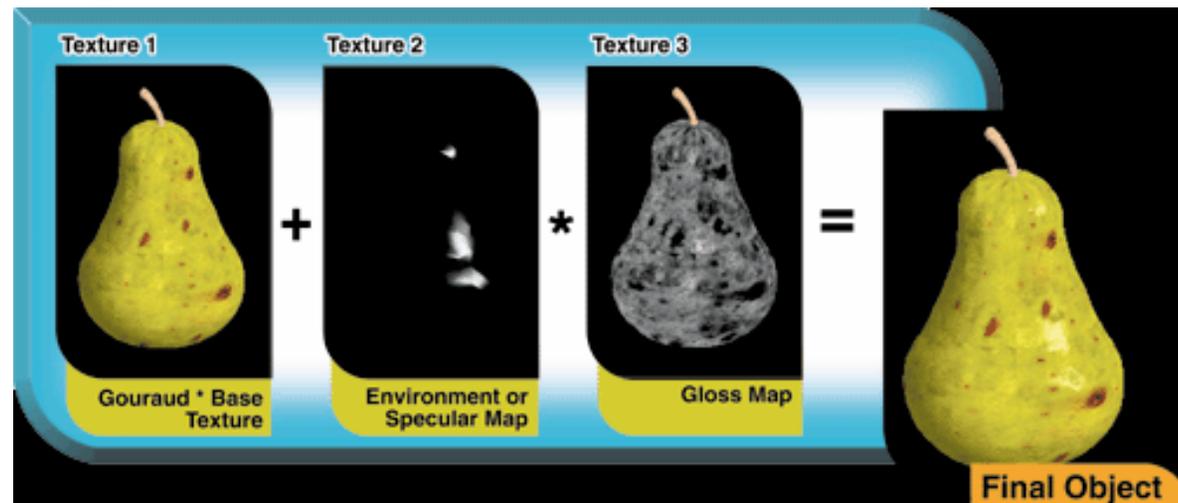
Funciona bem com apenas um objeto na cena,

Dando uma ótima idéia de reflexão sem usar nenhum raio ou pode ser unido ao raytracing



Mapas podem ser combinados em diversos níveis

Para produzir um grau de realismo na cena de maneira simplificada



Shading

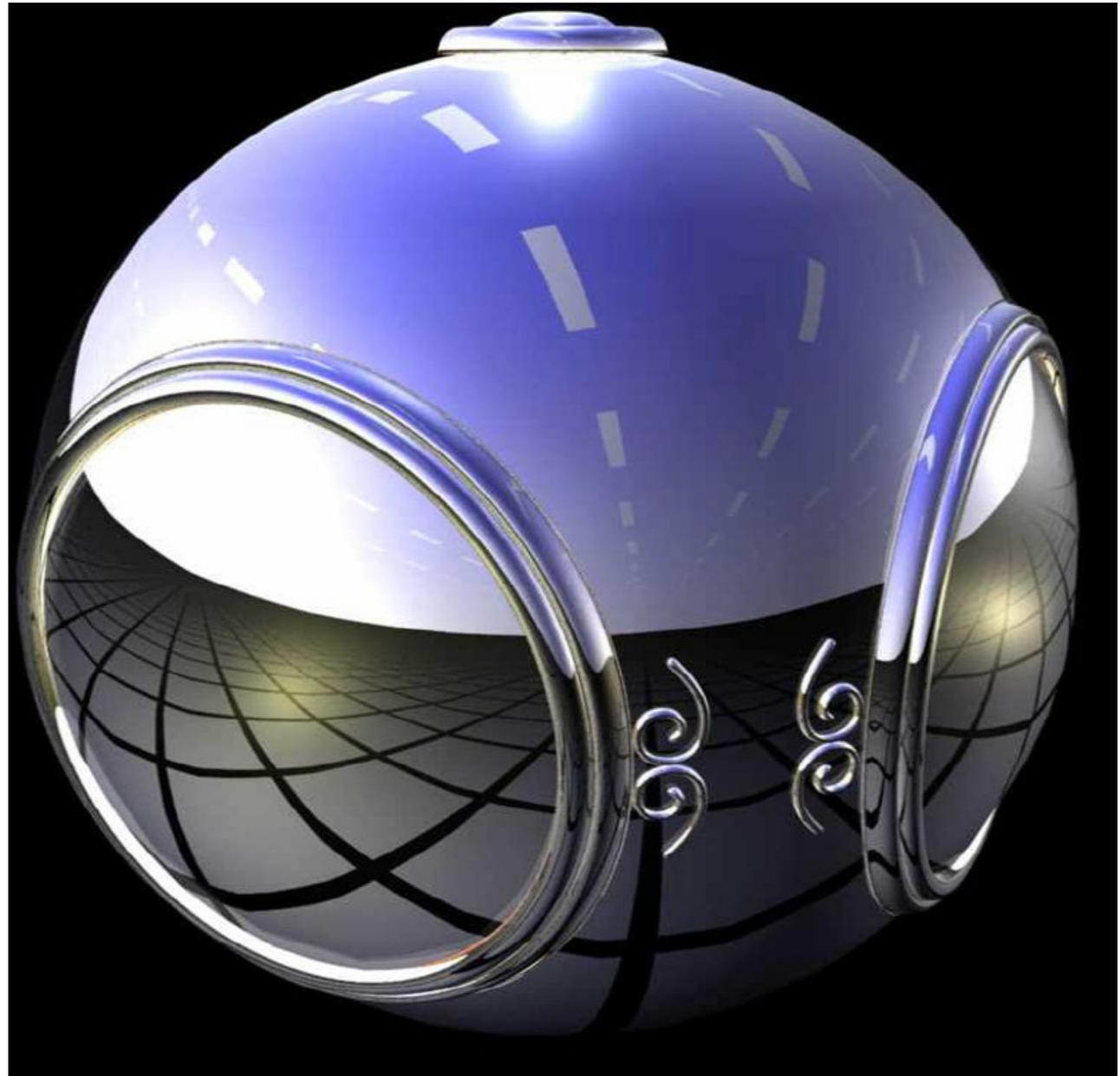
Modelo Phong



Texture
map

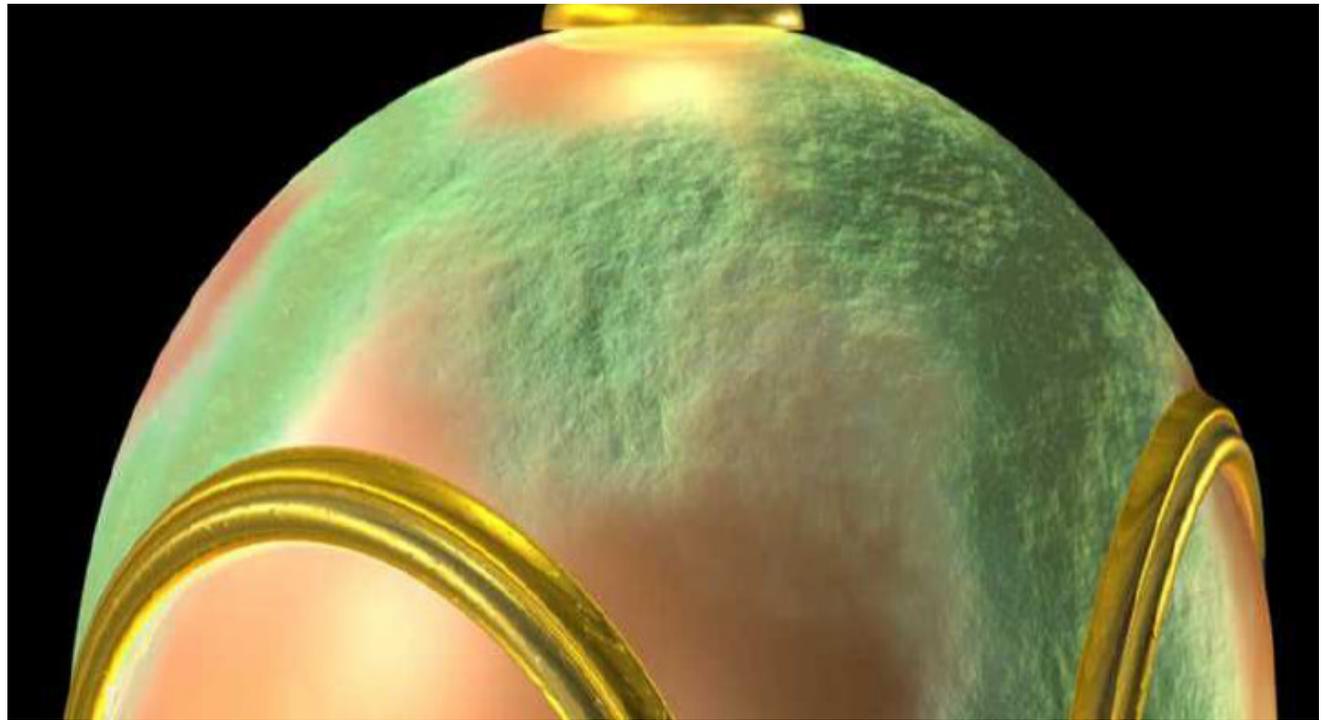


Environment
Mapping



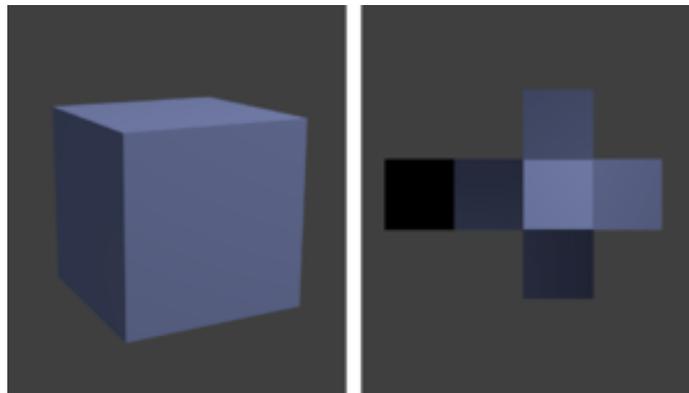
detalhes

Bump Mapping



Lightmap

Mapeamento que contém a intensidade luminosa das faces. Útil em objetos que permanecem estáticos em games. Geralmente flat , sem incluir a idéia da direção da iluminação . Presentes na maioria dos plug-ins 3D



<http://www.computerhistory.org/>

The Utah Teapot



Criado por Martin Newell na University of Utah em 1975.

Tem sido usado como modelo 3D por 40 anos para verificar modelos de iluminação, cor, realismo, etc.

Qual o nome da estrutura de dados logo do Blender?
(Ton Roosendaal 2002) Suzanne?

Procedural texture generation method

As texturas podem ser geradas por programação (procedures) e não apenas por captura de texturas já existentes

Geradores de padrões fractais são muito úteis para isso!

Level of details (mip maps)

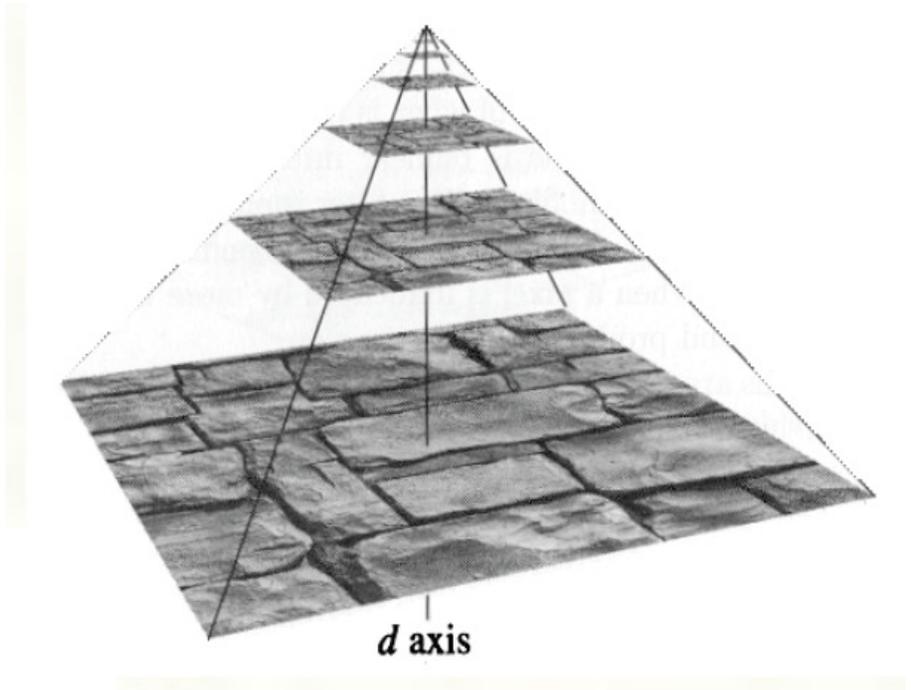
Alterado detalhes da textura com a distância ao observador

Também pode ser simulado com filtros

Que diminuem a resolução

"MIP" acronym of the
phrase *multum in parvo* =

"much in little"

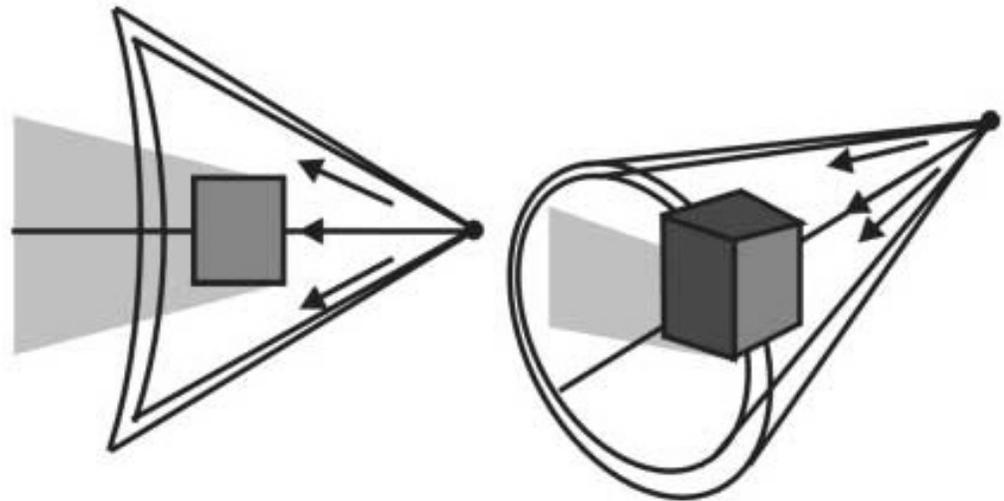
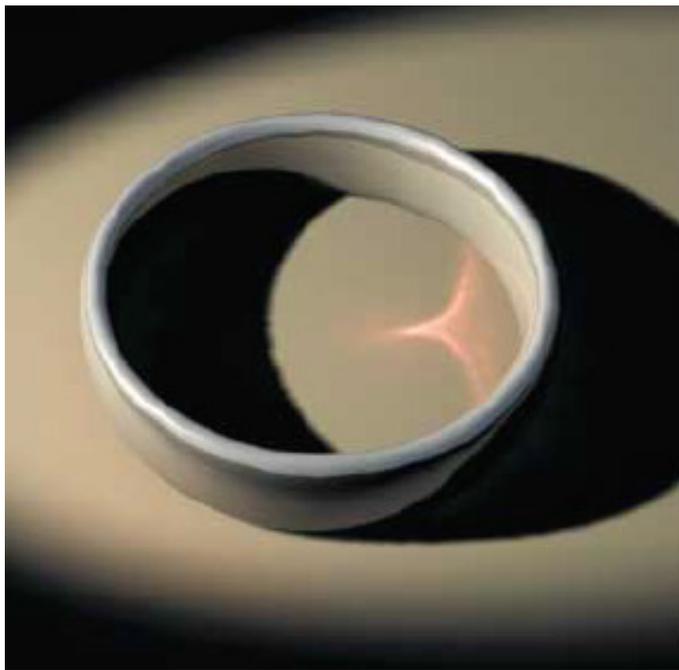


Sombras, refração, reflexão e efeitos específicos



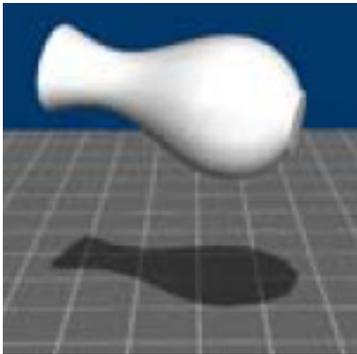
Sombras,

podem ser consideradas por diversos métodos, de simples projeções , passando por texturas até os métodos globais (seção 7.3.6 do livro texto tem boa revisão do assunto) !



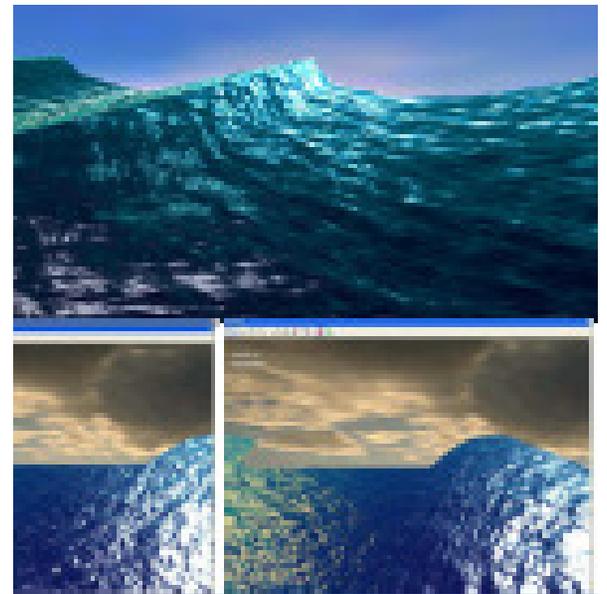
Sobras planas e projetadas:

Sombra=umbra e penumbra



Cautics

São padrões de luz (refletidas e refratadas) que parecem concentrar a luz em alguns pontos. Ocorrem em vidros, água, modelagens de ondas, piscinas e outras situações que concentramos raios luminosos



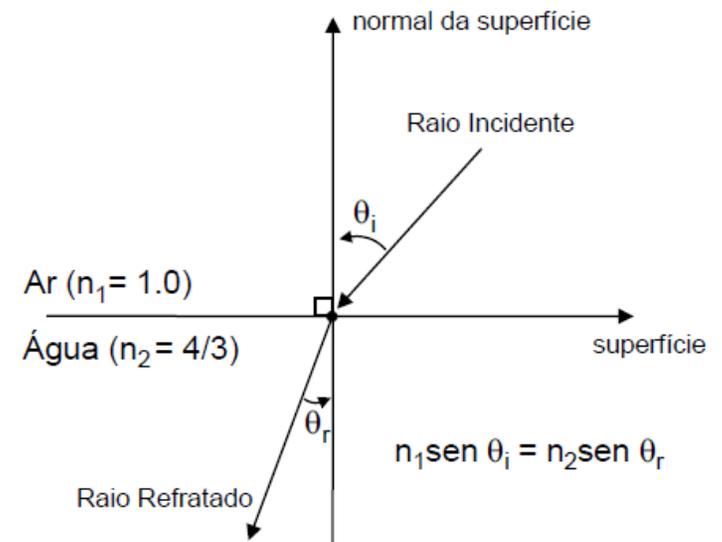
Refração

Quando o feixe de luz penetra em alguns materiais sua trajetória muda de ângulo de acordo com a diferença de densidade dos meios.

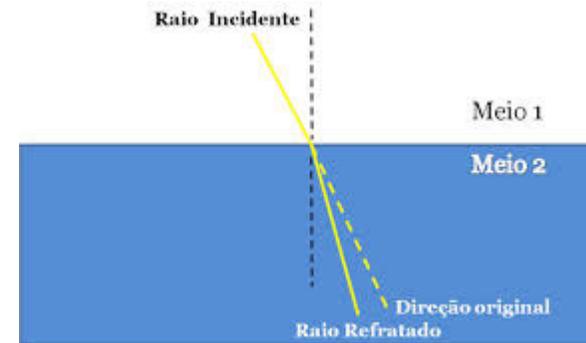
Lei da refração ou de Snell:

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_r} = n_{21}$$

n_{21} é uma constante, chamada índice de refração
ou IR



Exemplo de alguns IR:



Material	IR
Ar (em temperatura e pressão padrão ou STP)	1,0003
Água	1,33
Álcool etílico	1,36
Vidro	1,66
Plástico	1,51
Vidro Denso	1,52
Sal	1,53
Quartzo	1,46
Cristal	1,58
Diamante	2,42

Transparência

$$I = t I_1 + (1-t) I_2, 0 \leq t \leq 1$$

onde, I_1 é a superfície visível, I_2 é a superfície imediatamente atrás da superfície visível, e t é o fator de transparência para I_1 . Se I_2 também é transparente, o algoritmo é aplicado recursivamente até encontrar uma superfície opaca ou o fundo da cena.

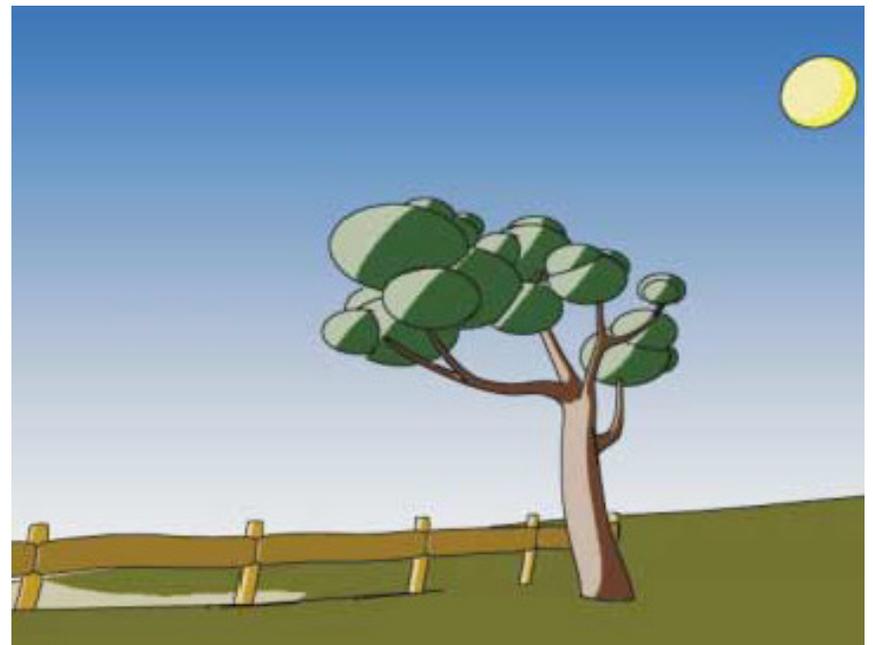
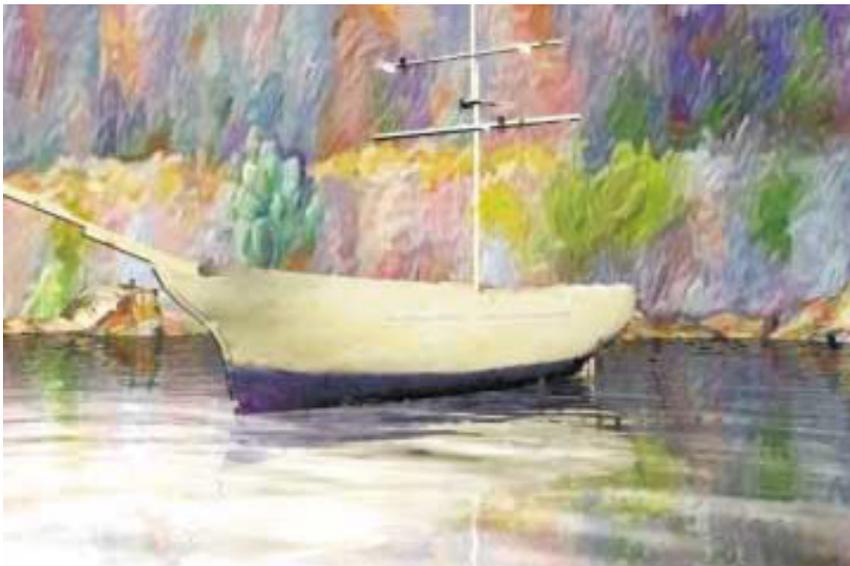


Há muito mais do que isso!

Vimos aqui apenas sobre um realismo fotográfico das imagens, mas há diversas outras formas e esse assunto está sempre em constante evolução. Assim depois desta leve introdução continue na área! Você já tem a bagagem teórica que precisa para agora descobrir o resto sozinho!

Toon Shading

Stylistic rendering



Bibliografia:

D. F. Rogers, J. A. Adams. Mathematical Elements for Computer Graphics, 2dn Ed. , Mc Graw Hill, 1990

E. Azevedo, A. Conci, [Computação Gráfica: teoria e prática](#), [Campus](#) ; - Rio de Janeiro, 2003

J.D.Foley,A.van Dam,S.K.Feiner,J.F.Hughes. Computer Graphics- Principles and Practice, Addison-Wesley, Reading, 1990.

Y. Gardan. Numerical Methods for CAD , MIT press, Cambridge, 1985.

A. H. Watt, F. Policarpo - [The Computer Image](#) , Addison-Wesley Pub Co (Net); 1998

https://noppa oulu.fi/noppa/kurssi/521493s/luennot/521493S_3-d_graphics_vi.pdf

<http://graphics.stanford.edu/papers/rad/>