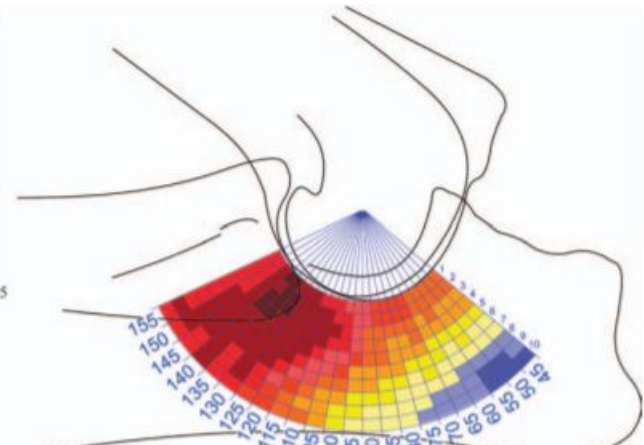
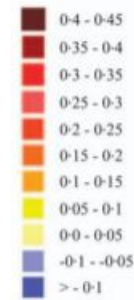




Pixel Intensity

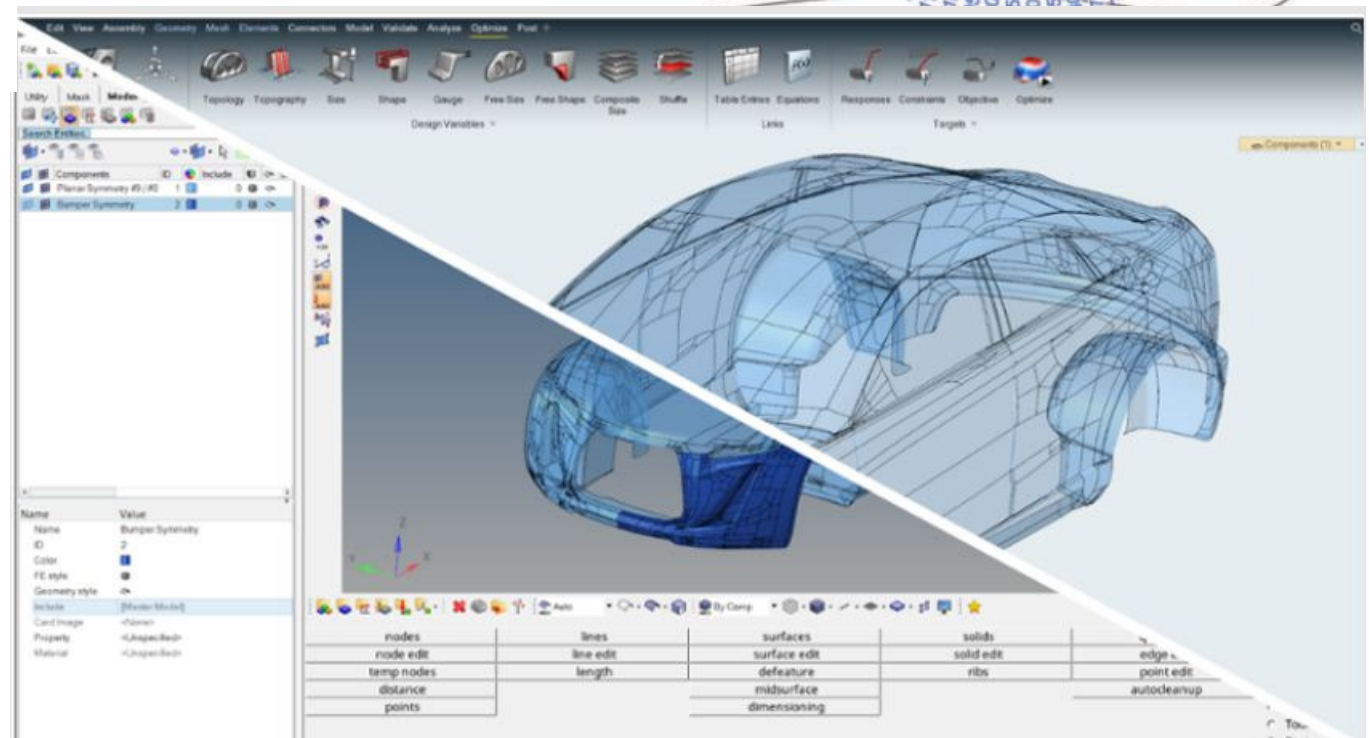


TEMA 10

Curvas e Superfícies

2021

IC / UFF



Capítulo 3 – livro texto

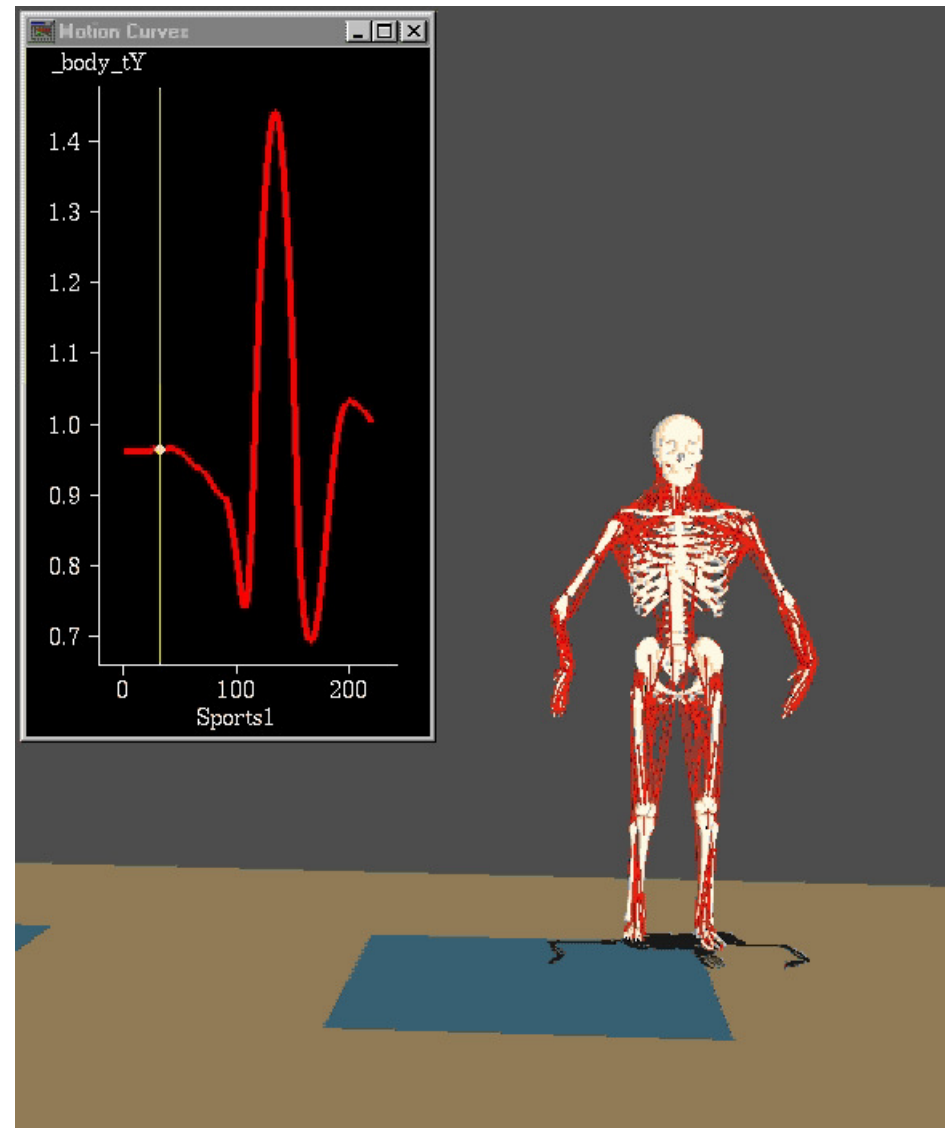
Onde se usa :

No desenho do contorno dos objetos e até nos textos .

Por exemplo caracteres das fontes TrueType são segmentos de curvas Bézier quadrática.

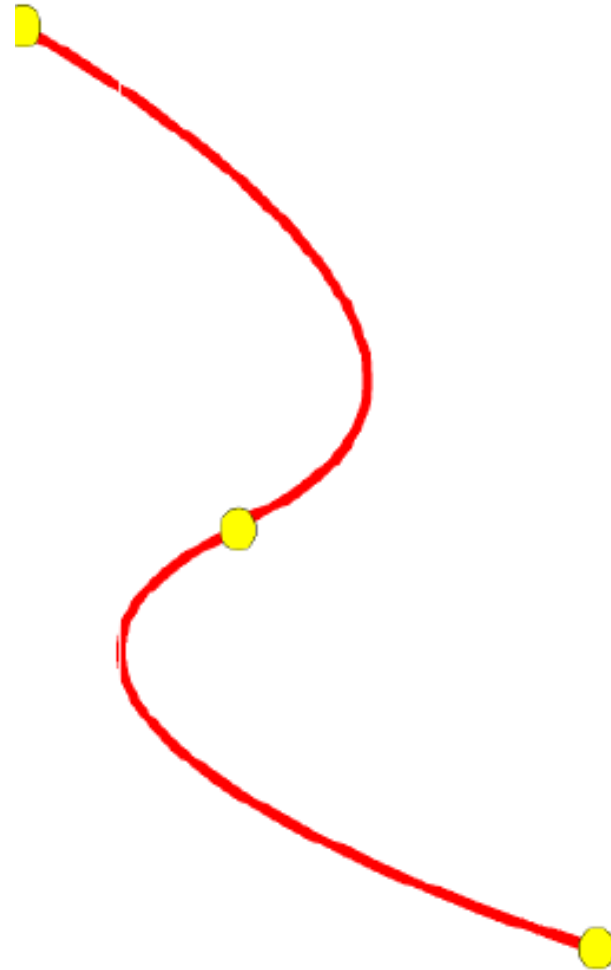
No controle de animações como essa ao lado.

O movimento do braço é descrito por curva interpolada através do registro de pontos.



Elementos 1D

- Comprimento
- Distancia ao inicio define a posição na curva
- Mas ela pode ser 2D e 3D



Curvas



- Formas de representação:
 - Procedural (exemplo *curvas fractais*)
 - Conjunto de pontos (digitalizadores: x_i, y_i)
 - Analítica:
 - Explícita : $y = f(x)$
 - Implícita : $x+y=0$
 - Paramétrica : $x = f(t), y = f(t)$

Também podem ser

Classificadas de acordo com seus termos: linear (grau 1), quadrática (grau 2), cúbica (grau 3), transcendental (sin, cos, log, ...)

Mas voltando a forma de representação mais importante
Para uso em CG: a **Analítica**

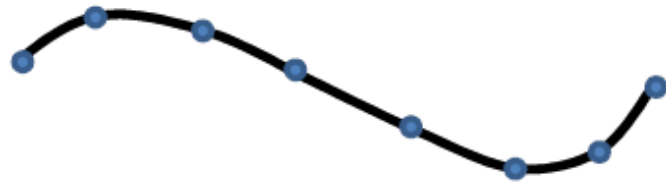
Representação analítica

- Não paramétrica e paramétrica
- Precisão sobre representação de ponto
- Armazenamento compacto
 - Centro do círculo e raio vs. pontos
- Ponto intermediário
 - Quaisquer pontos sobre a curva podem ser calculados
- Mais fácil gerar desenhos
- Mais fácil mudar a curvatura

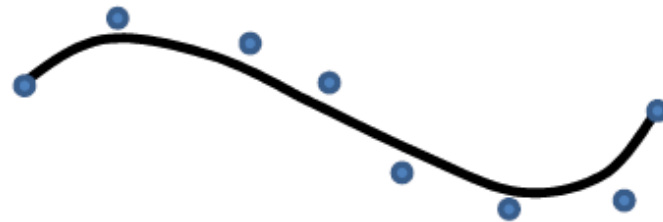
Representação analítica de curva definida por ponto

- Interpolação
 - Analiticamente definindo uma curva a partir de um conjunto de pontos conhecido
- Ajustada
 - Uma curva que passa por todos os pontos conhecidos
- Satisfatória
 - Uma curva que passa perto de pontos conhecidos

Interpolação X Aproximação

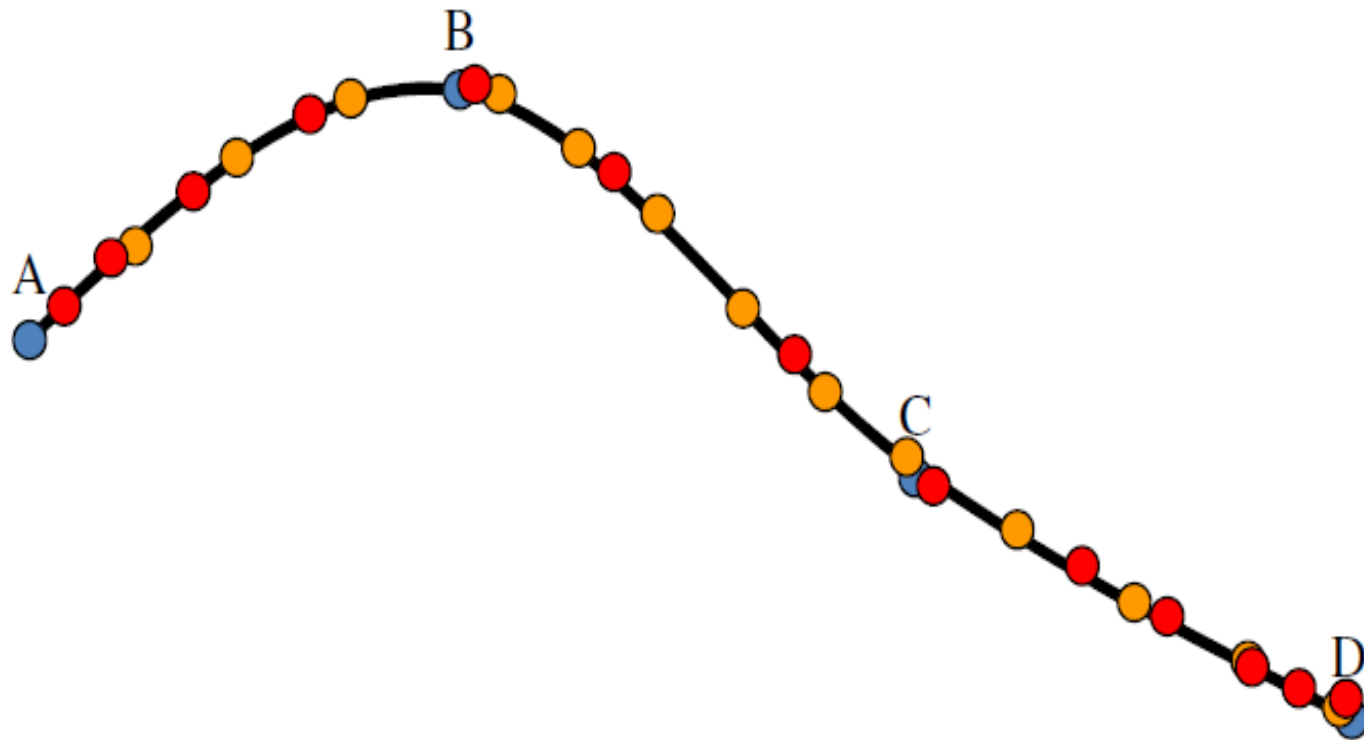


Na interpolação, a curva passa sobre todos os pontos definidos.



Na aproximação, a curva começa sobre o ponto inicial e termina sobre o final. Os demais pontos são aproximados.

gerar uma curva no espaço, distribuindo **pontos** de maneira **suave**

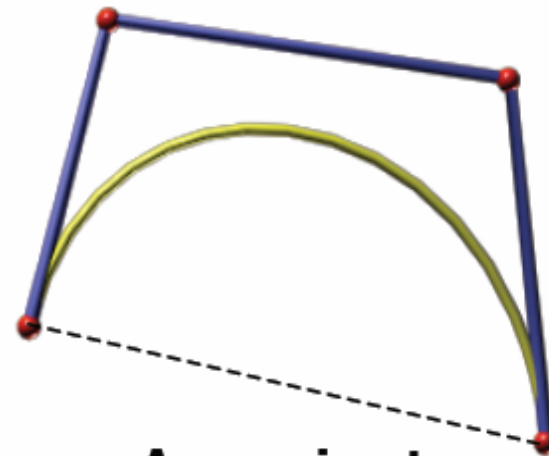


Dado um número n de pontos para traçar uma curva:

- ***interpolar*** os pontos (curva passa *necessariamente* por todos os pontos)
- ***aproximar*** os pontos (pontos definem cobertura convexa (*convex hull*) da curva)



Interpolate



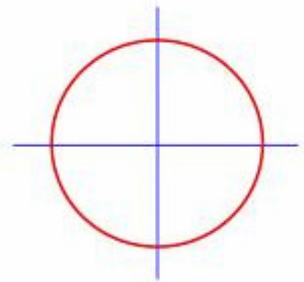
Approximate

Não paramétrica vs paramétrica

- Não paramétrica
 - Explícita $y = f(x)$
 - Implícita $f(x, y) = 0$
- Equação implícita de segundo grau geral

$$ax^2 + b2xy + cy^2 + 2dx + 2cy + f = 0$$

Exemplo
circunferência
representações
paramétricas



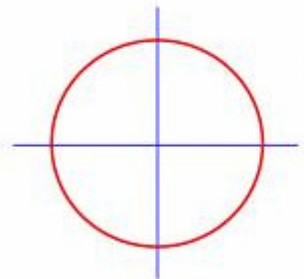
$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, f(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$$

$$\begin{cases} x = \sin \theta \\ y = \cos \theta \end{cases} \quad \text{where } \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad \text{where } t \in [0, 1]$$

Exemplo circunferência

representações não paramétricas



Explícita $y = f(x)$

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$y = -\sqrt{1 - x^2}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ or } x^2 + y^2 = 1$$

Implícita $f(x, y) = 0$

E essas?

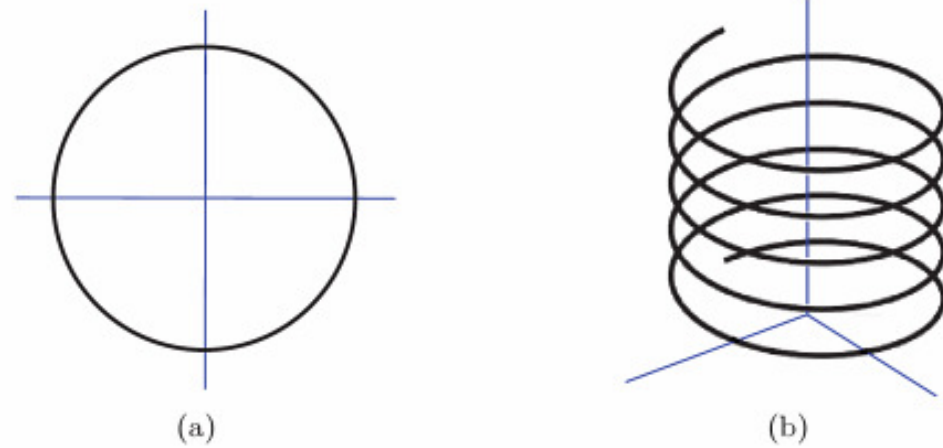


Fig. 1.1. (a) Image and (b) graph of $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

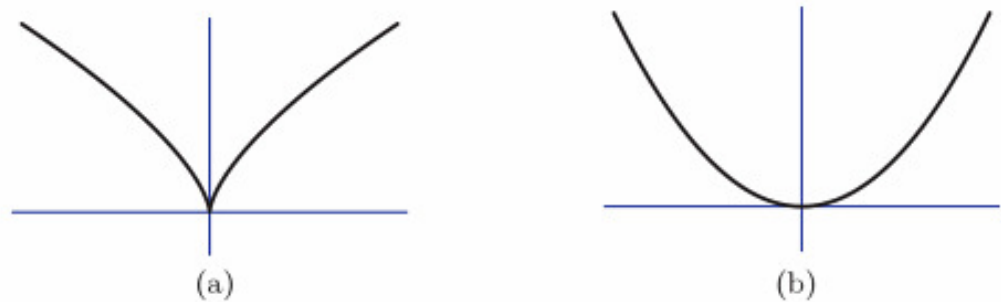


Fig. 1.2. (a) Cuspidal cubic $x^3 = y^2$ and (b) parabola $y = x^2$ as *images* of different parametrisations.

Explícita $y = f(x)$

Implícita $f(x, y) = 0$

Representação implícita

- Curva em 2D: $f(x,y) = 0$
 - Linha: $ax + by + c = 0$
 - Círculo: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$
- Superfície em 3D: $f(x,y,z) = 0$
 - Plano: $ax + by + cz + d = 0$
 - Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$

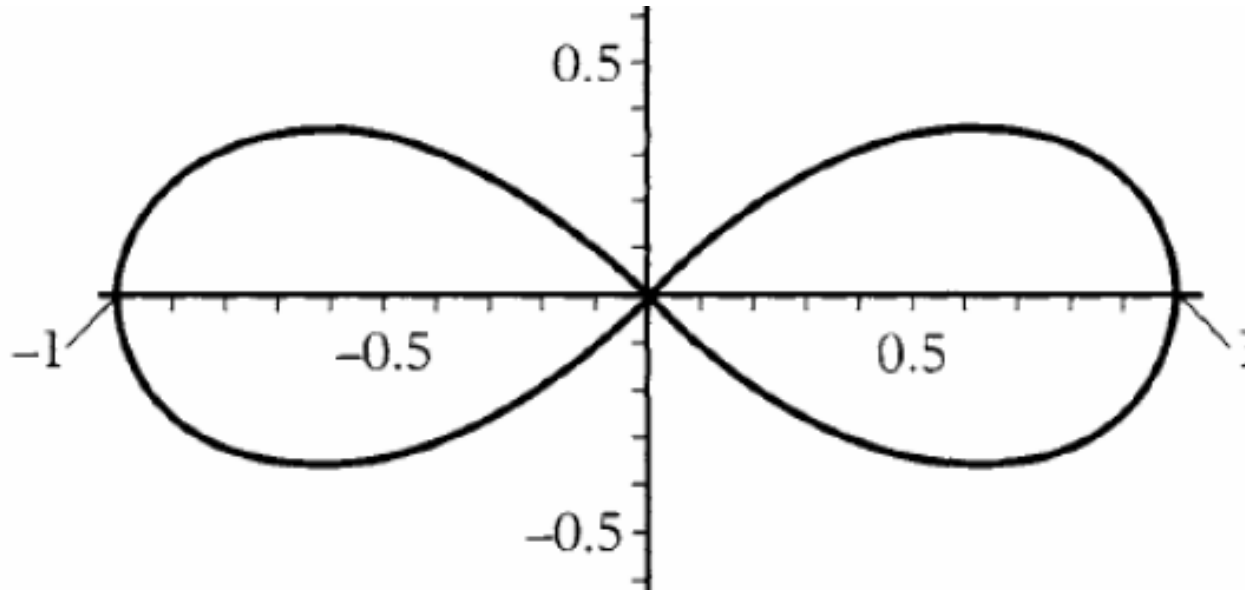
Outros exemplos:

- Lemniscata de Bernoulli => símbolo infinito

Quarto grau!

$$(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)^2 = 0$$

$$\text{Implícita } f(x, y) = 0$$



Curvas não paramétricas

- Linha
- Círculo
- Parábola
- Elipse
- Hipérbole

1. The equation $-z = x^2 + y^2$ explicitly defines the paraboloid in \mathbb{R}^3 .

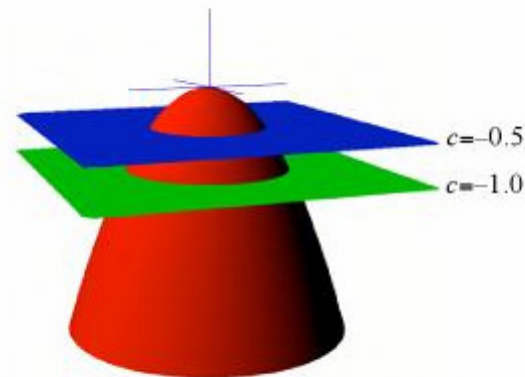
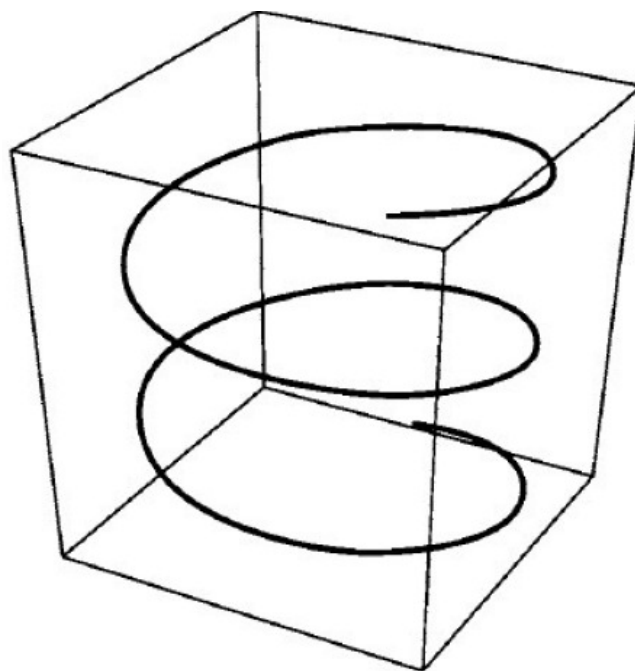


Fig. 1.7. The paraboloid $-z = x^2 + y^2$ in \mathbb{R}^3 .

Curvas paramétricas

- Pontos sobre uma curva são representados com uma função de um único parâmetro
 - $x = f(u)$, $y = g(u)$, $z = h(u)$
 - u : variável paramétrica

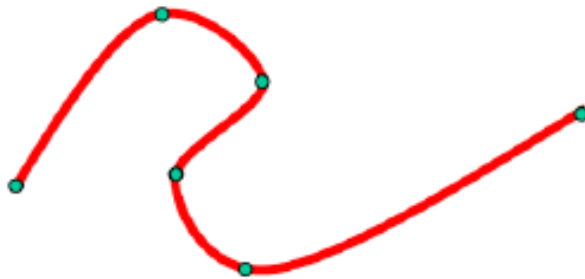
$$x = \cos(t), y = \sin(t), z = t/5$$



Peculiaridades das curvas em CG

Principais desvantagens das representações **não-paramétrica** em CG

- É difícil definir a equação não paramétrica de uma curva que passe por um conjunto de pontos pré-definidos.
- Não permite a representação de curvas com laços



Peculiaridades das curvas em CG

Para CG, representações paramétricas costumam ser as mais convenientes

Assim, genericamente, uma curva 3D é

$$- Q(t)=[x(t) \ y(t) \ z(t)]$$

$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ são chamadas de funções-base (*base functions*)

$$P(u) = (X(u), Y(u), Z(u))$$

$$0 \leq u \leq 1$$

$$P(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$$

$$0 \leq u \leq 1$$

$$0 \leq v \leq 1$$

- As expressões paramétricas suportam declives infinitos, curvas fechadas ou multi-valor.

$$dy/dx = (dy/du) / (dx/du)$$

$$dy/dx = \text{infinito} \Rightarrow dx/du = 0$$

- Elementos geométricos definidos parametricamente são inerentemente limitados ($0 \leq u \leq 1$).
- As expressões paramétricas são facilmente traduzidas na forma de vectores e matrizes.
- Utilização de um só modelo matemático para representar qualquer curva ou superfície.

Reta na forma paramétrica

$$P(t) = P_0 + at$$

$$- P_x = P_{x0} + at$$

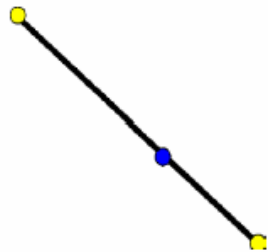
$$- P_y = P_{y0} + at$$

$$- P_z = P_{z0} + at$$



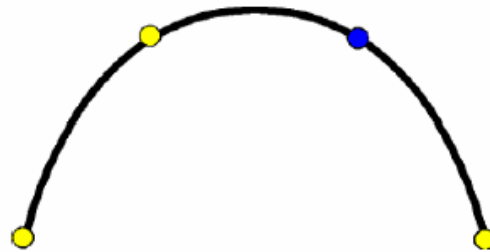
Parametrizando polinômios

$$f(t) = at + b$$



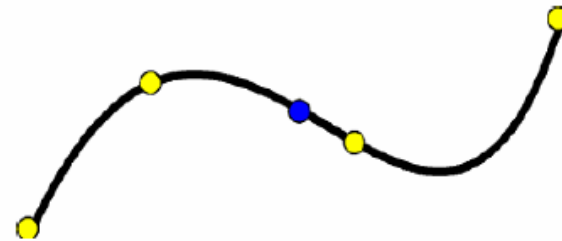
Linear

$$f(t) = at^2 + bt + c$$



Quadrático

$$f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$



Cúbico

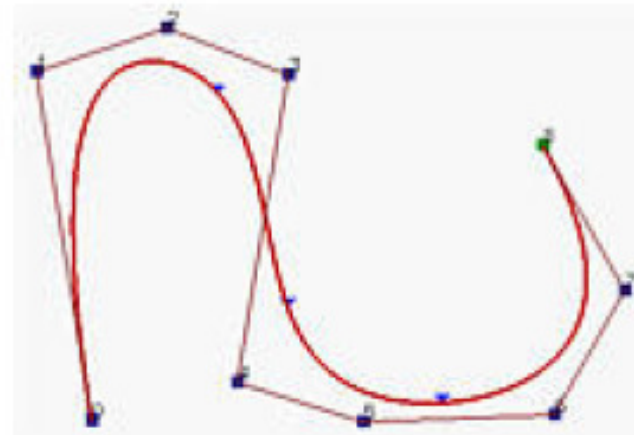
Peculiaridades das curvas em CG

A curva é definida através de um conjunto de **pontos de controle** que influenciam a forma da curva.

Os nós são pontos de controle que pertencem à curva.

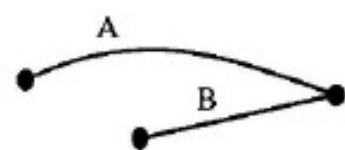
A curva pode ser interpolada, passando nesse caso por todos os pontos de controle, ou pode ser aproximada, passando apenas em alguns pontos de controle ou mesmo nenhum.

Os pontos de controle definem a fronteira de um polígono designado por *convex hull*.

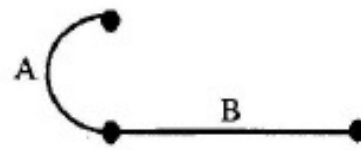


Continuidade

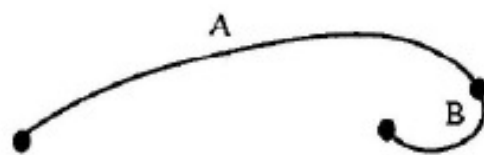
- Duas ou mais curvas nos nós (conectando pontos) para formar uma curva contínua
- Tipos de continuidade
 - Continuidade de ponto
 - Continuidade de tangente
 - Continuidade de curvatura



(a) Point continuity - C^0



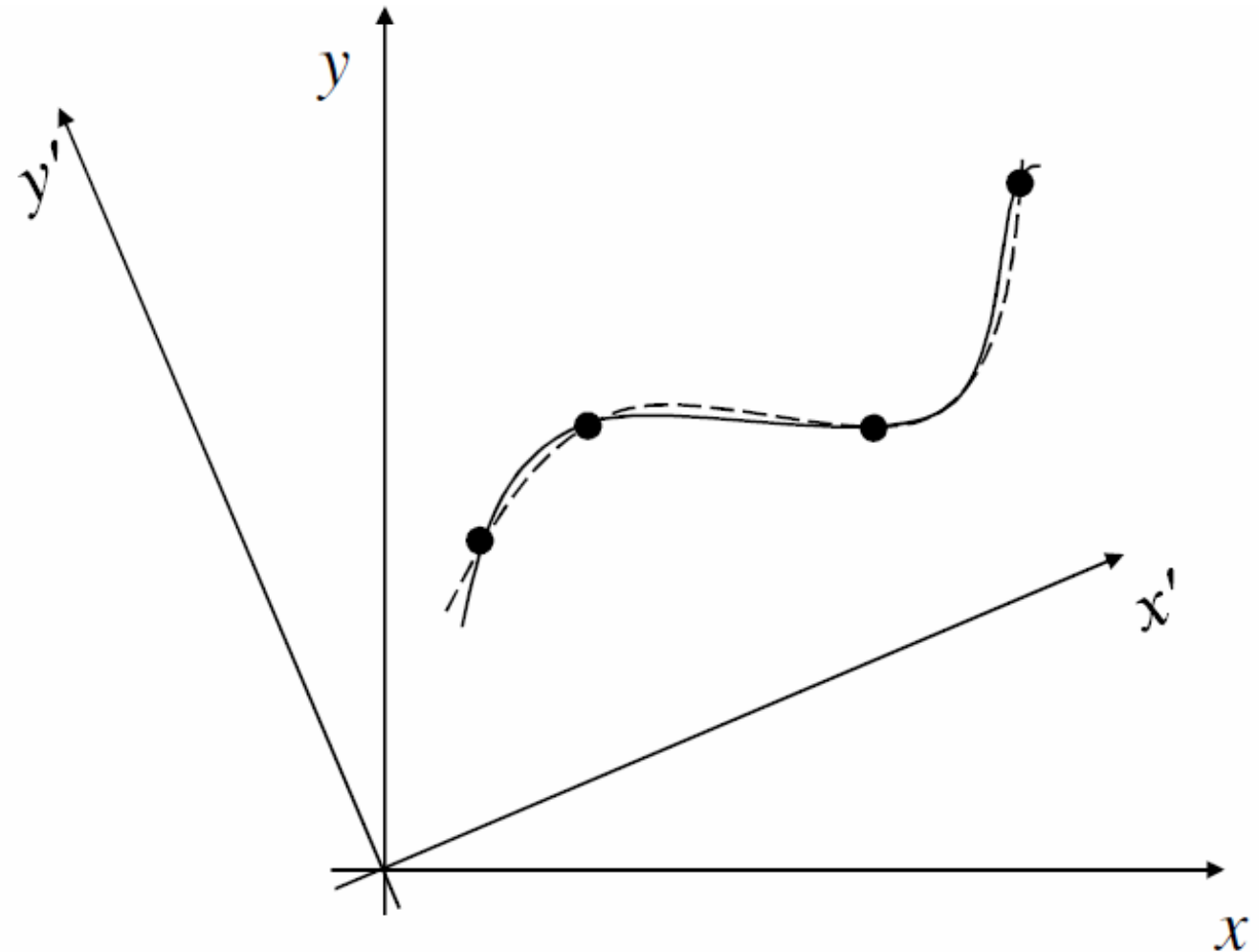
(b) Tangent continuity - C^1



(c) Curvature continuity - C^2

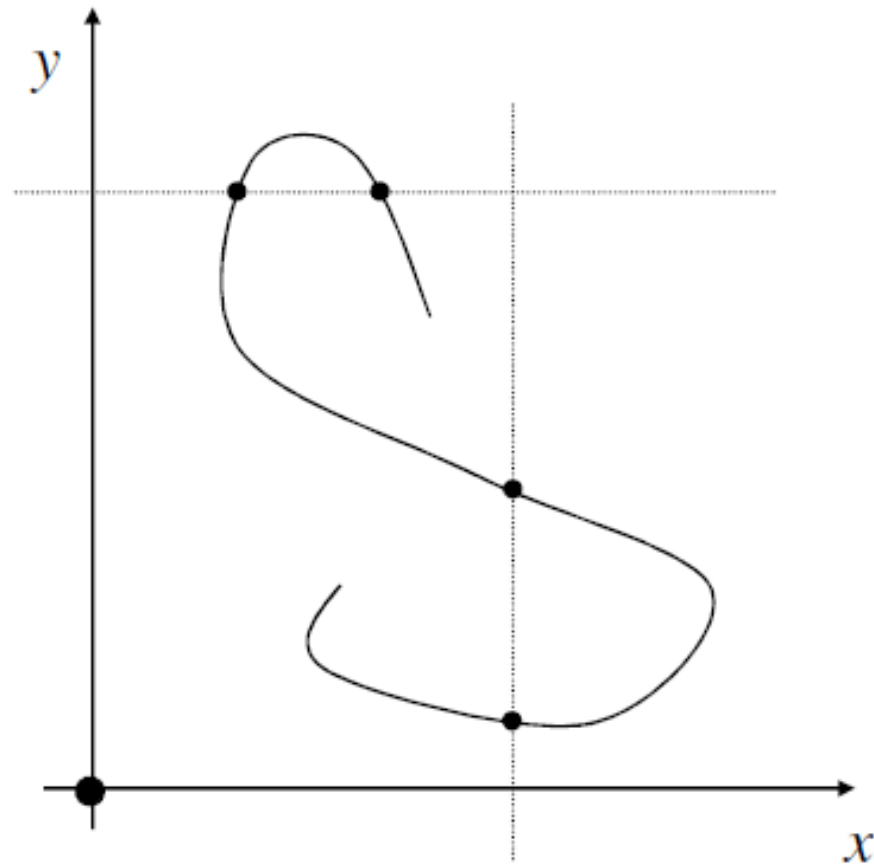
Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

Independência
dos
eixos
usados



Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

Deve
poder
ter
Pontos
com
coordenadas
múltiplas



Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

Deve ter uso

intuitivo e

poder ter

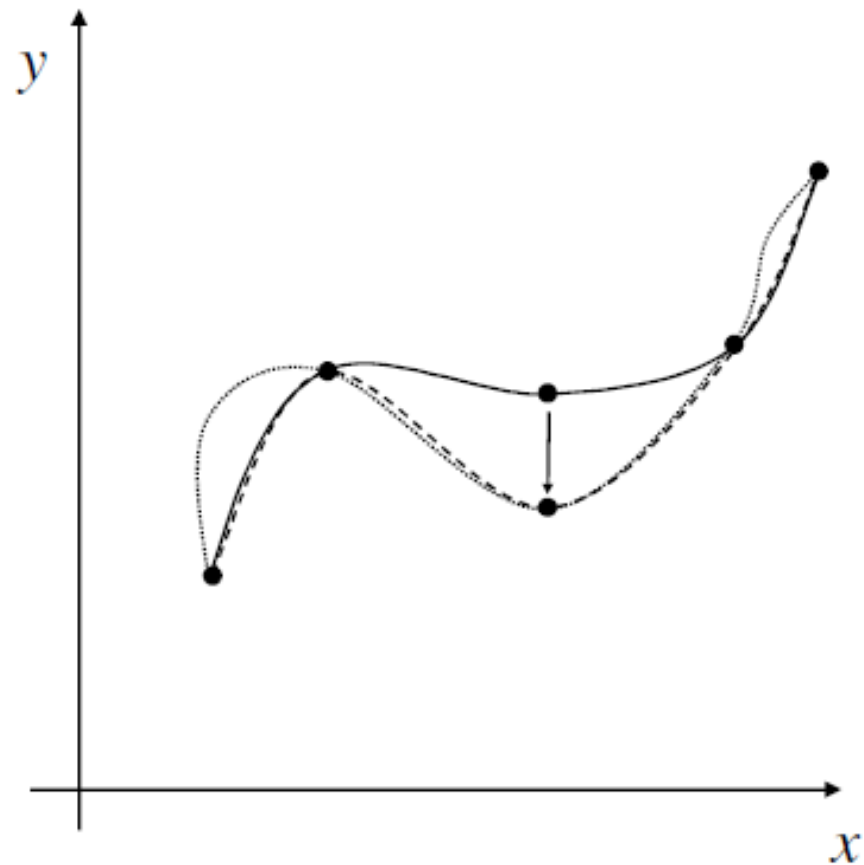
Controle local:

i.e. em ajuste finos:

alterar um trecho

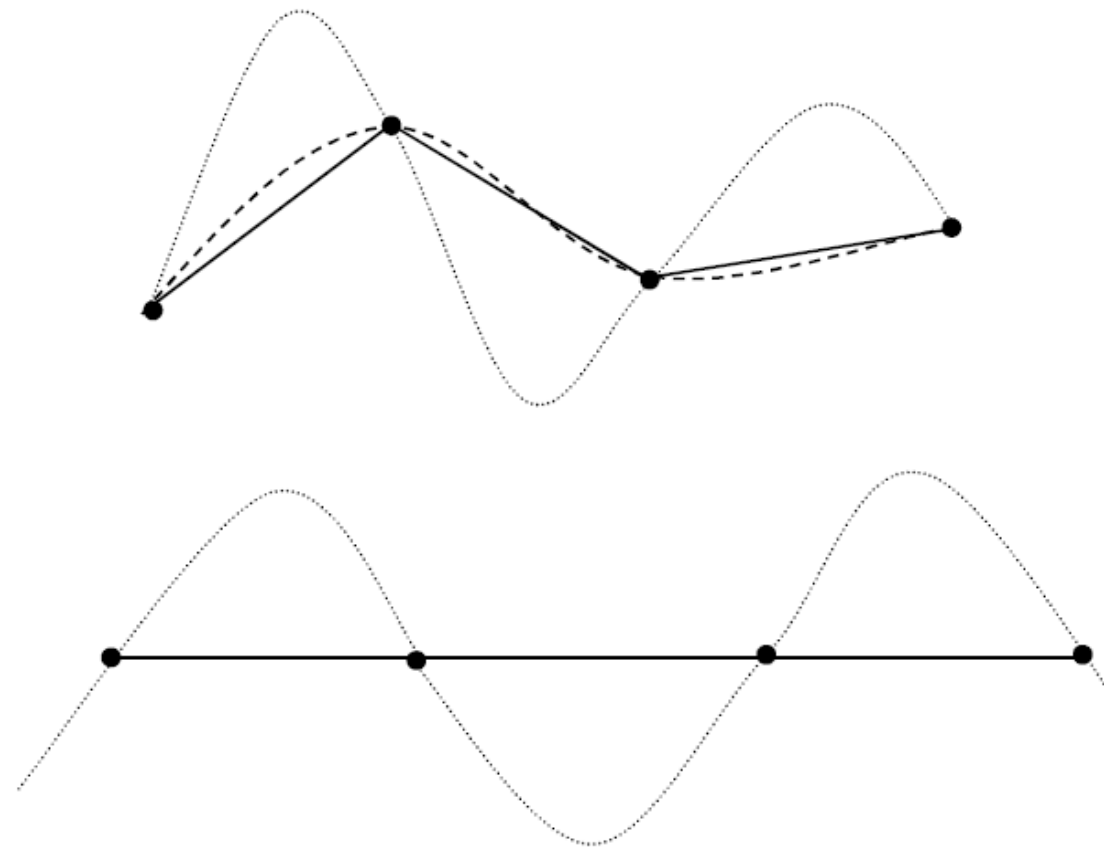
não altera toda a

curva



Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

O número de
pontos de
Controle local
não deve estar
associado ao
grau da curva
ou sua
oscilação

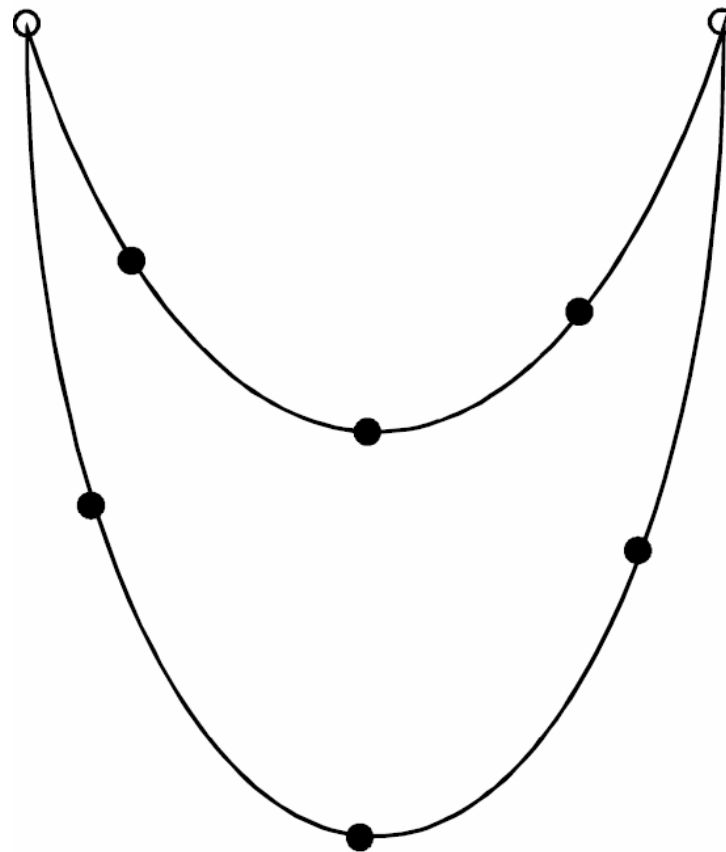


polinômio de grau elevado

formas com oscilações

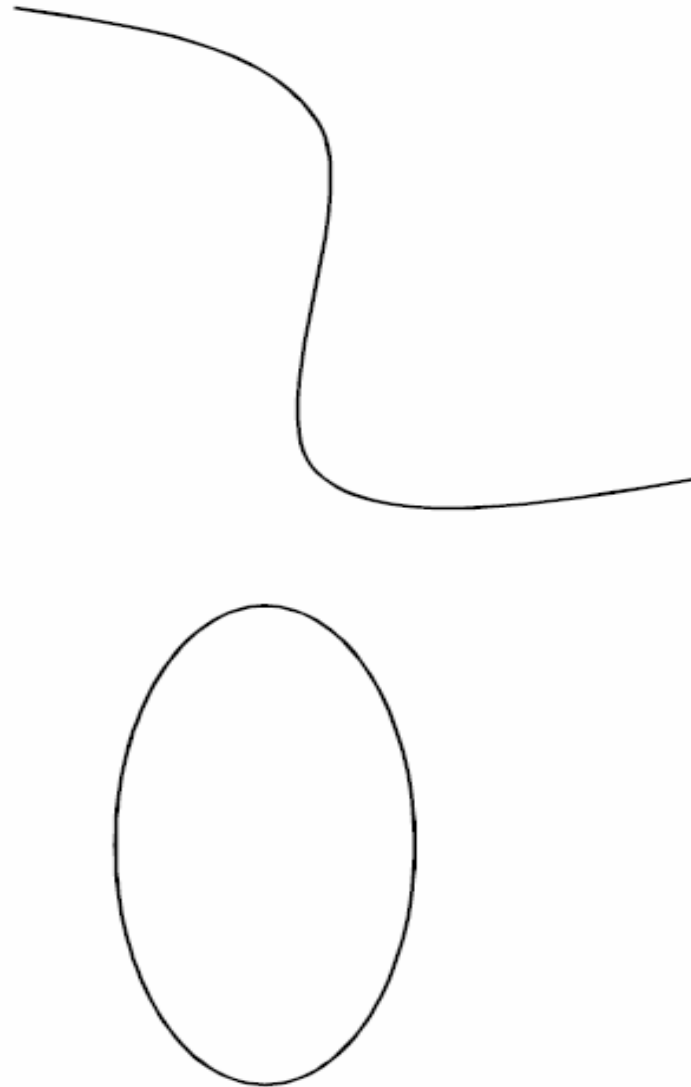
Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

Ser possível
representar
diversos graus
de
continuidades
que o usuário
desejar



Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

Ser possível
representar curvas
abertas, fechadas,
com pontos de
inflexão, etc. : ter
a **versatilidade**
que o usuário
desejar



Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

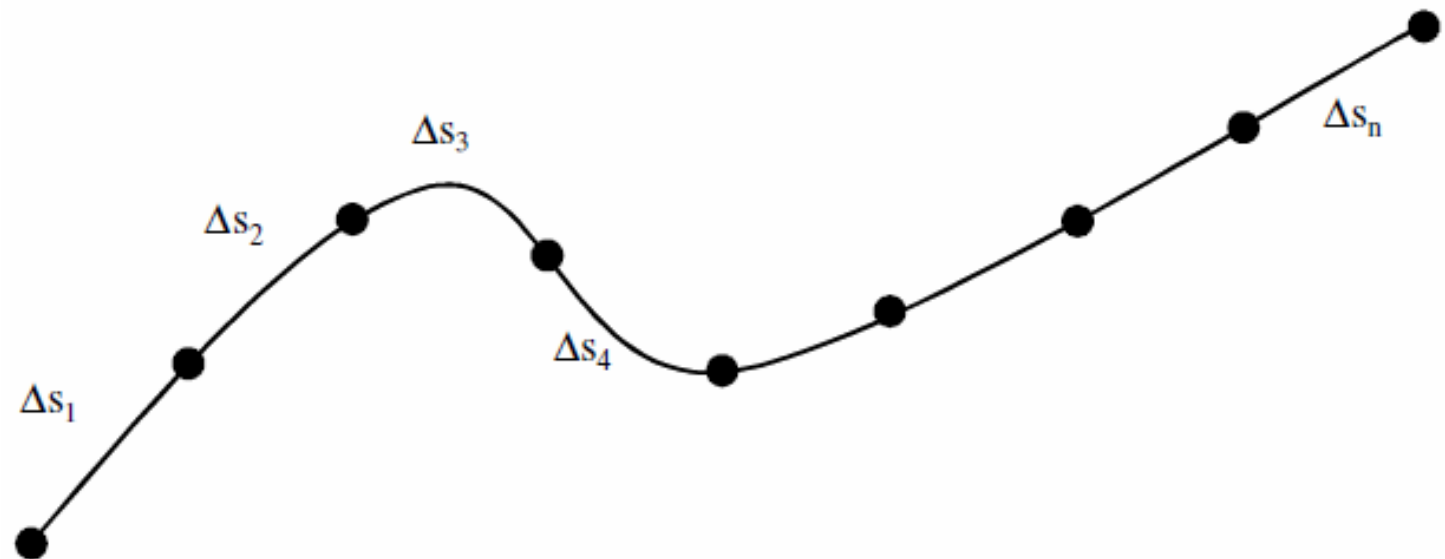
ter pontos

com distâncias \approx

constantes ao longo
do seu

comprimento:
parâmetro

uniformemente
distribuídos.



$$\Delta s_i \approx \Delta s_j$$

Solução em CG

- Curvas de formas livres
- Representadas por uniões
- Descritas por polinômios
- Parametrizadas
- Até grau 3
- Com continuidade paramétrica

Porque polinômios até terceiro grau?

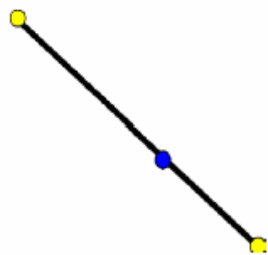
Quanto mais simples a equação da função de interpolação, mais rápida sua avaliação.

Polinômios são fáceis de avaliar

Grau menor que 3: Pouca flexibilidade.

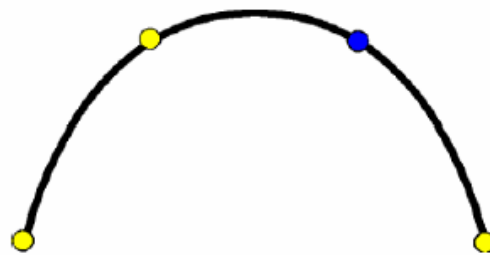
Grau maior que 3: Maior custo computacional com pouca vantagem prática.

$$f(t) = at + b$$



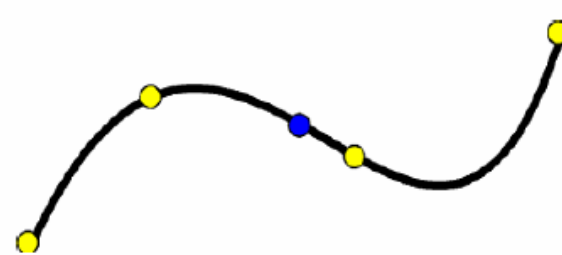
Linear

$$f(t) = at^2 + bt + c$$



Quadrático

$$f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$



Cúbico

Curvas Paramétricas Cúbicas 2D

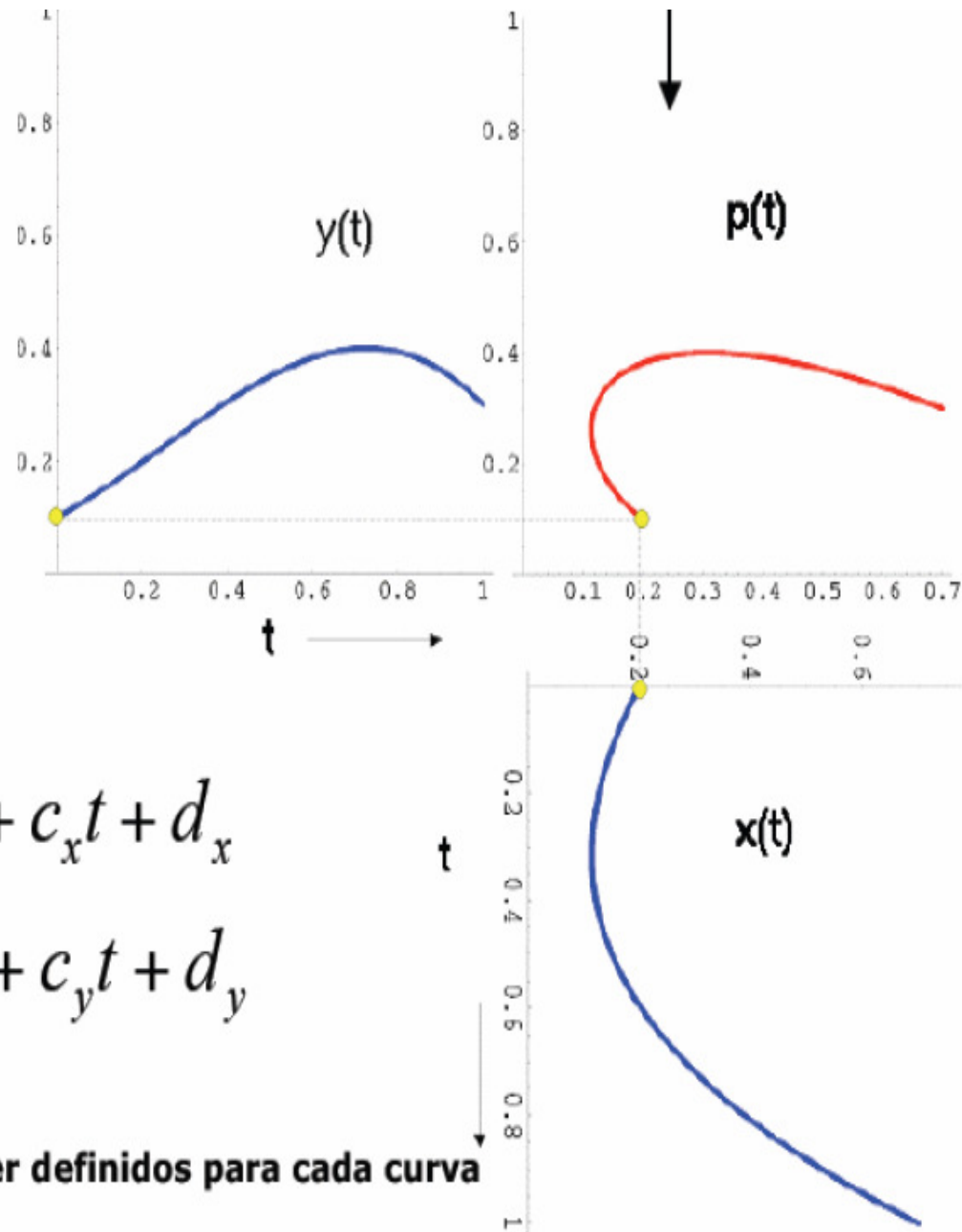
9 parâmetros
para cada curva

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$



Os valores de a_x, b_x , etc devem ser definidos para cada curva



Em 3D:

Um coordenada a mais em cada ponto.....

E projetar....

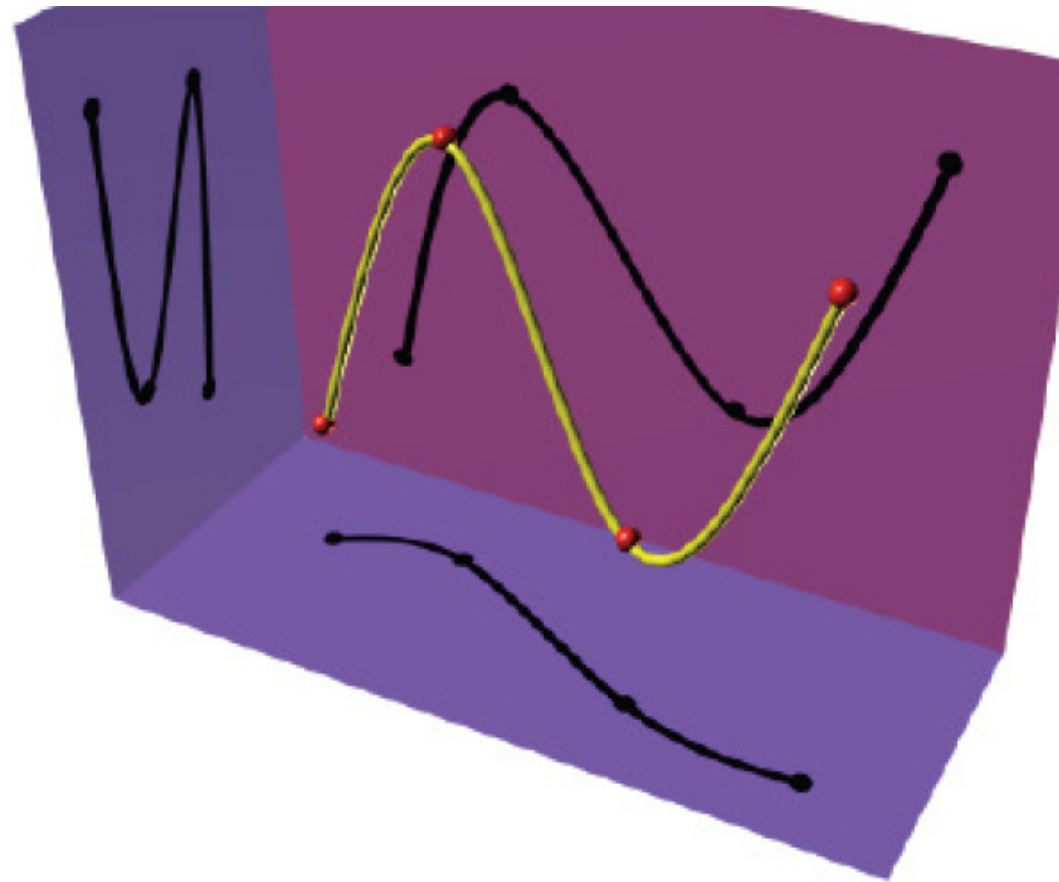
Curva polinomial paramétrica:

$$P(u) = c_0 + c_1u + c_2u^2 + \dots + c_ku^k$$

$$\begin{cases} x(u) = c_{0x} + c_{1x}u + c_{2x}u^2 + \dots + c_{kx}u^k \\ y(u) = c_{0y} + c_{1y}u + c_{2y}u^2 + \dots + c_{ky}u^k \\ z(u) = c_{0z} + c_{1z}u + c_{2z}u^2 + \dots + c_{kz}u^k \end{cases}$$

Em 3D

12 parâmetros
para cada
curva



$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$

$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z$$

De forma genérica

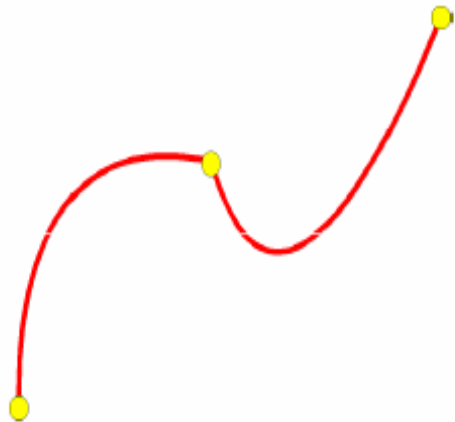
$$p(u) = c_0 + c_1u + c_2u^2 + c_3u^3 = \sum_{k=0}^3 c_k u^k = \mathbf{u}^T \mathbf{c},$$

onde

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}, \quad c_k = \begin{bmatrix} c_{kx} \\ c_{ky} \\ c_{kz} \end{bmatrix}$$

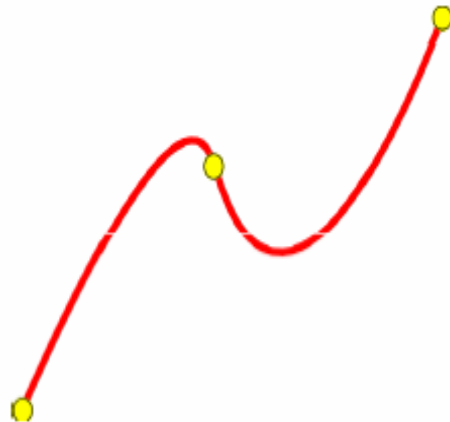
continuidade paramétrica e geométrica

Foley et al p. 480 - 483



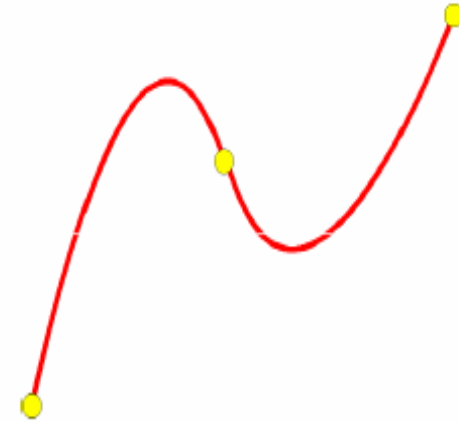
Continuidade Geométrica G0

Dois segmentos se encontram em um ponto



Continuidade Geométrica G1

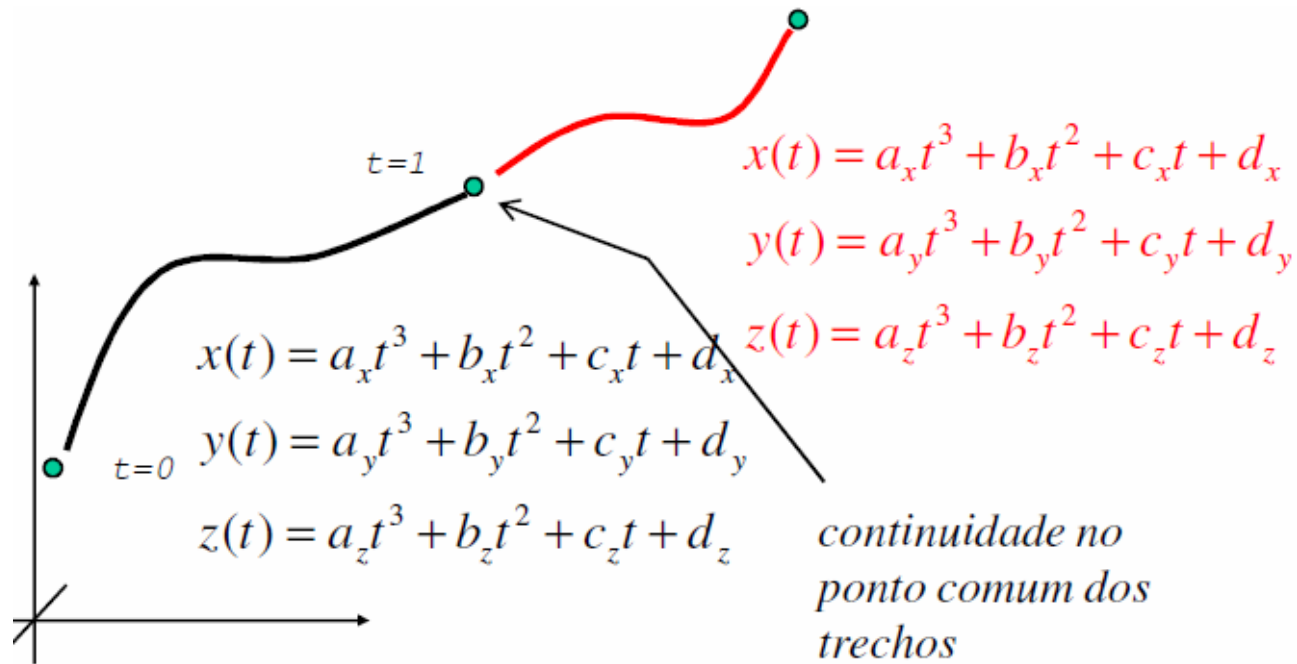
Direção das tangentes dos segmentos são iguais no ponto de junção



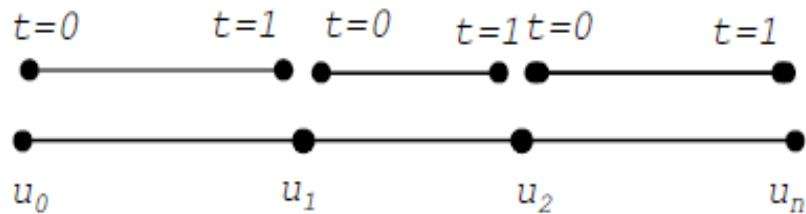
Continuidade Paramétrica C1

Direção e magnitude das tangentes dos segmentos são iguais no ponto de junção

Com continuidade paramétrica



Parametrização



$t \in [0,1]$ local

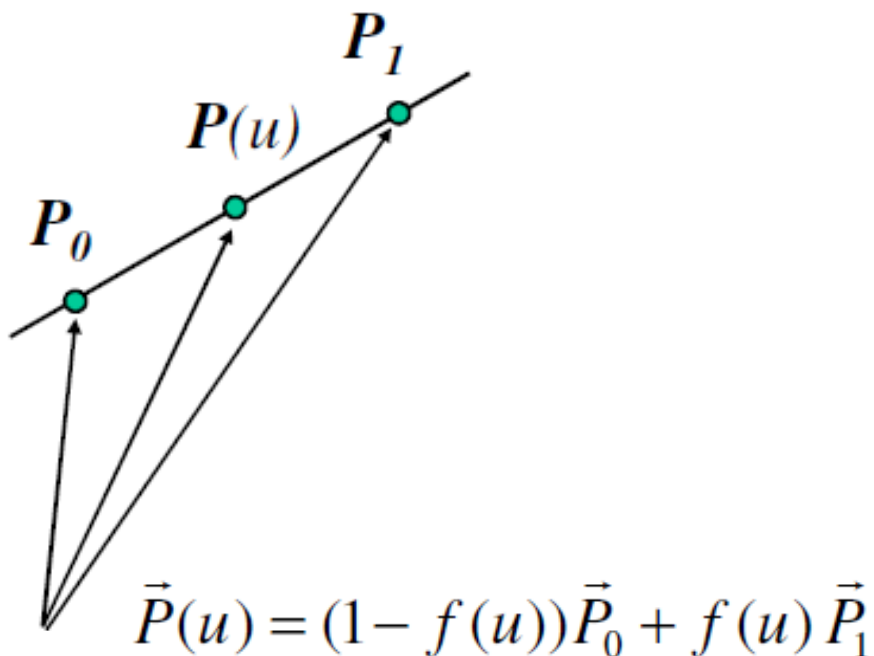
ou

$u \in [u_0, u_n]$ global

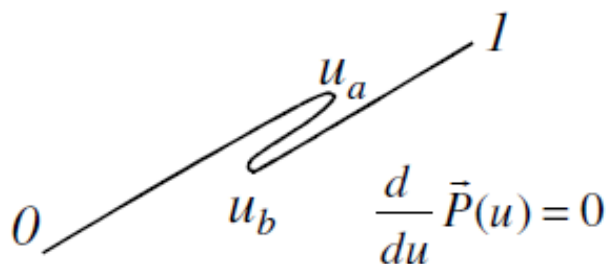
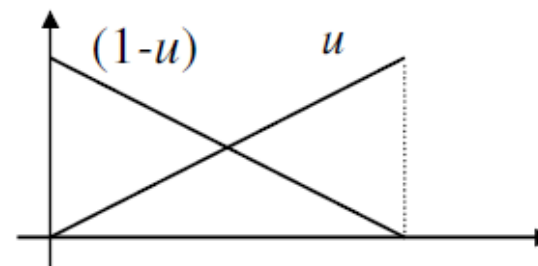
Requisitos para os parâmetros:

Parâmetro genérico: u

Parâmetro de comprimento: $s = s(u)$



$$\vec{P}(u) = (1-u)\vec{P}_0 + u\vec{P}_1$$



Com continuidade paramétrica
Se $u_2 > u_1 \Rightarrow s(u_2) > s(u_1)$

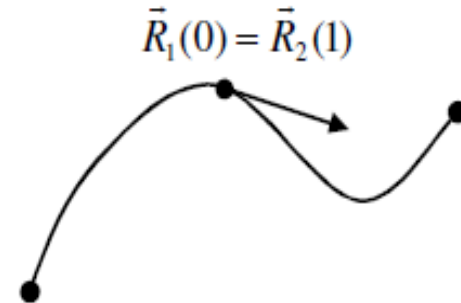
Continuidade geométrica x paramétrica



Descontínua



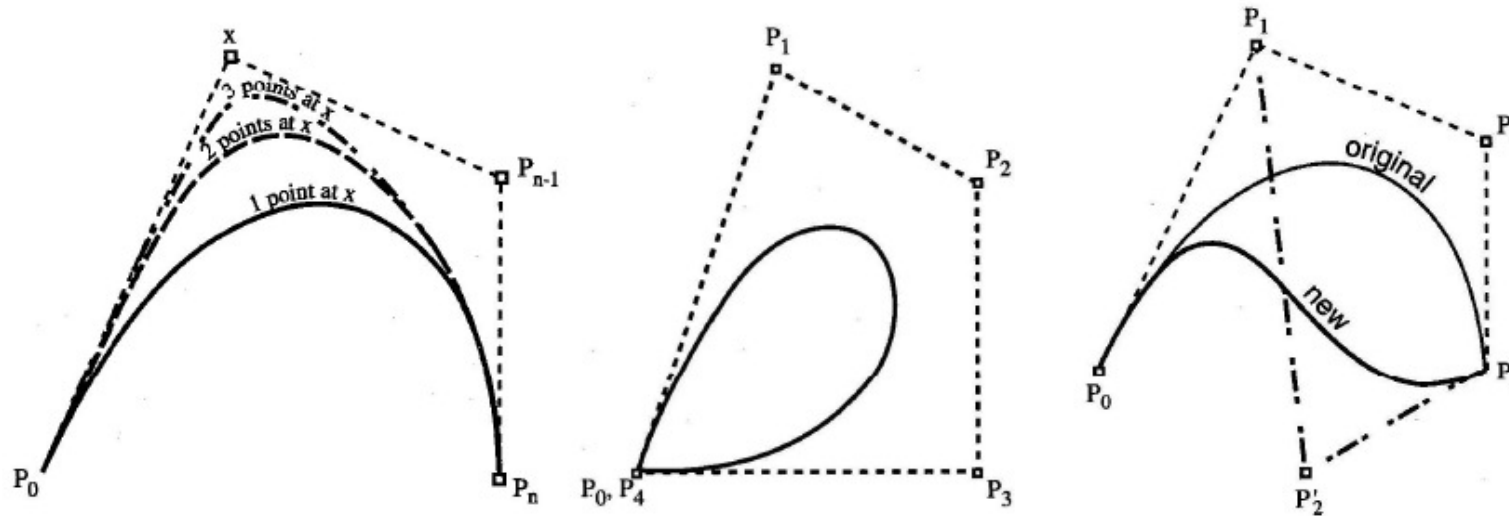
Contínua: C^0 e G^0



Contínua: C^1 e G^1

Curva de Bezier

- Desenvolvidas por Pierre Bezier para descrever o desenho de curvas e superfícies de forma livre
- Polígono definidor
- Primeiro e último ponto
- Vetor tangente



Curva polinomial desenvolvida em 1962 por Pierre Bézier.

Utilizada no projeto de automóveis (Renault).

Baseada no algoritmo de De Casteljaou em 1957.

Curva de aproximação.

Controle global.

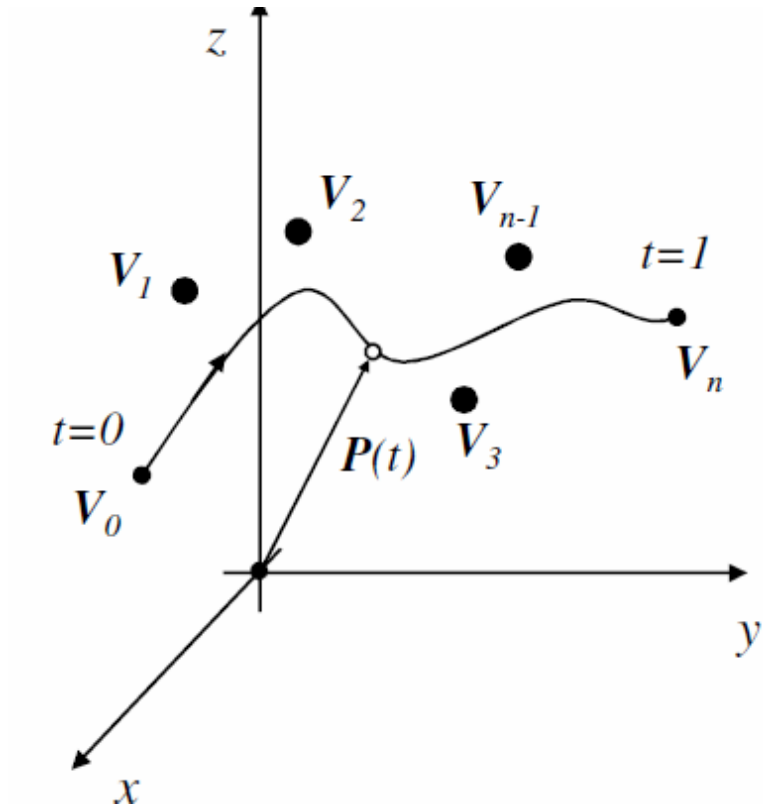


P. de Casteljaou, 1959 (Citroën)

P. de Bézier, 1962 (Renault) - UNISURF

Forest 1970: Polinômios de Bernstein

Forma geral:



$$\vec{P}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \vec{V}_i$$

onde:

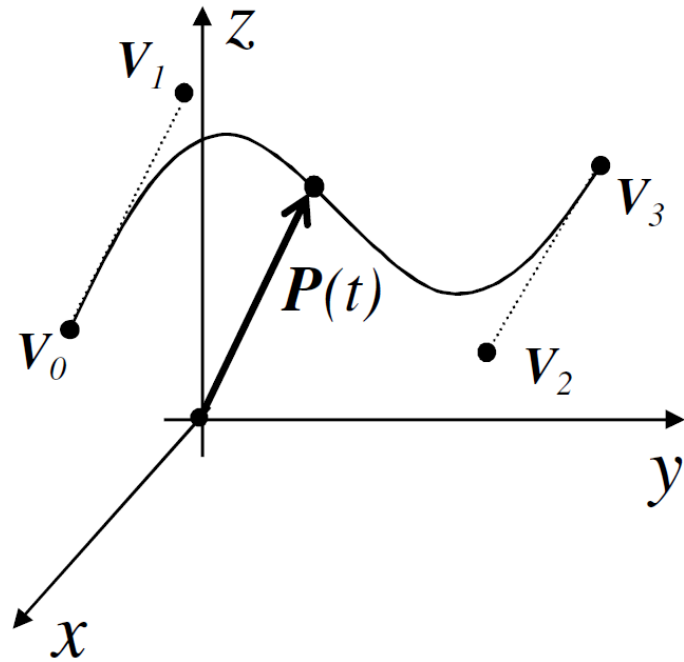
$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

pol. Bernstein

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

coef. binomial

Bezier cúbica: $\vec{P}(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \vec{V}_i$



$$B_{0,3}(t) = \binom{3}{0} (1-t)^{3-0} t^0 = (1-t)^3$$

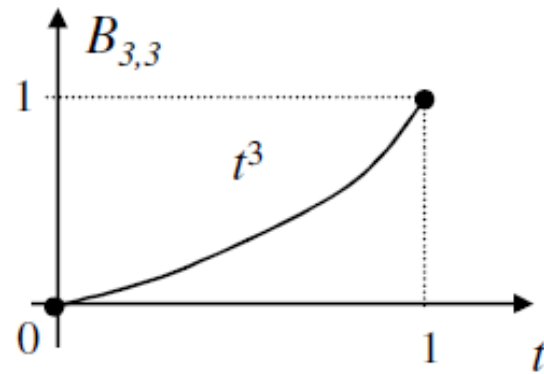
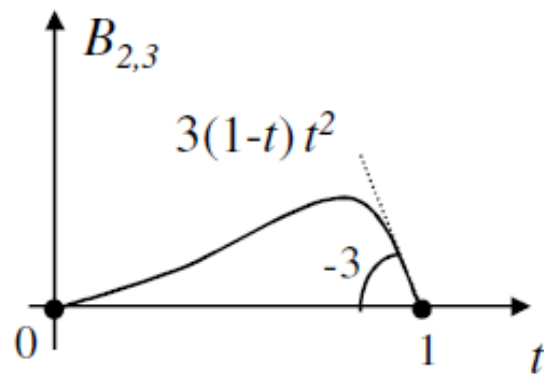
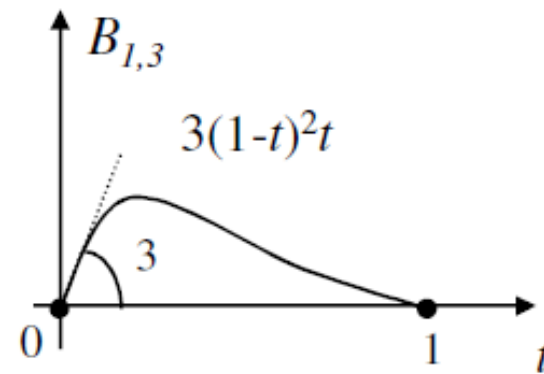
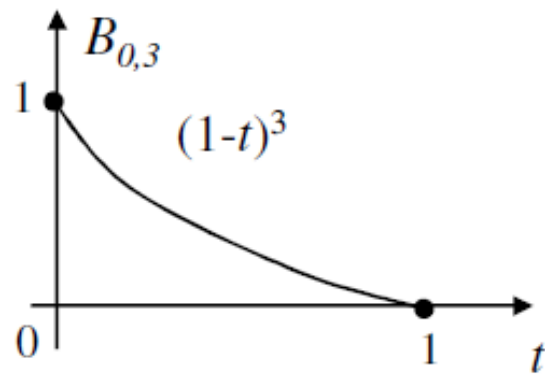
$$B_{1,3}(t) = \binom{3}{1} (1-t)^{3-1} t^1 = 3(1-t)^2 t$$

$$B_{2,3}(t) = \binom{3}{2} (1-t)^{3-2} t^2 = 3(1-t) t^2$$

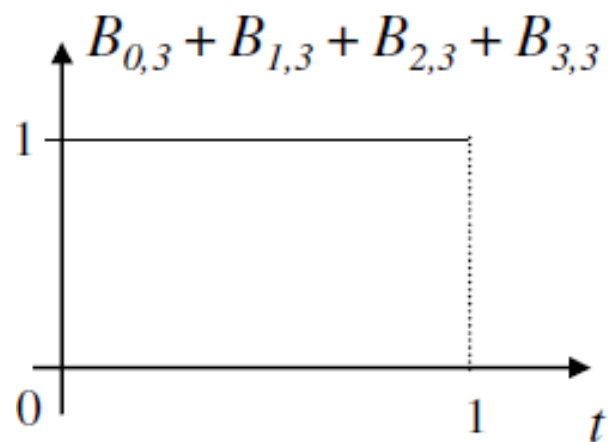
$$B_{3,3}(t) = \binom{3}{3} (1-t)^{3-3} t^3 = t^3$$

$$\vec{P}(t) = (1-t)^3 \vec{V}_0 + 3(1-t)^2 t \vec{V}_1 + 3(1-t) t^2 \vec{V}_2 + t^3 \vec{V}_3$$

Polinômios cúbicos de **Bernstein**

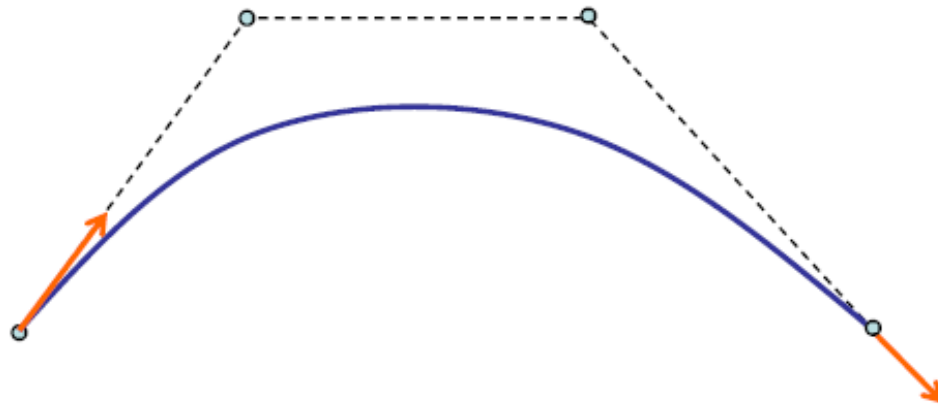


A soma dos
Polinômios Cúbicos de Bernstein
resulta:



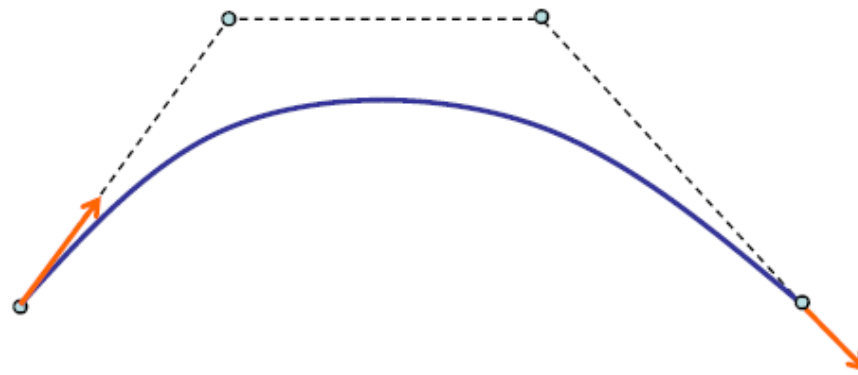
Propriedades de Curva de Bézier

- Continuidade infinita (todas as derivadas são contínuas)
- O grau da curva (do polinômio) é dado pelo número de pontos do polígono de controle menos 1
- A curva de Bézier está contida no fecho convexo do polígono de controle
- A curva interpola o primeiro e último ponto do polígono de controle



Cont.

- As tangentes à curva em \mathbf{p}_0 e \mathbf{p}_n têm a direção dos segmentos de reta $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_{n-1}\mathbf{p}_n$, respectivamente
 - Para cúbicas, as derivadas são $3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$ e $3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$
- Transformar os pontos de controle (transf. afim) e desenhar a curva é equivalente a desenhar a curva transformada



Demonstrando essas propriedades para uma Bezier cúbica:

$$\vec{P}(t) = (1-t)^3 \vec{V}_0 + 3(1-t)^2 t \vec{V}_1 + 3(1-t)t^2 \vec{V}_2 + t^3 \vec{V}_3$$

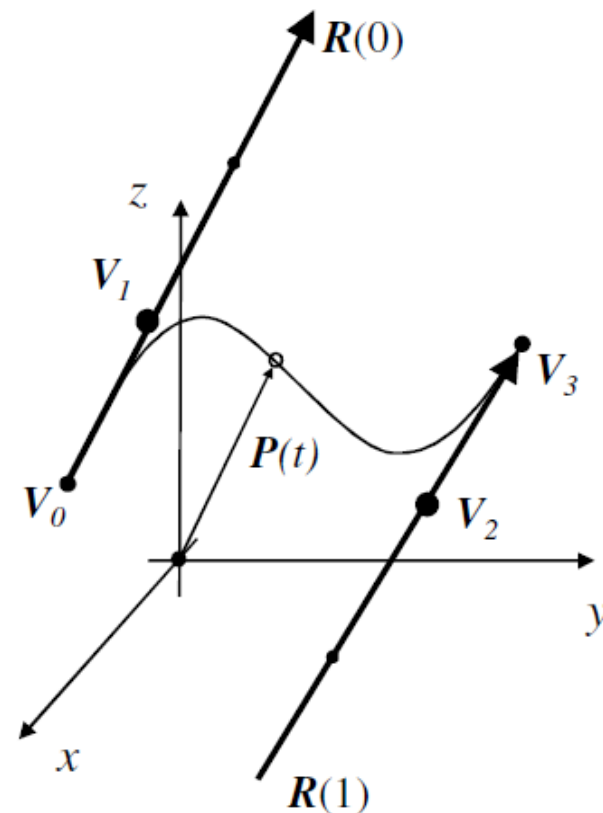
$$\frac{d}{dt} \vec{P}(t) = -3(1-t)^2 \vec{V}_0 + [-6(1-t)t + 3(1-t)^2] \vec{V}_1 + [-3t^2 + 6(1-t)t] \vec{V}_2 + t^3 \vec{V}_3$$

$$\vec{P}(0) = \vec{V}_0$$

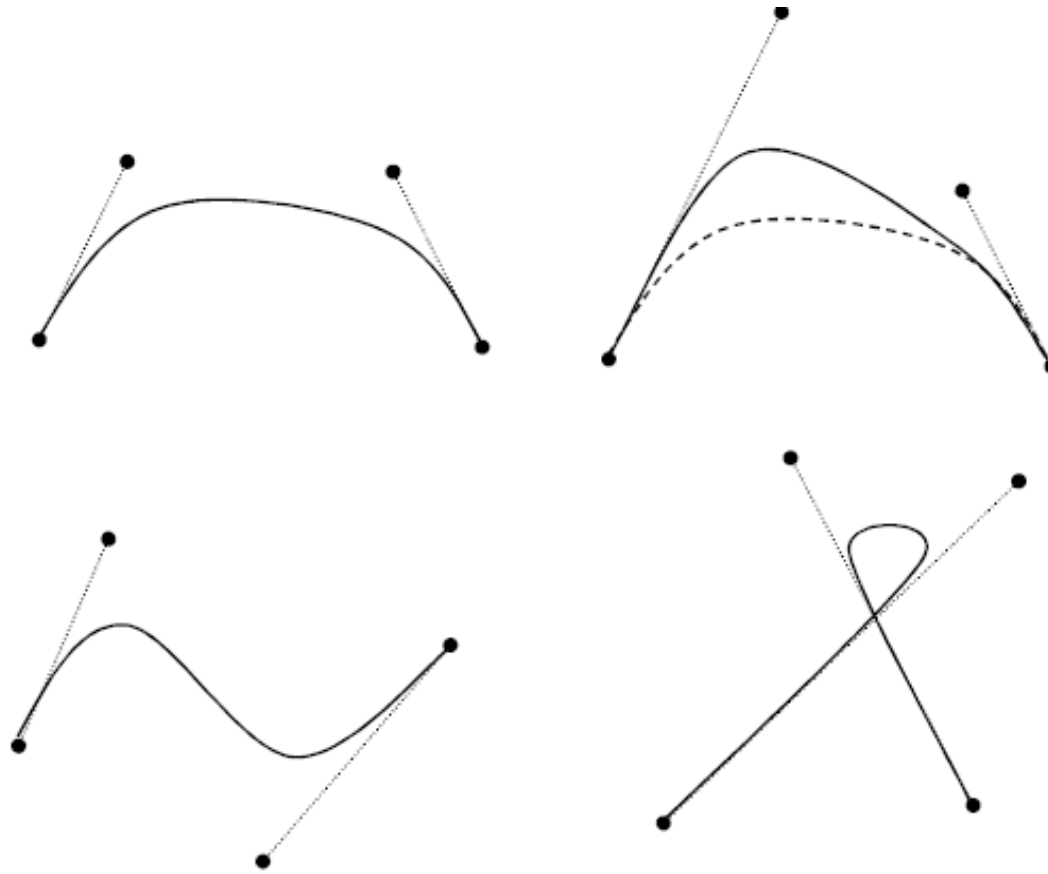
$$\vec{P}(1) = \vec{V}_3$$

$$\frac{d}{dt} \vec{P}(0) = -3 \vec{V}_0 + 3 \vec{V}_1$$

$$\frac{d}{dt} \vec{P}(1) = -3 \vec{V}_2 + 3 \vec{V}_3$$



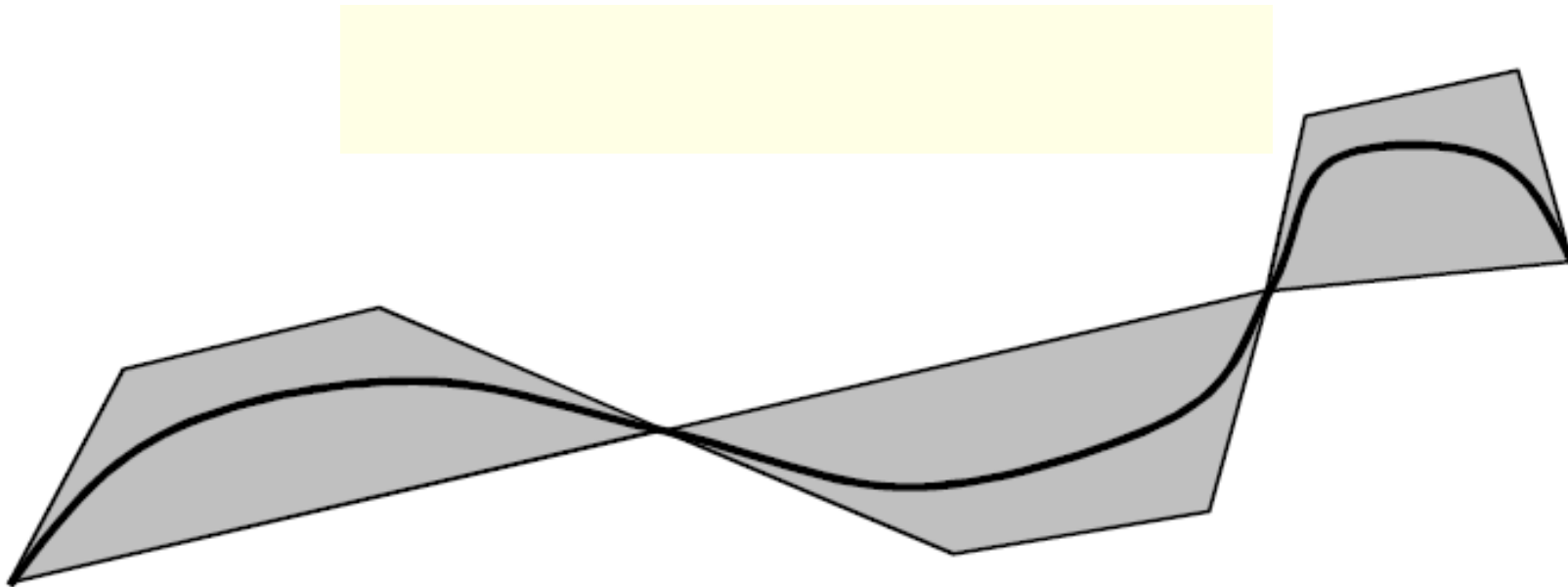
A ordem e posição dos pontos controla a curva!



Fecho convexo

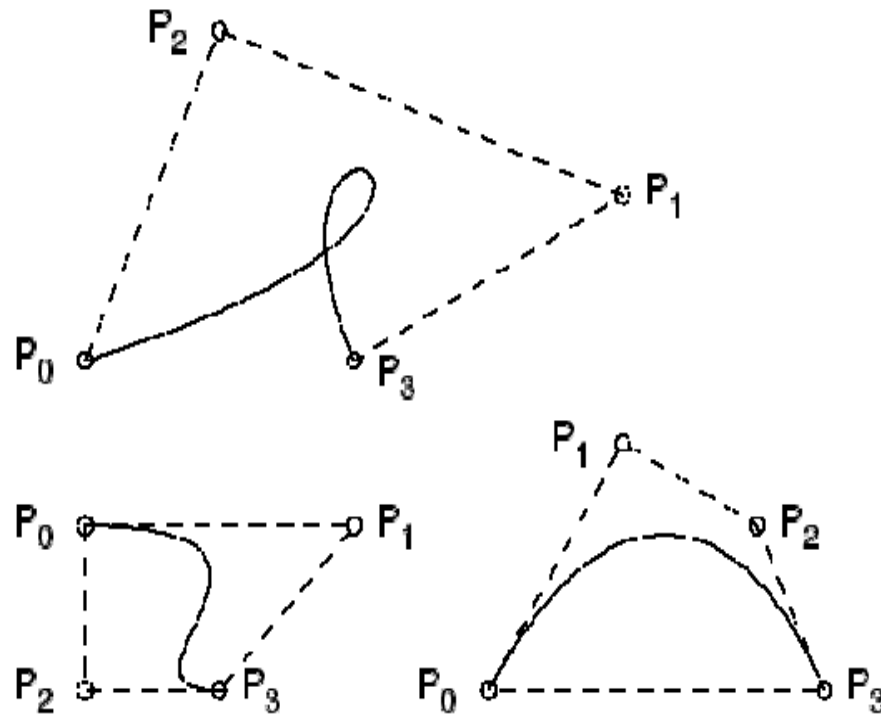
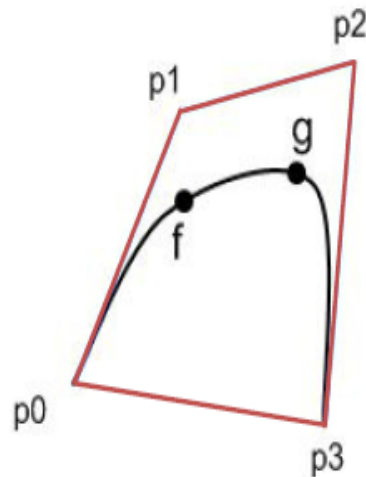
$$\vec{P}(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \vec{V}_i \quad \text{com} \quad \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$$

- Convex hull

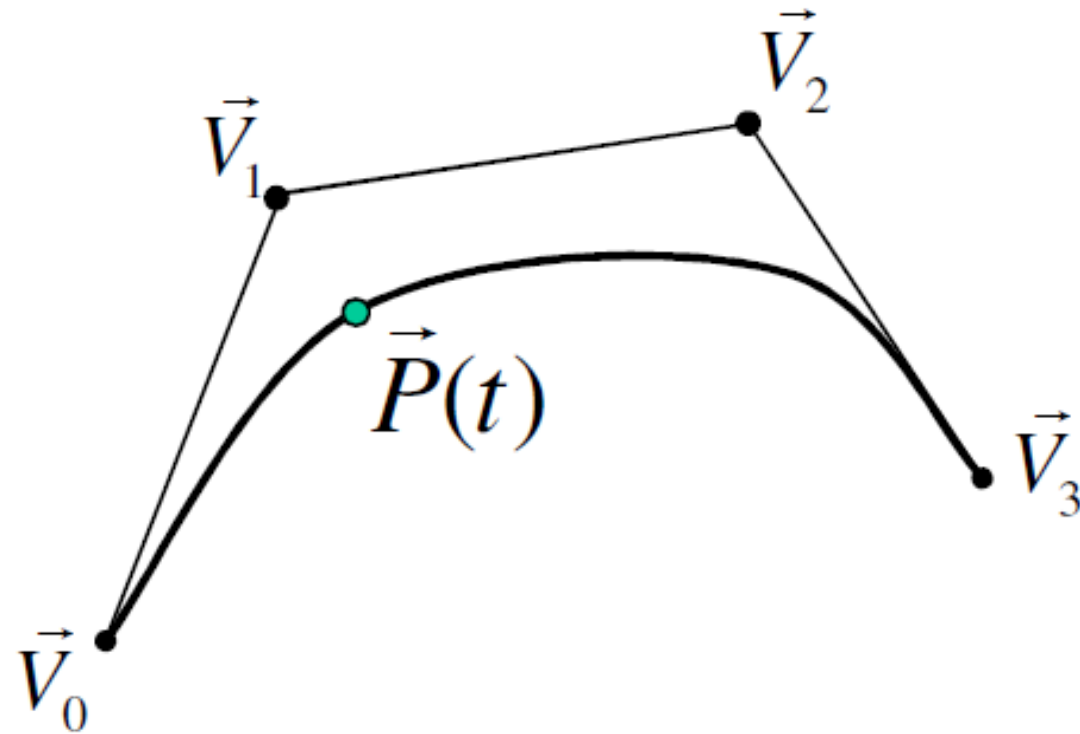


Propriedade: *Convex Hull*

- Uma curva de Bézier está completamente dentro do maior polígono convexo, formado pelos pontos de controle.



Representação
matricial :



$$\vec{P}(t) = (1-t)^3 \vec{V}_0 + 3(1-t)^2 t \vec{V}_1 + 3(1-t)t^2 \vec{V}_2 + t^3 \vec{V}_3$$

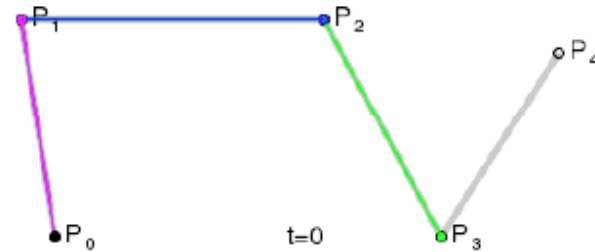
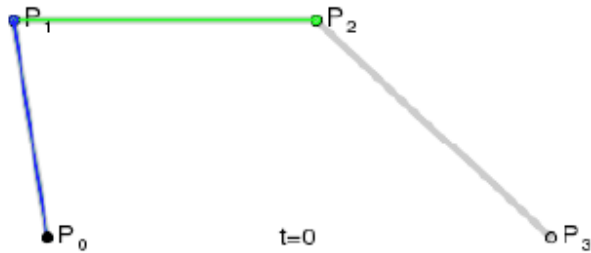
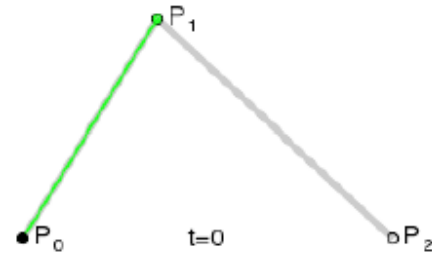
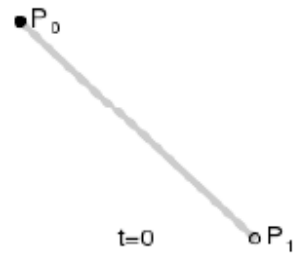
$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{0x} & V_{0y} & V_{0z} \\ V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \\ V_{3x} & V_{3y} & V_{3z} \end{bmatrix}$$

■ Matriz de Geometria (**G**) e Matriz Base (**M**)

$$Q(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)] = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix}$$

$Q(t) = TMG$

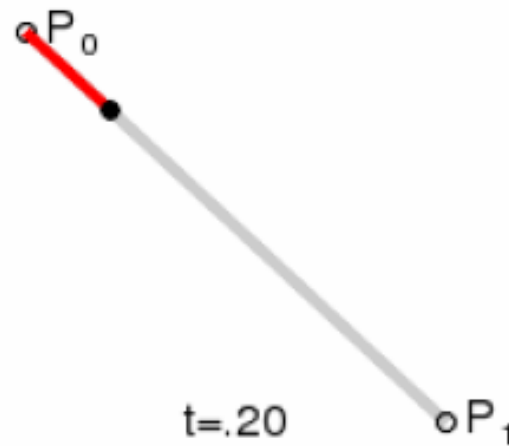
Outras formas de Bezier



Curvas de Bézier: 1. linear; 2. quadrática; 3. cúbica; 4. quártica.

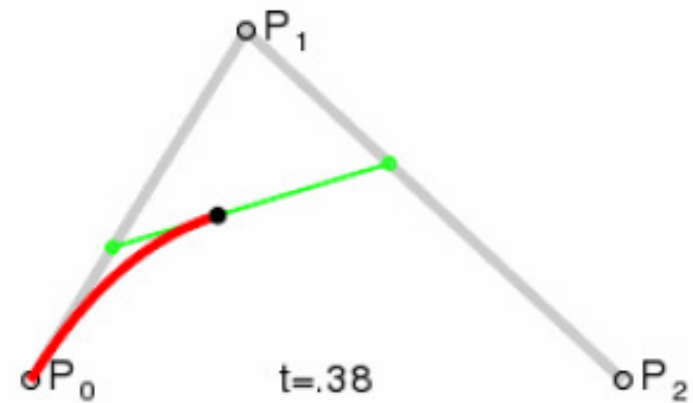
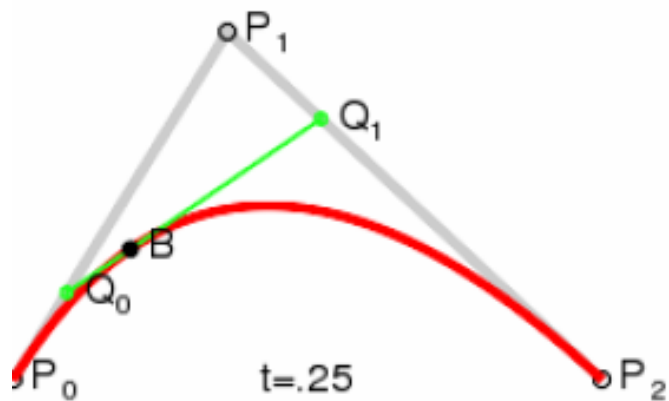
Outras formas de Bezier

$$P(t) = (1-t) \cdot P_0 + t \cdot P_1$$

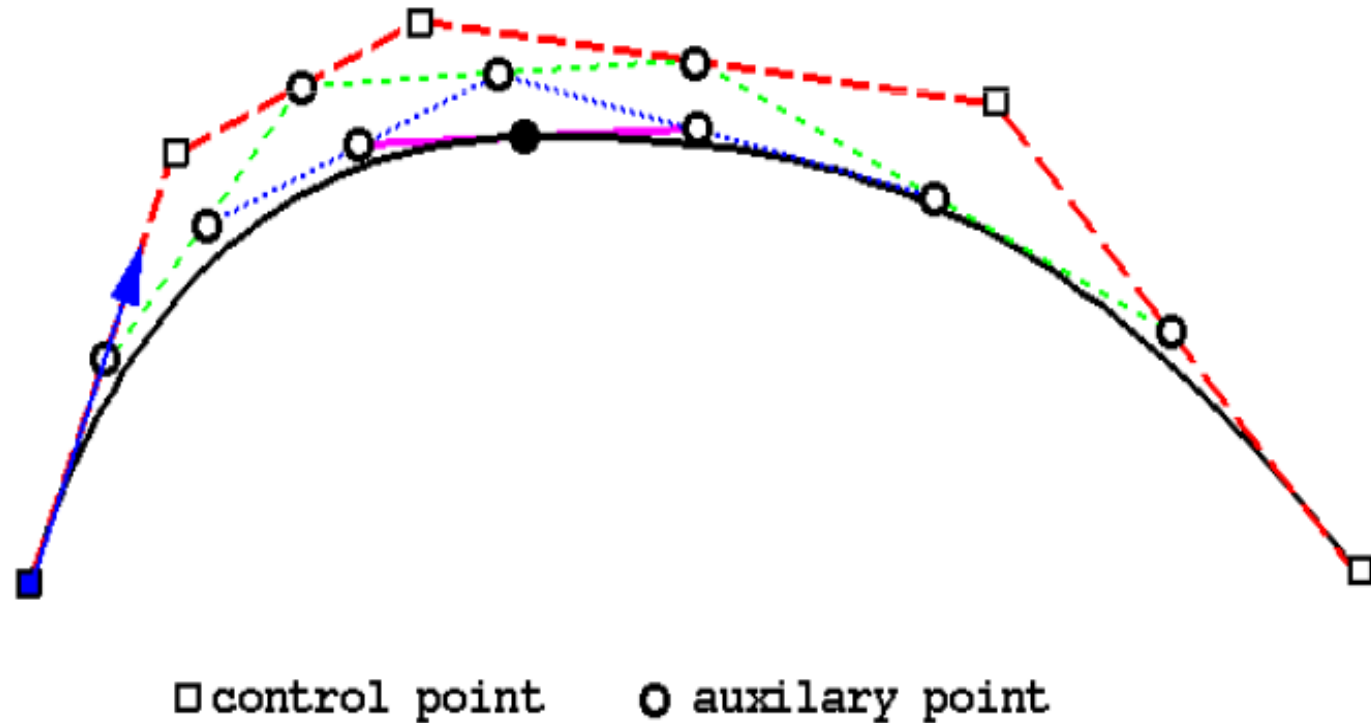


Outras formas de Bezier

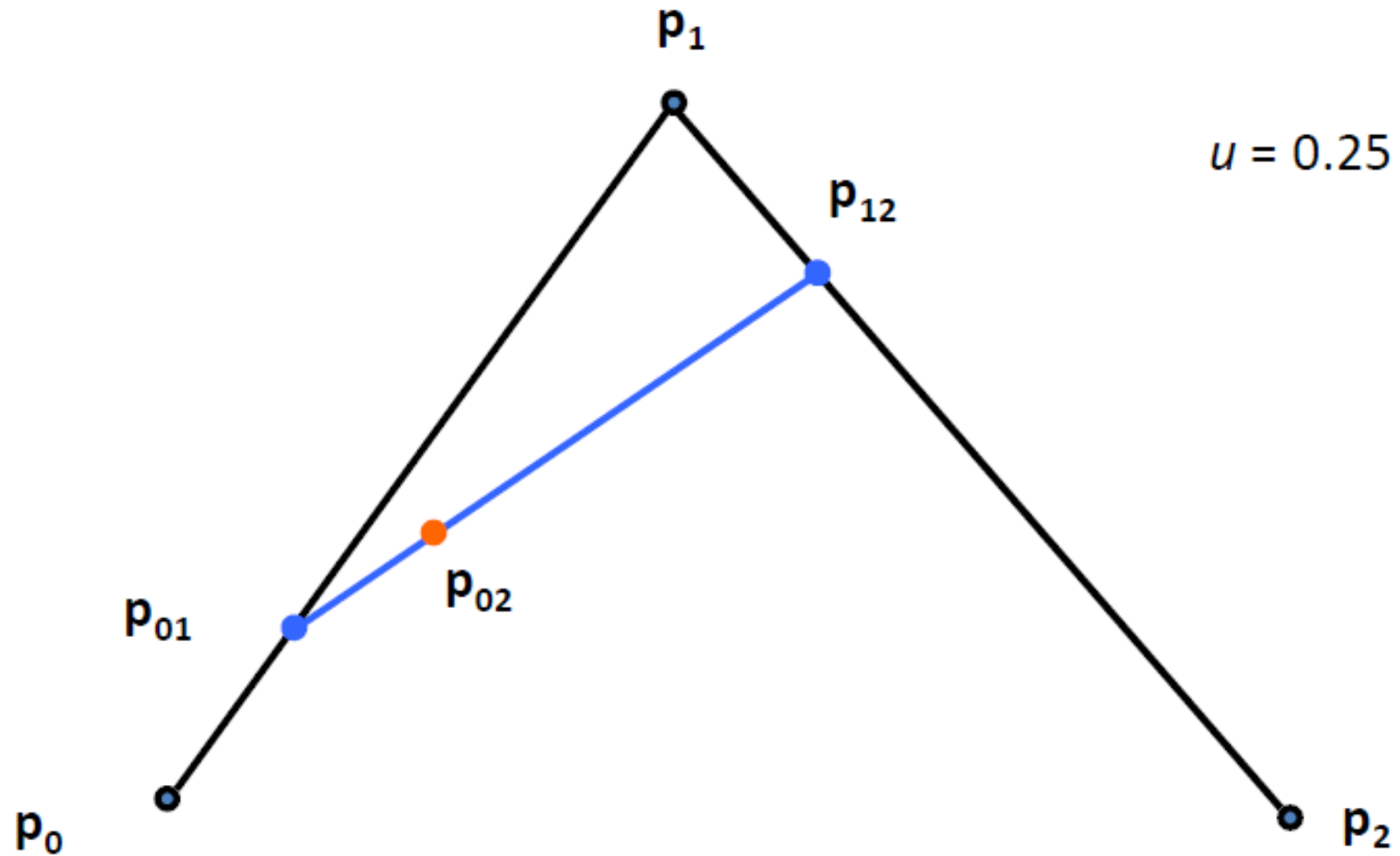
$$P(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t) P_1 + t^2 P_2$$

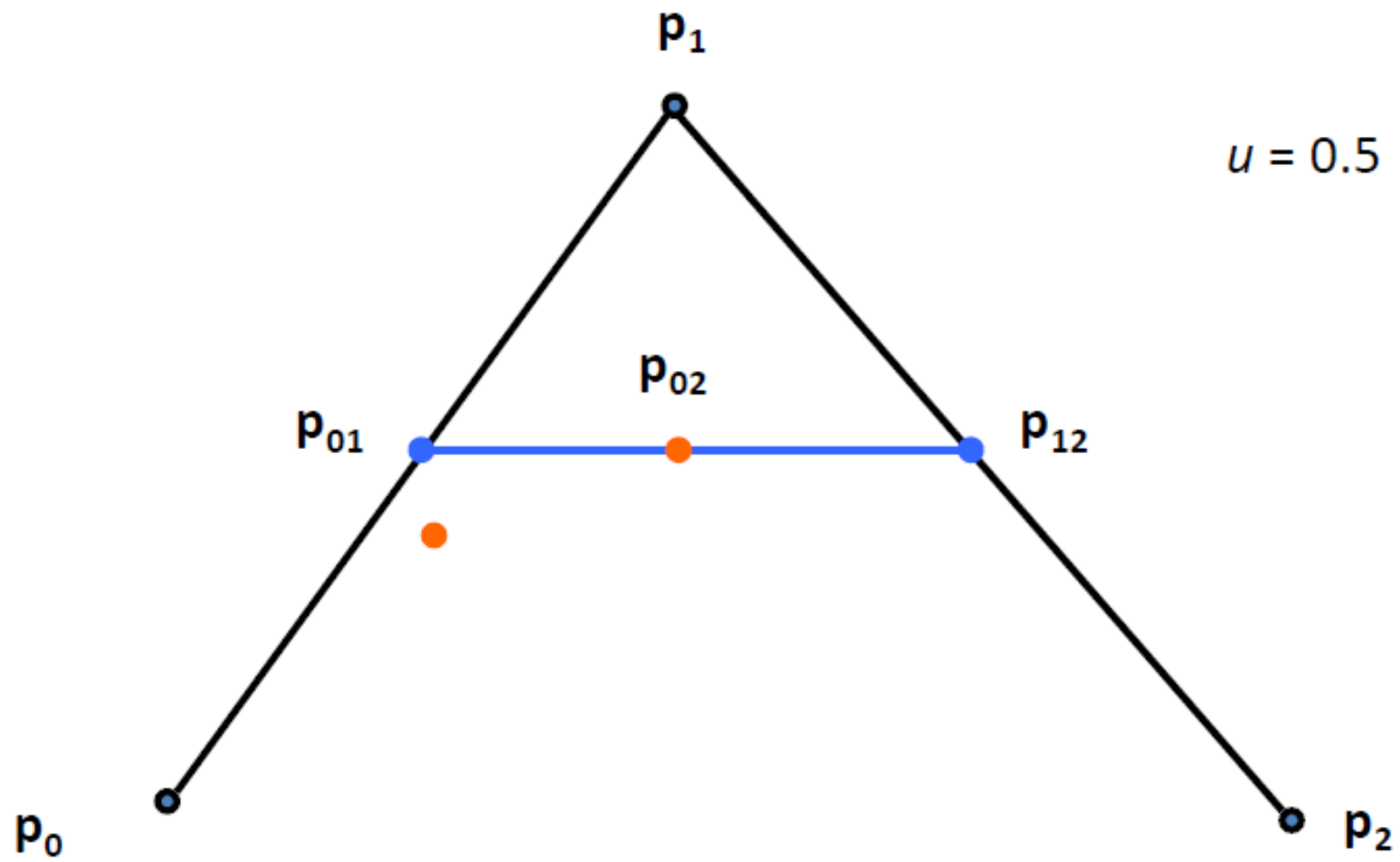


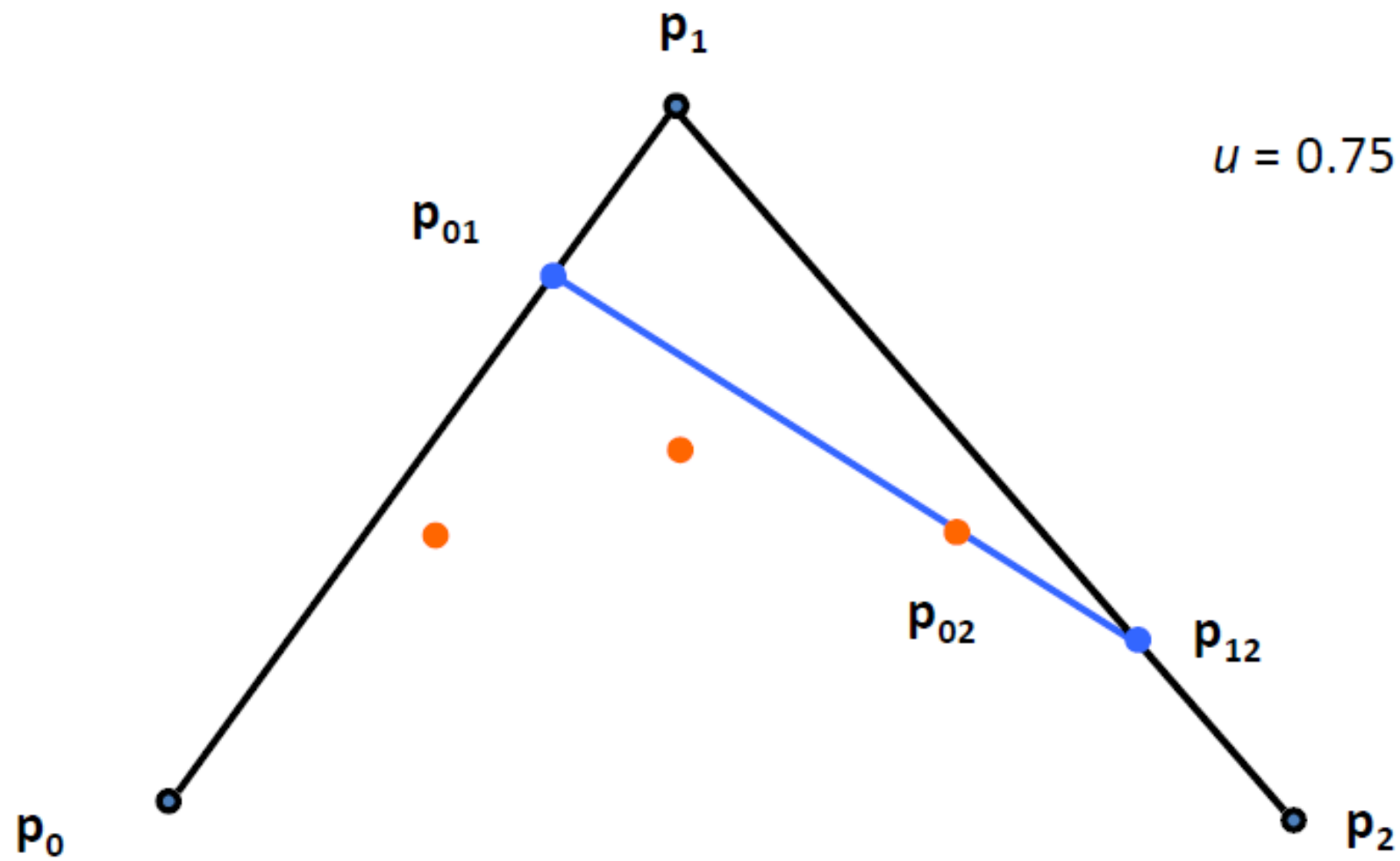
De Casteljau: algoritmo geométrico para construção de curvas Bézier.

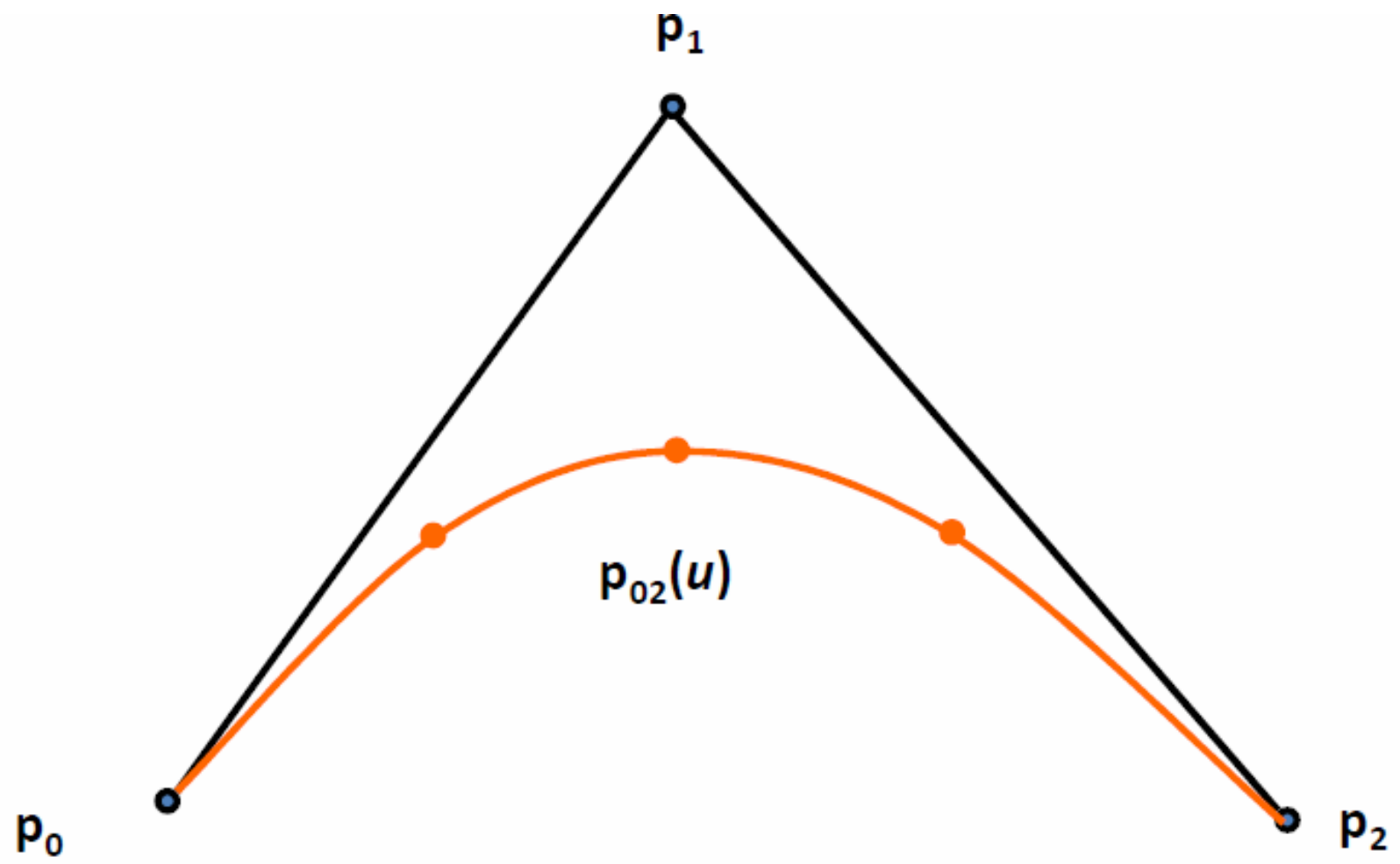


Algoritmo geométrico



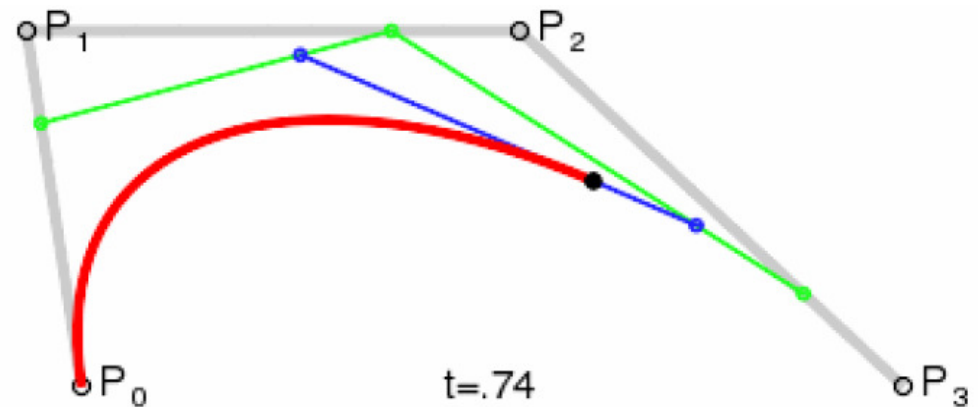
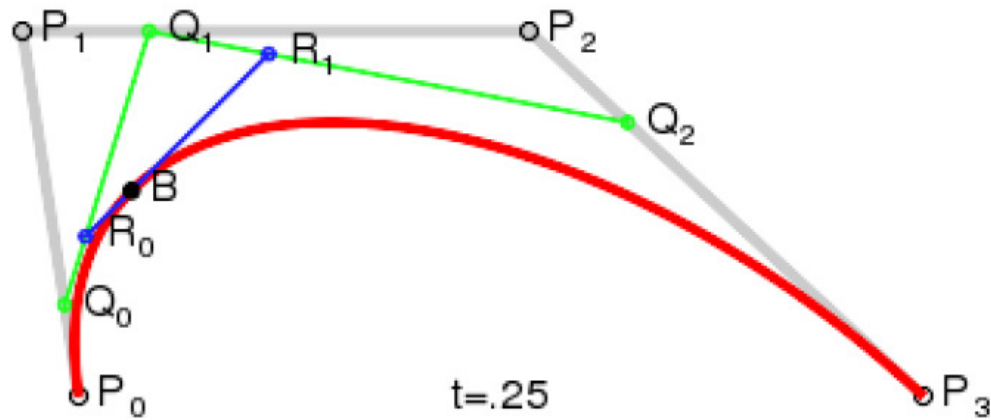






Outras formas de Bezier

$$P(t) = (1 - t)^3 \mathbf{P}_0 + 3 t (1 - t)^2 \mathbf{P}_1 + 3 t^2 (1 - t) \mathbf{P}_2 + t^3 \mathbf{P}_3$$

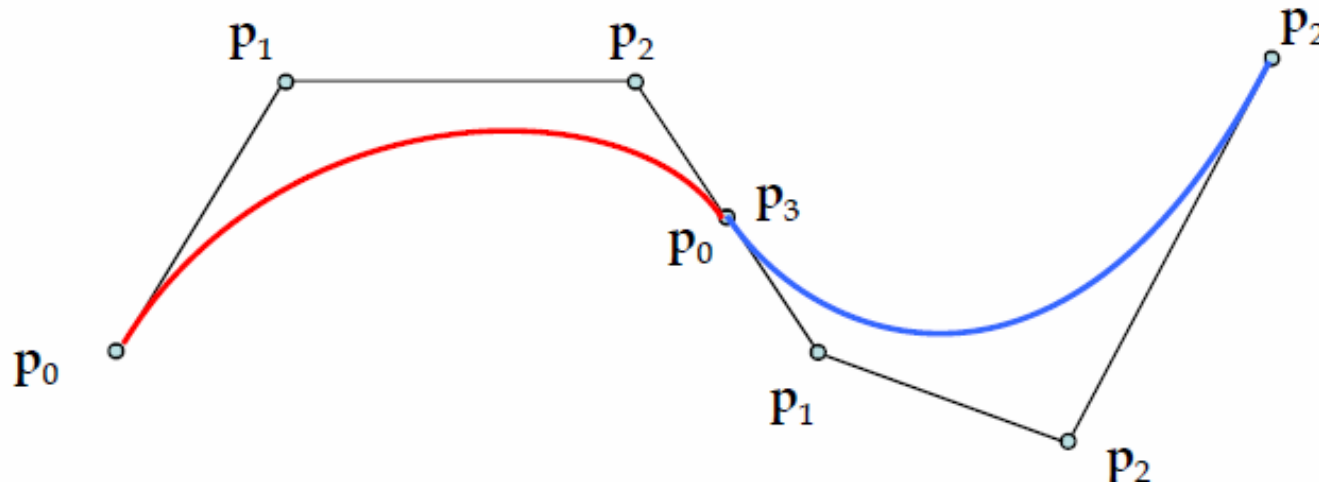


Outras formas de Bezier Cont.

- Curvas Bézier com k pontos de controle são de grau $k - 1$
- Curvas de grau alto são difíceis de desenhar
 - Complexas
 - Sujeitas a erros de precisão
- Normalmente, queremos que pontos de controle tenham efeito *local*
 - Em curvas Bézier, todos os pontos de controle têm efeito *global*
- Solução:
 - Emendar curvas polinomiais de grau baixo
 - Relaxar condições de continuidade

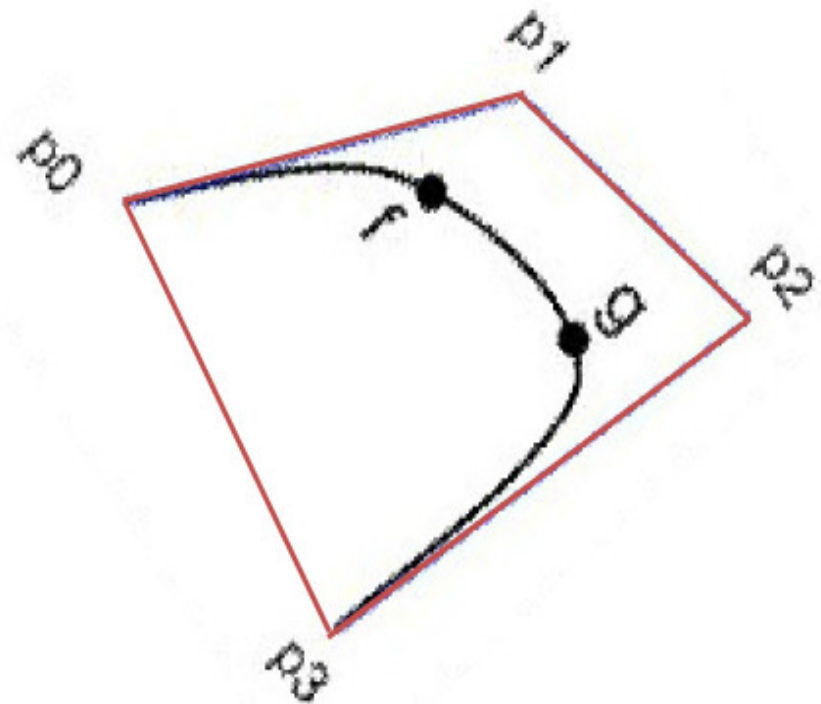
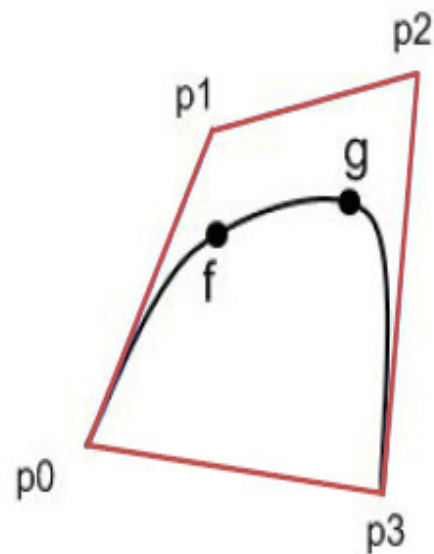
Emendando Curvas Bézier

- Continuidade C^0 : Último ponto da primeira = primeiro ponto da segunda
- Continuidade C^1 : C^0 e segmento $\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$ da primeira com mesma direção e comprimento que o segmento $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ da segunda
- Continuidade C^2 : C^1 e + restrições sobre pontos \mathbf{p}_1 da primeira e \mathbf{p}_2 da segunda



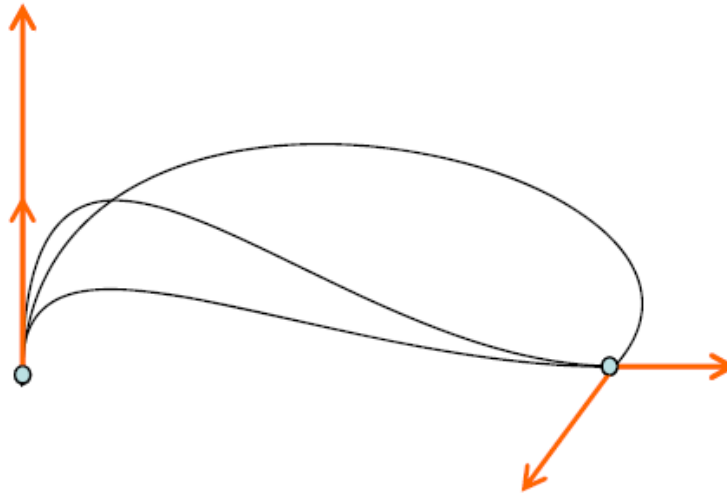
Transformações

- Executar as transformações (S,R,T) na curva é equivalente a realizar as transformações nos pontos de controle.



Curvas de Hermite

- Ao invés de modelar a curva a partir de um polígono de controle (Bézier), especifica-se pontos de controle e vetores tangentes nesses pontos
- Vantagem: é fácil emendar várias curvas bastando especificar tangentes iguais nos pontos de emenda
- Exemplos (cúbicas):



- A curva de Hermite é determinada por restrições no primeiro e último pontos
- O usuário especifica o primeiro (P_1) e o último pontos (P_4) bem como os vetores tangentes a P_1 e P_4 , chamados R_1 e R_4

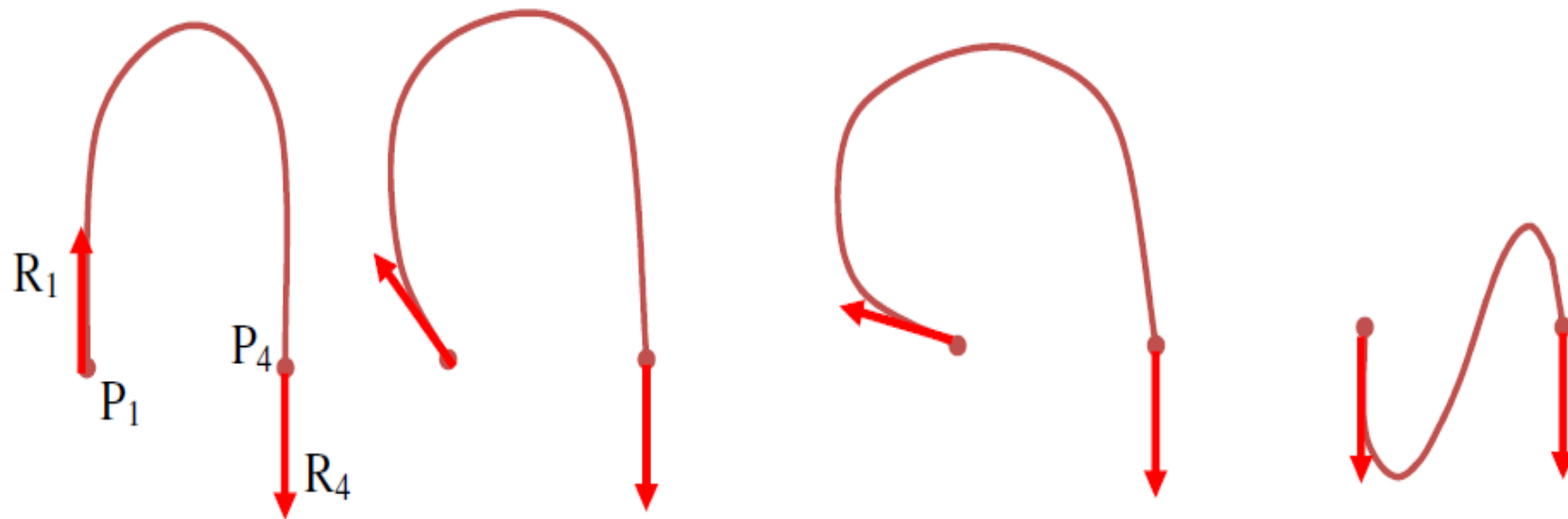
Curvas de Hermite

Definida a partir de restrições no ponto inicial e no ponto final.

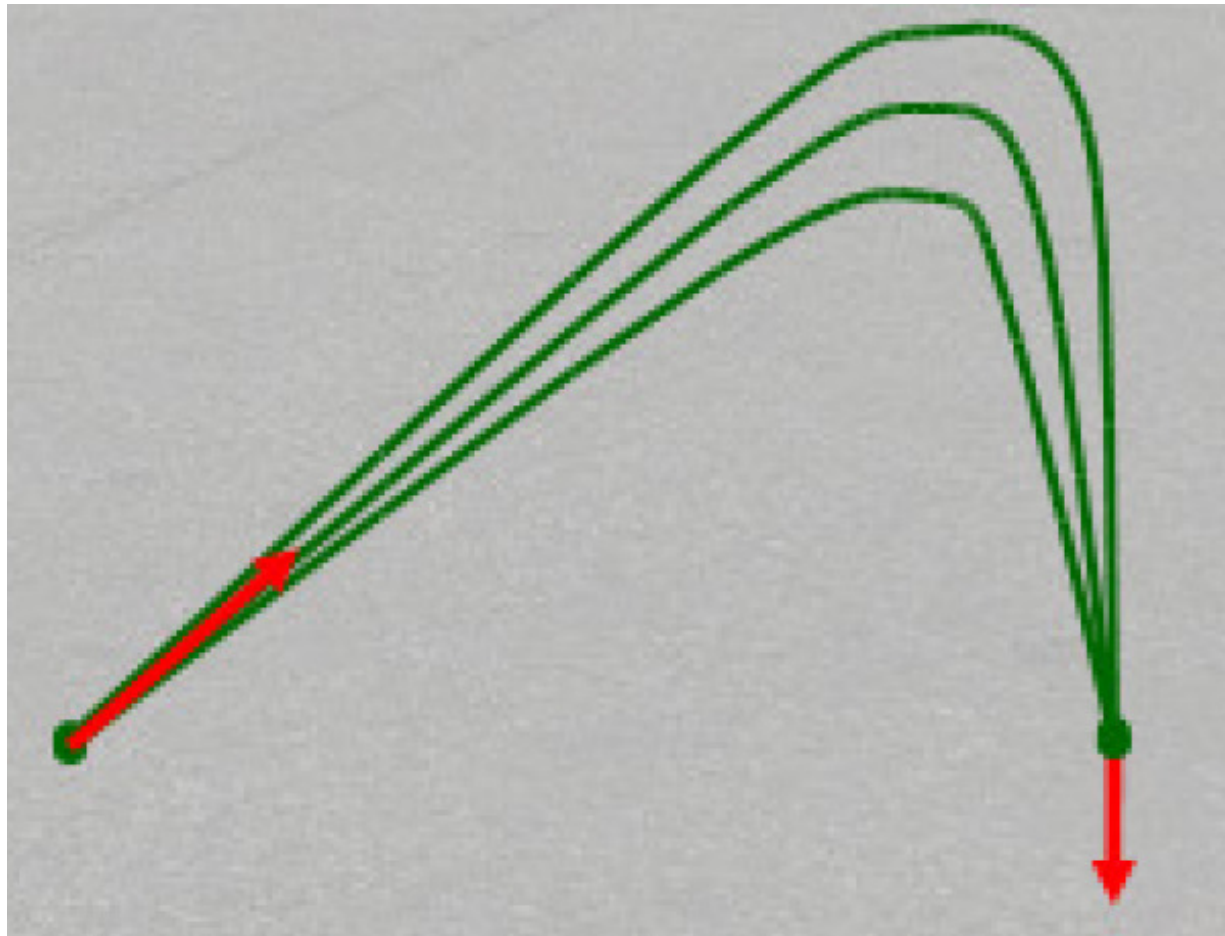
- Os pontos propriamente ditos: P_0 e P_1
- Vetores tangentes nestes pontos: V_0 e V_1



Mesmos pontos iniciais e finais,
apenas alterando a direção da
tangente



Mesmos pontos iniciais e finais,
apenas alterando a intensidade da
tangente



Vantagens

- Bem fácil de implementar 😊
- Adequada para aplicações onde seja útil definir a curva em função dos vetores tangentes
- Passa nos pontos de controle (interpolação)

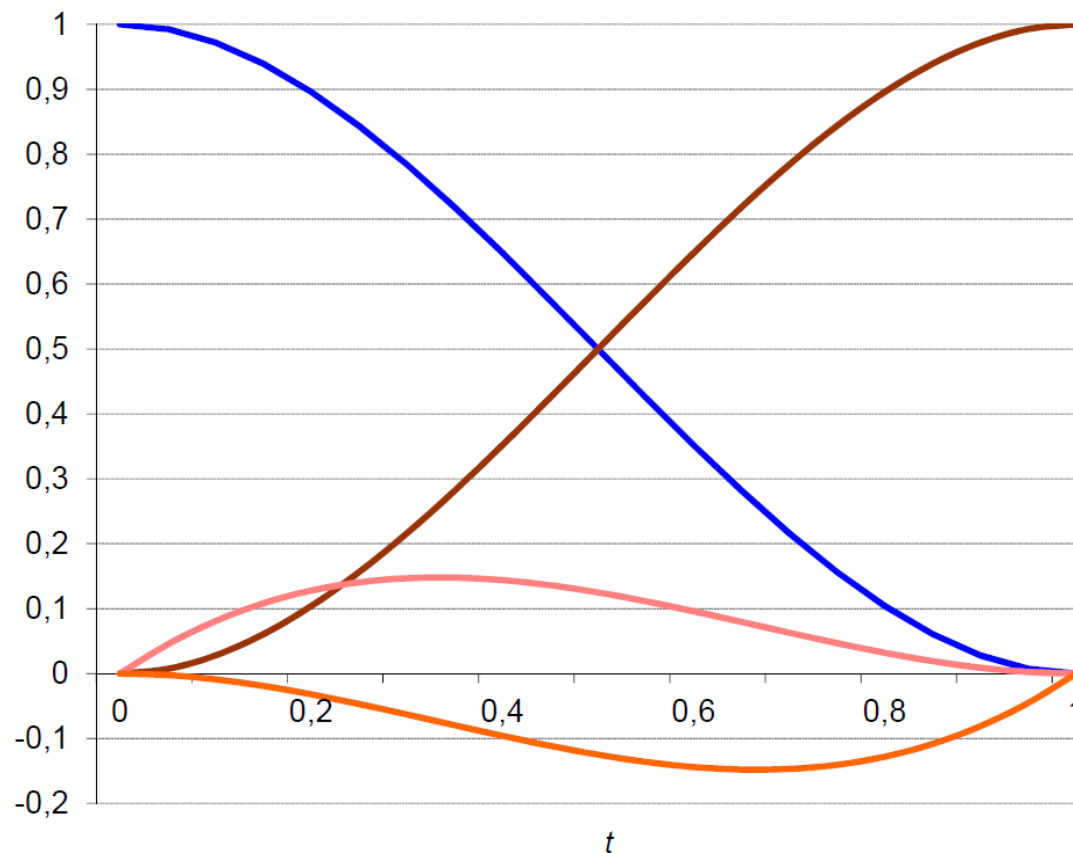
Desvantagens

- Não garante, de forma automática, a continuidade entre os segmentos de curva
 - É necessário os vetores tangentes terem a mesma direção e sentido
- Não permite controle local
 - Alteração de um ponto de controle altera toda a curva

Forma matricial

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P'(0) \\ P'(1) \end{bmatrix}$$

Funções de mistura



Coeficientes Geométricos:

$p(0)$, $p(1)$, $p_u(0)$, $p_u(1)$:

Funções de Mistura:

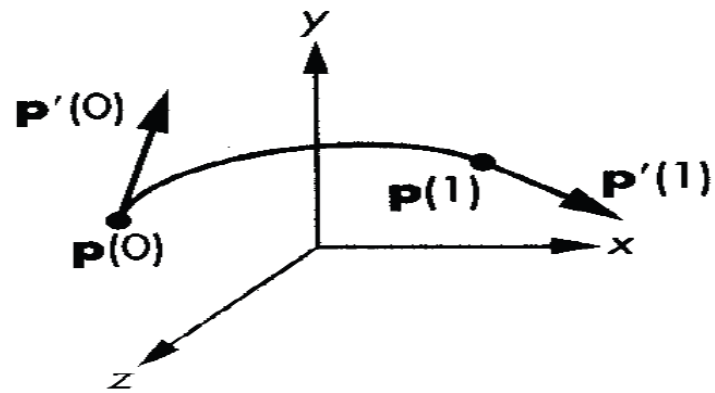
$$F1(u) = (2u^3 - 3u^2 + 1)$$

$$F2(u) = (-2u^3 + 3u^2)$$

$$F3(u) = (u^3 - 2u^2 + u)$$

$$F4(u) = (u^3 - u^2)$$

$$p(u) = F1.p(0) + F2.p(1) + F3.p'(0) + F4.p'(1)$$

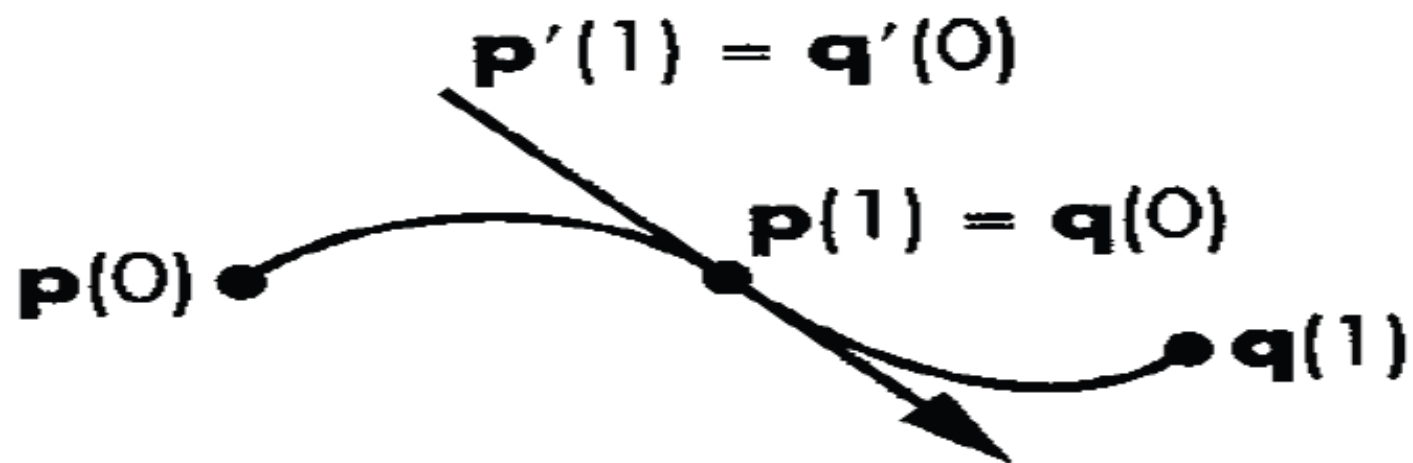


Definition of the
Hermite cubic.

$$p(u) = u^T c = u^T M_H p$$

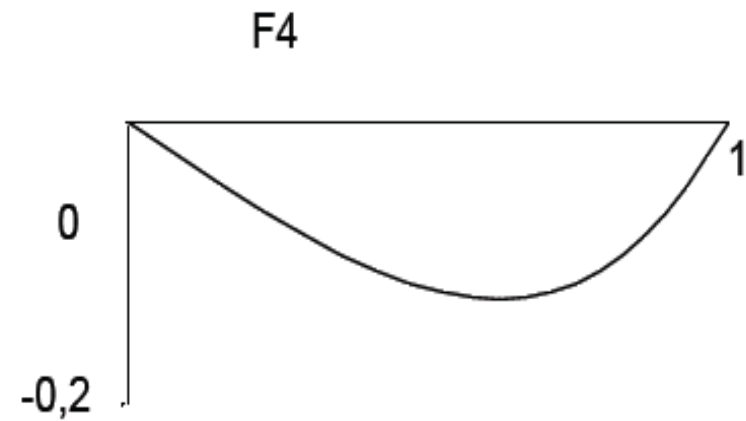
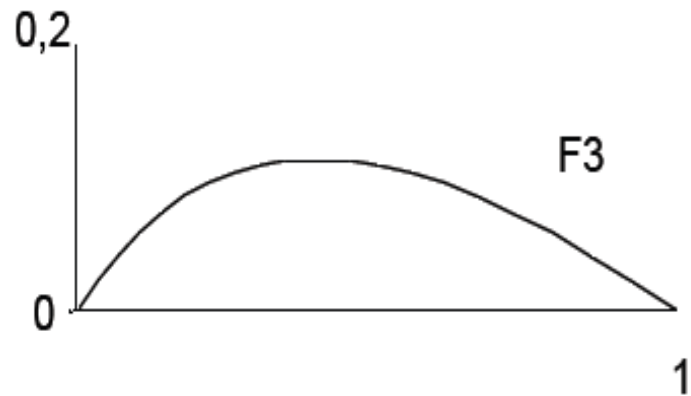
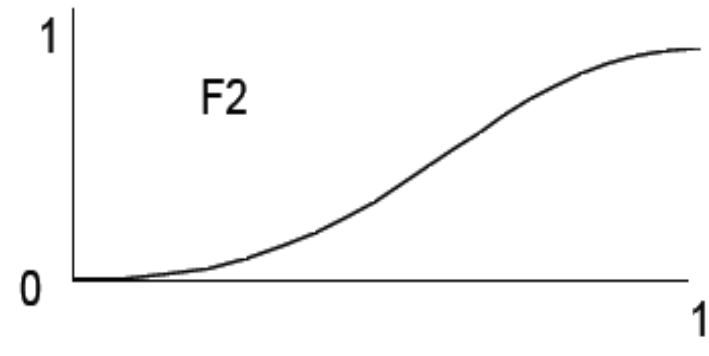
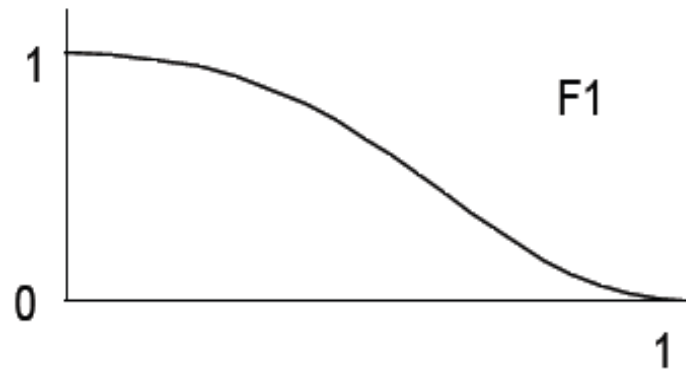
$$M_H = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

portanto $c = M p$



Hermite form at
join point.

Funções de mistura de Hermite



$$Q_H(t) = TM_H G_H$$

G_H é

$$G_H = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix}$$

G_{Hx} é a componente x de G_H :

$$G_{Hx} = \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{4x} \\ R_{1x} \\ R_{4x} \end{bmatrix}$$

Curvas Splines

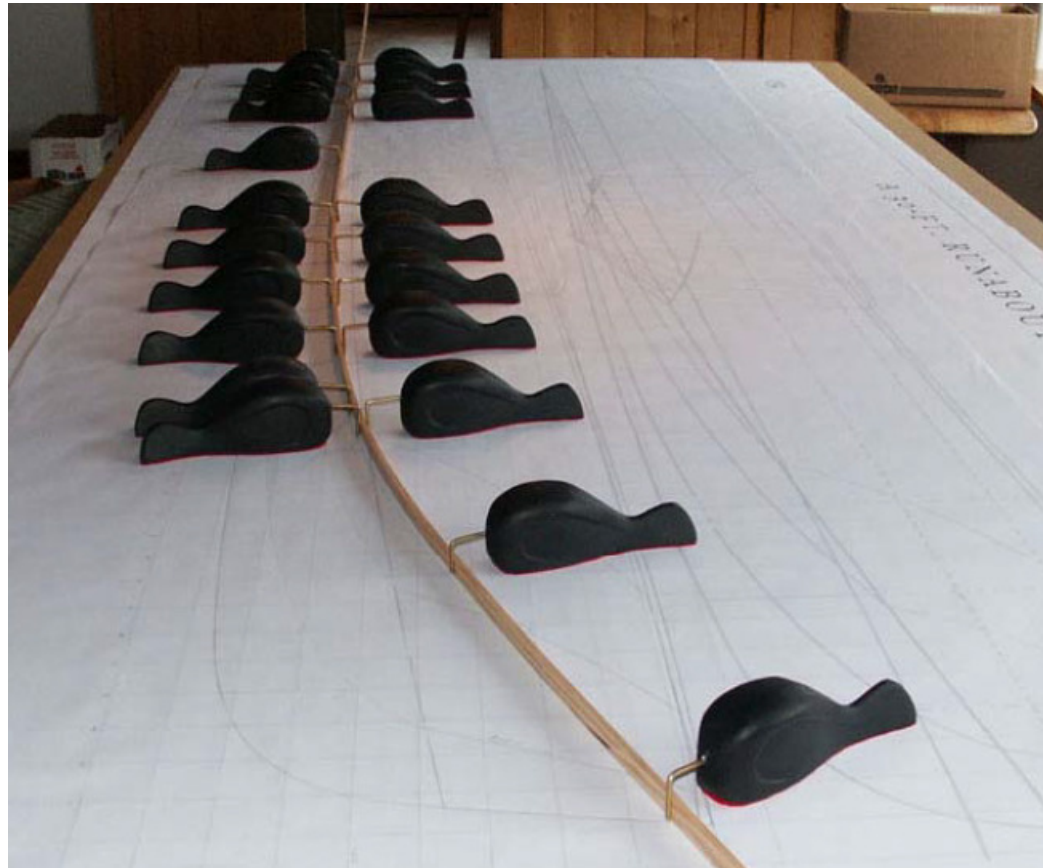
Splines

- A base de Bézier não é própria para a modelagem de curvas longas
 - Bézier única: suporte não local
 - Trechos emendados: restrições não são naturais
- Base alternativa: B-Splines
 - Nome vem de um instrumento usado por desenhistas
 - Modelagem por polígonos de controle sem restrições adicionais
 - Suporte local
 - Alteração de um vértice afeta curva apenas na vizinhança
 - Existem muitos tipos de Splines
 - Se os nós estão equidistantemente distribuídos a spline é **uniforme**, caso contrário é **não-uniforme**.
 - Uma B-spline uniforme de grau d tem continuidade C^{d-1}

Spline é uma curva polinomial definida por partes

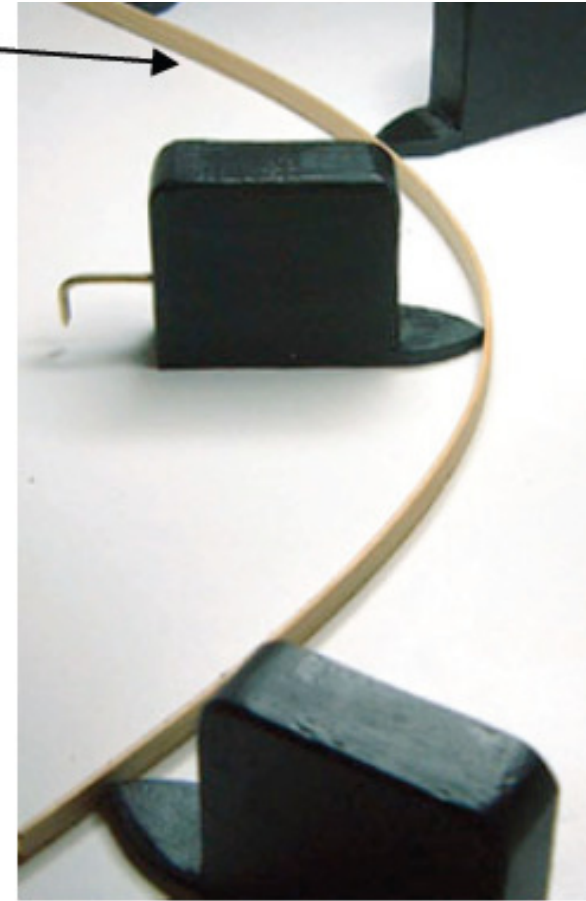
- Com maior suavidade que as anteriores (tem **curvatura contínuas**) e são conectadas formando curvas mais complexas (*knots*).

Spline física



Metal flexível com continuidade
de curvatura: C^2

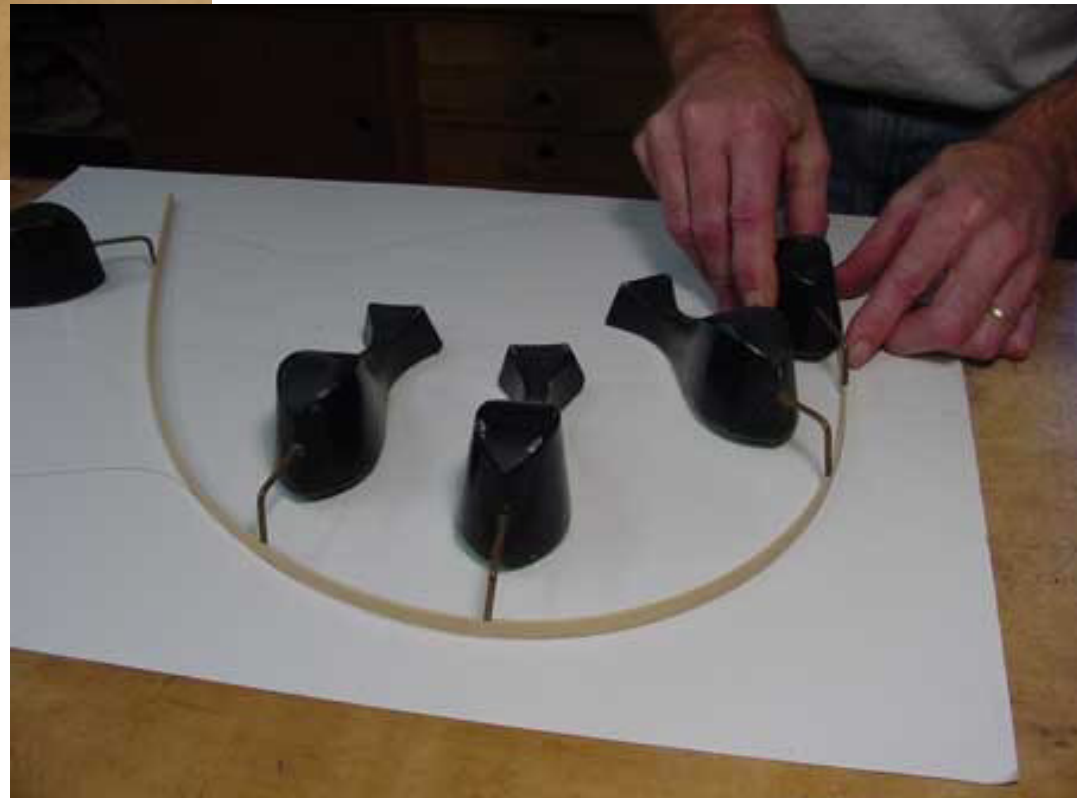
Construindo barcos



Pesos que dão forma = “ducks”



Exemplo de como são usadas



Especificando curvas

- Pontos de Controle
 - Um conjunto de pontos que influenciam a forma da curva
- Nós
 - Pontos de controle que estão sobre a curva
- Interpolando Splines
 - Curvas que passam através dos pontos de controle (nós)
- Aproximando Splines
 - Pontos de controle meramente influenciam a forma

B-spline ou basis spline

- Cardinal B-splines têm *knots* que são equidistantes uns dos outros.
- Cúbicas tem $m+1$ pontos de controle onde, $m \geq 3$
- Polinômios Cúbicos
 - $f(u) = a_x u^3 + b_x u^2 + c_x u + d_x$
 - $u: (0 \leq u \leq 1)$

Definida por quatro pontos de controle (P_1, P_2, P_3, P_4).

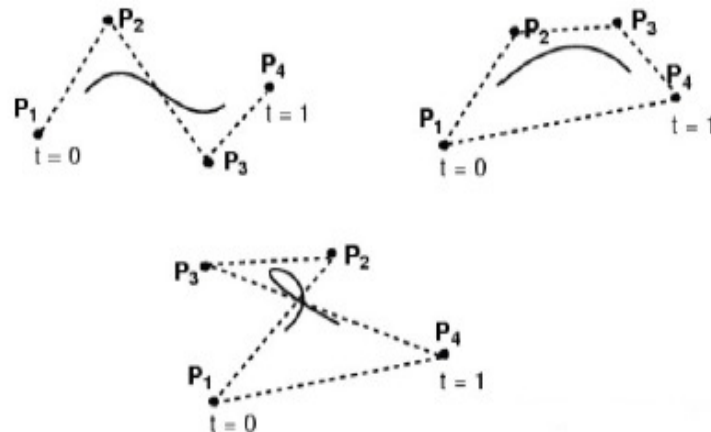
Não passa por nenhum ponto de controle.

– Curva de aproximação

Mais suave que as anteriores

– Mais fácil garantir continuidade paramétrica

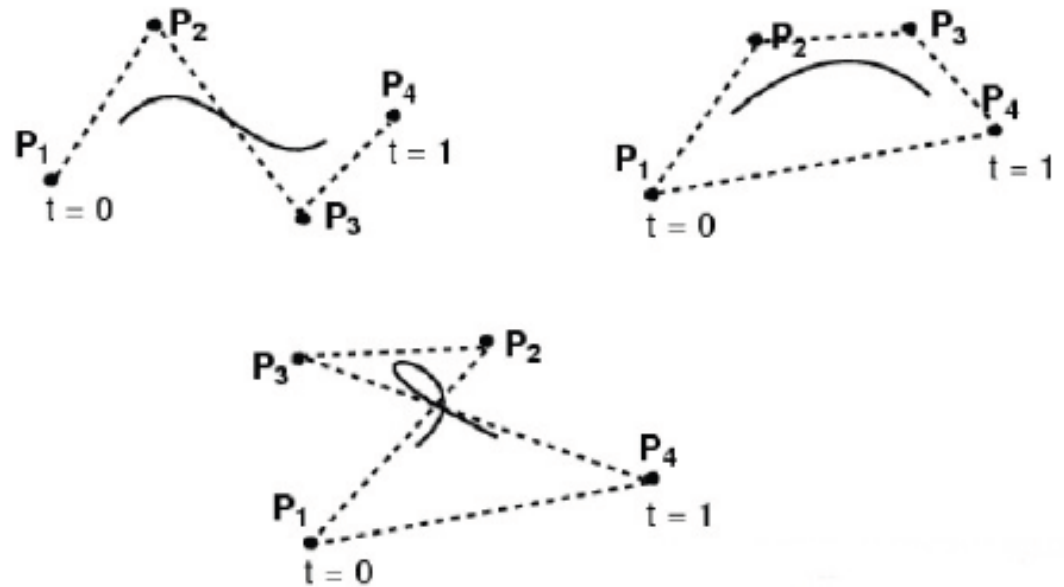
Controle local.



Porque são melhores? Porque fornecem **suporte local** e mais controle (ao contrário da Bézier que por mínima mudança nos pontos de controle, gera uma nova curva)

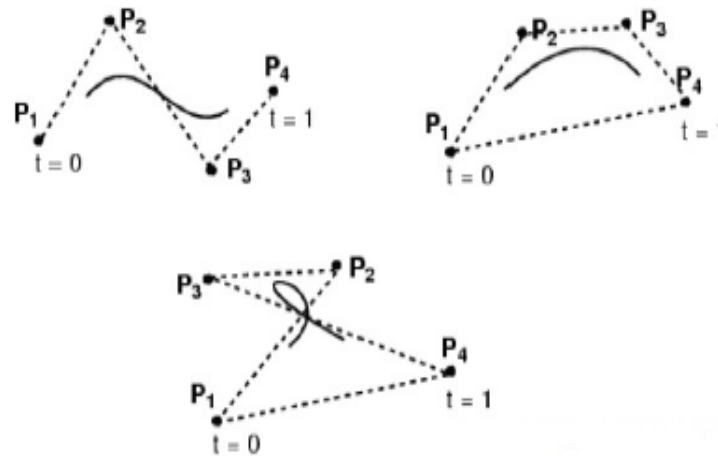
Genericamente:

- Para $m+1$ pontos de controle
 - $M \geq 3$ P_0, P_1, \dots, P_n
- Teremos curvas com $m-2$ segmentos
 - Q_3, Q_4, \dots, Q_m



Cada segmento é definido por 4 pontos, cada ponto influencia 4 segmentos de curva (exceto P_0 e P_n)

Knots são os pontos de junção entre os segmentos de curva



Nós:

No espaço paramétrico global temos **nós** ou **knots** que representam os valores de u onde os segmentos Q_i têm os seus extremos. Também são designados por **nós de ligação** uma vez que são os valores de u onde os seg. de curva se unem

Por definição um Q_i é definido entre 2 nós consecutivos: Q_i define um intervalo paramétrico $u_i \leq u \leq u_{i+1}$ (espaço de u global)

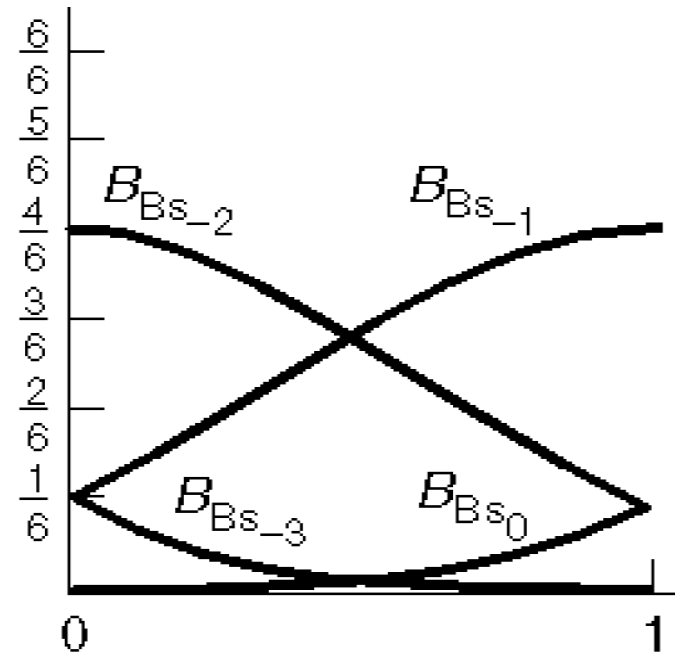
B-Spline uniforme: assume-se que esses nós têm valores inteiros e que o espaçamento entre nós é igual a 1 (0, 1, 2,...)

Representação matricial

1/6

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Funções de mistura



B-Splines Uniformes

$$Q_{BS}(t) = \frac{(1-t)^3}{6} P_{i-3} + \frac{3t^3 - 6t^2 + 4}{6} P_{i-2} +$$

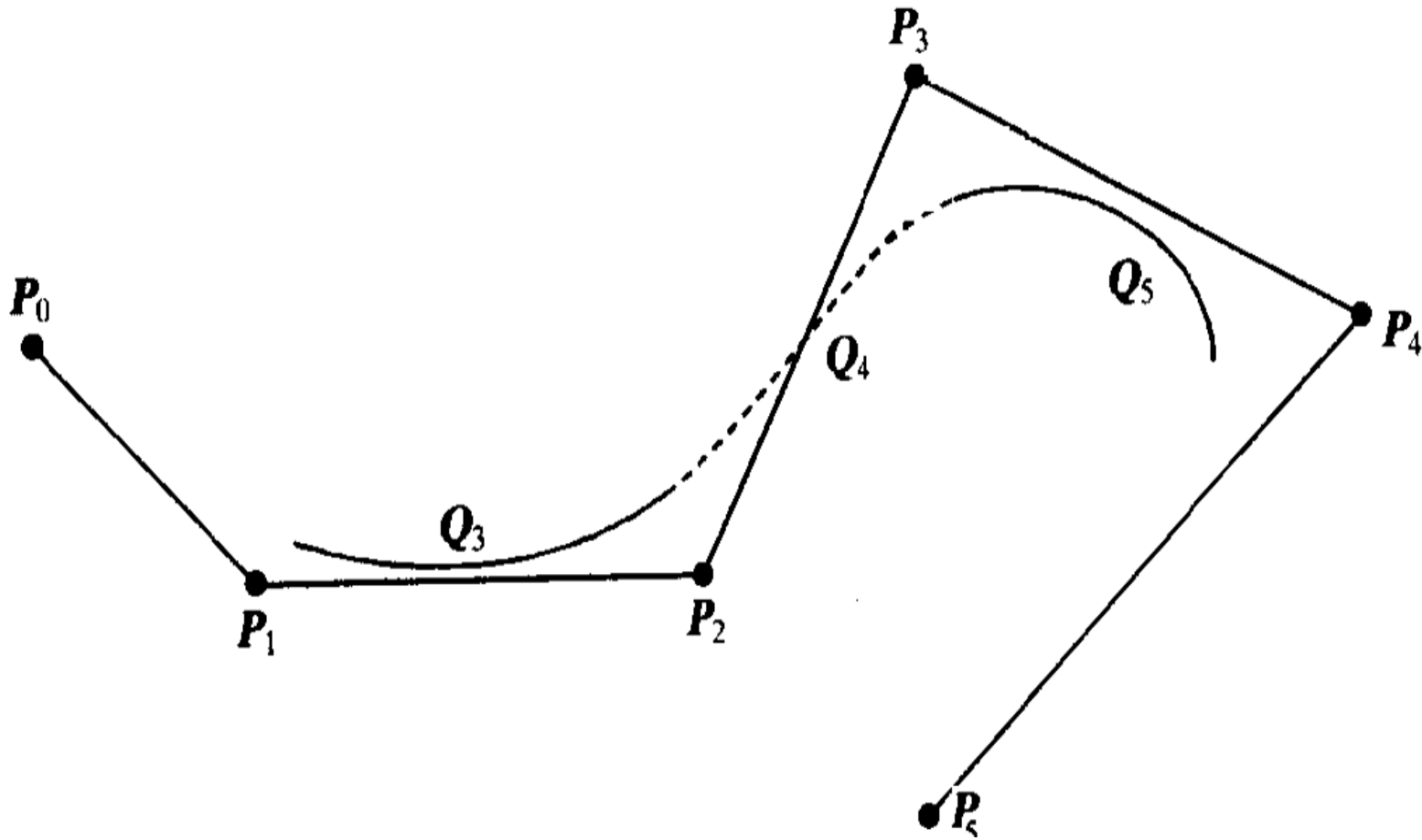
$$\frac{-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{6} P_{i-1} + \frac{t^3}{6} P_i$$

$$0 \leq t \leq 1$$

B-Splines Uniformes

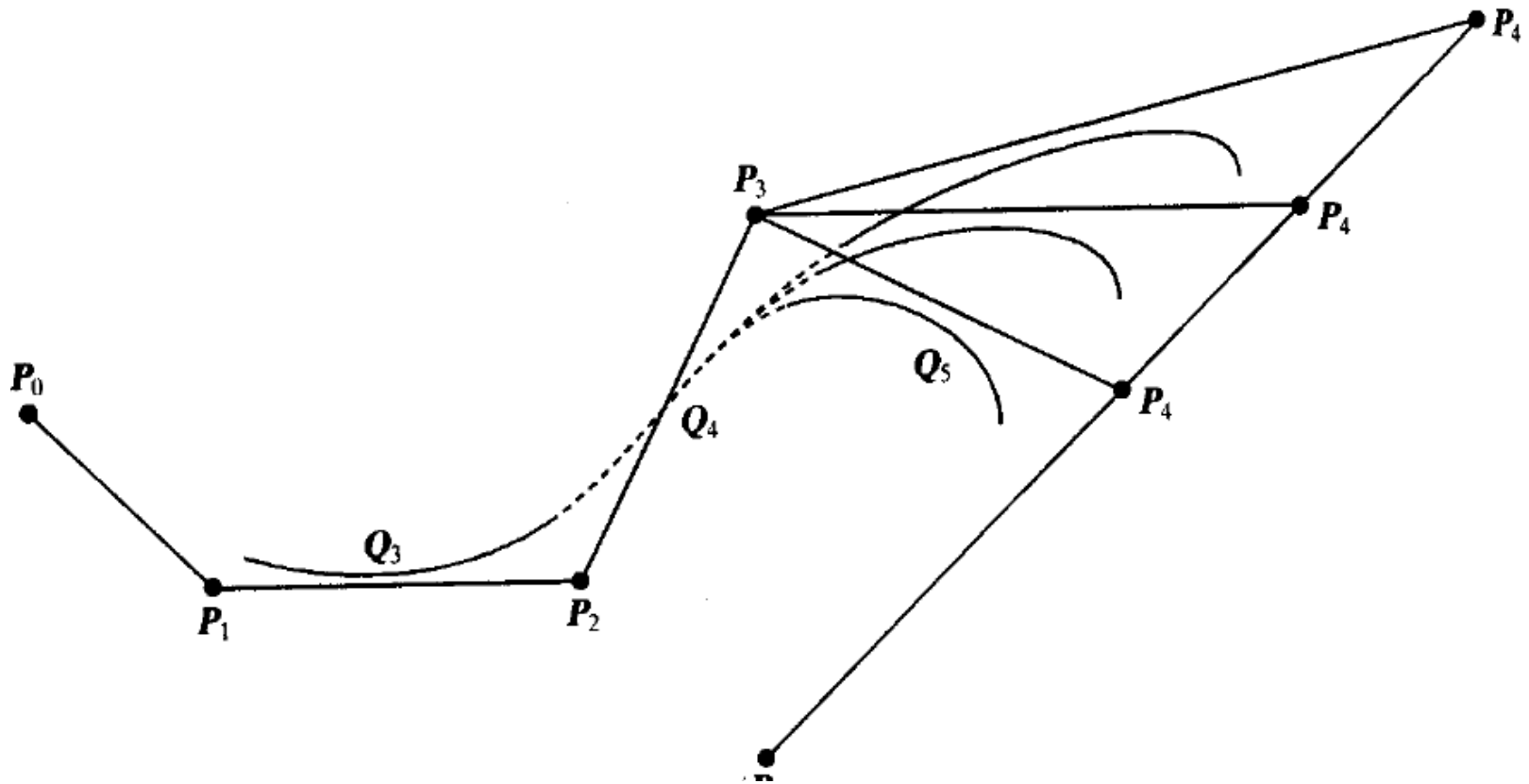
- Significa que a variável paramétrica está espaçada em intervalos uniformes ($t=0.1, 0.2, 0.3, \text{ etc}$)
- Cada um dos $m-2$ segmentos é definido por 4 dos $m+1$ pontos de controle
- Segmento $Q_i = P_{i-3}, P_{i-2}, P_{i-1}, P_i$
- $GS = [P_{i-3} \ P_{i-2} \ P_{i-1} \ P_i] \ 3 \leq i \leq m$

Unido 3 curvas B-Splines



Exemplo de controle local:

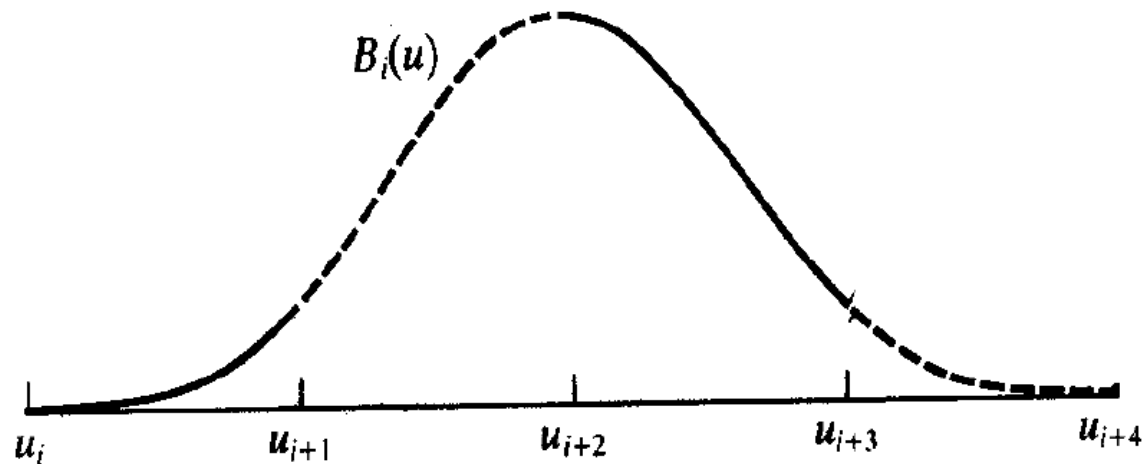
Alterando o penúltimo ponto, não se altera o trecho inicial e só parte do trecho intermediário

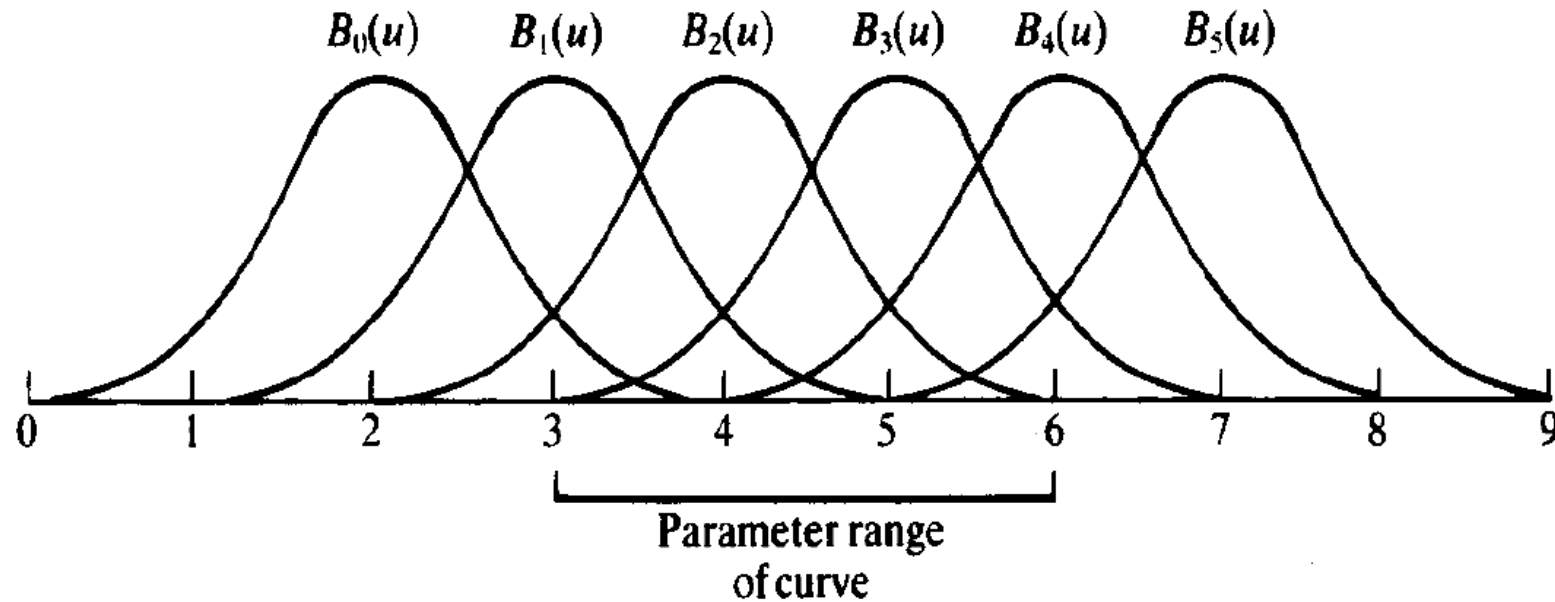


Ao ser controlada por 4 pontos, só
se aproxima dos 2 centrais

Cada função de base “cobre” K intervalos

Curva B-Spline ordem 4: cada função de base é, ela própria,
uma B-Spline cúbica, constituída por 4 segmentos, e simétrica





Exemplo: curva cúbica com 6 pts de cntrl ($m=5$ e $K=4$)

Nós uniformemente espaçados (vector de nós uniforme): cada função de base é uma cópia transladada de um nó (funções de base periódicas).

Número total de nós: 10

Uma curva B-Spline é calculada por:

Uma curva B-Spline é calculada por:

$$Q(u) = \sum_{i=0}^m B_i(u) p_i \quad \text{em que } ?? \leq u \leq ??$$

- Cada função de mistura B_i é suportada no intervalo

$$u_i - > u_{i+k}$$

- Temos $m+1$ funções de mistura;
- Logo:

$$m + 1 + k \text{ knots } (u_0 -> u_{m+k})$$

Número de nós: n° de pts de cntrl + ordem da curva

B-Splines Não-Uniformes

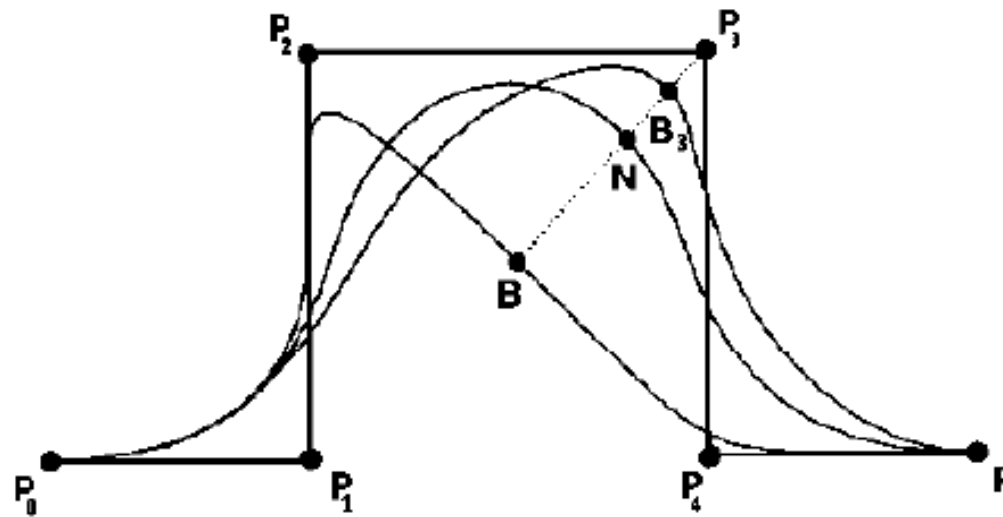
- O intervalo entre valores da variável paramétrica não é necessariamente uniforme...
- Logo as funções de *blending* não são as mesmas para cada segmento.... Maior flexibilidade

Funções de mistura



NURBS

- Non-Uniform Rational B-Spline
- O peso dos pontos de controle é a diferença



NURBS


- ***Non-uniform rational B-splines***
- B-spline não-uniforme racional
- *Rational* significa que os segmentos de curva são expressos por razões entre polinômios cúbicos



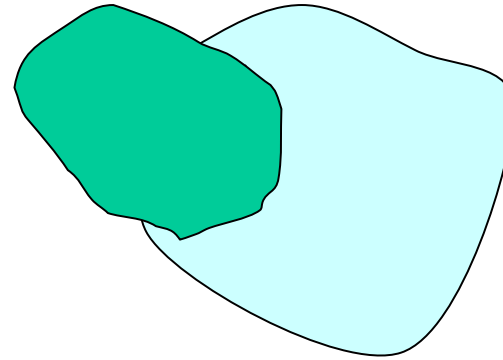
Curvas Rational B-Spline

- Provê uma única forma matemática precisa capaz de representar as formas analíticas comuns
- Linhas, planos, curvas cônicas incluindo círculos, curvas de forma livre, superfícies quádricas e esculpidas

Invariantes após a aplicação de transformações geométricas simples e a transformação perspectiva (as não racionais “alteram” com a transformação perspectiva).



Outras Splines



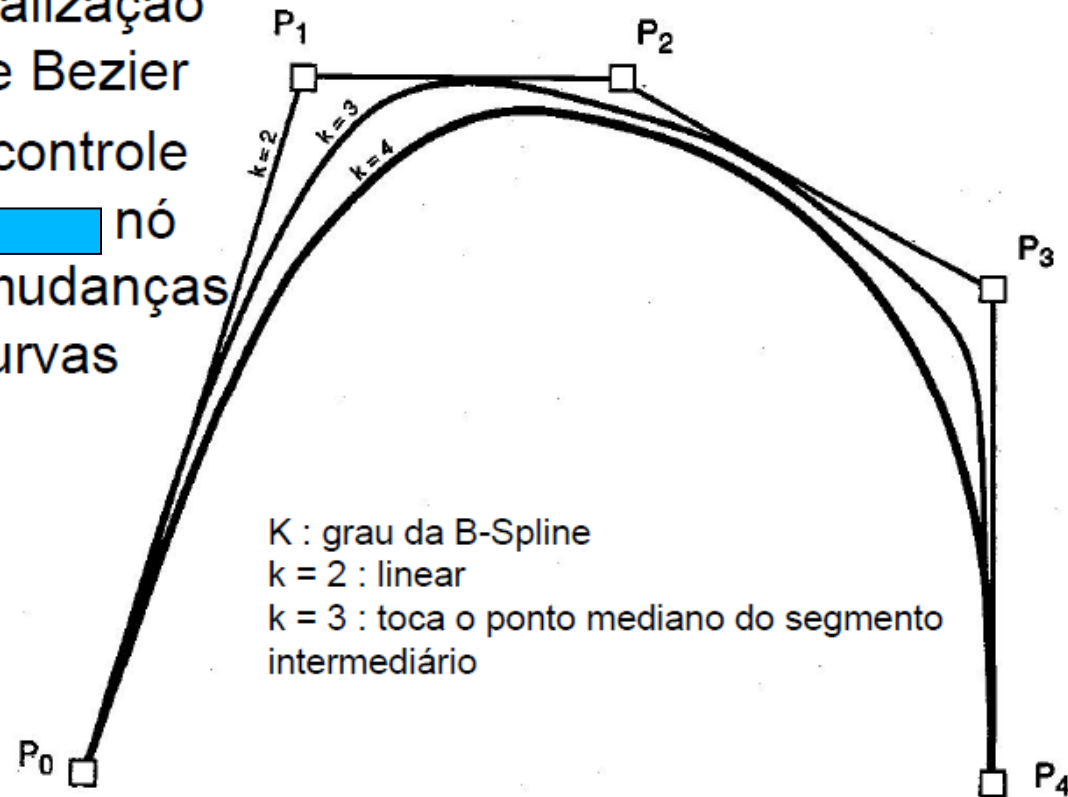
Splines de Catmull-Rom (ou Overhauser) interpolam pontos de controle, de modo similar às splines naturais

As β -splines controlam a forma da curva globalmente através das variáveis β_1 (bias) e β_2 (tensão)

Bias controla influência dos vetores tangentes enquanto que tensão puxa curva para próximo das linhas que conectam os pontos de controle

B-Splines

- Uma generalização da curva de Bezier
- Pontos de controle adicionais nó permitem mudanças locais às curvas



Superfícies

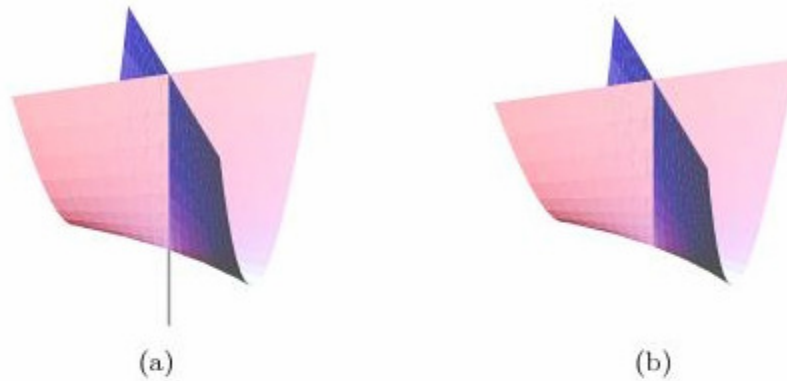
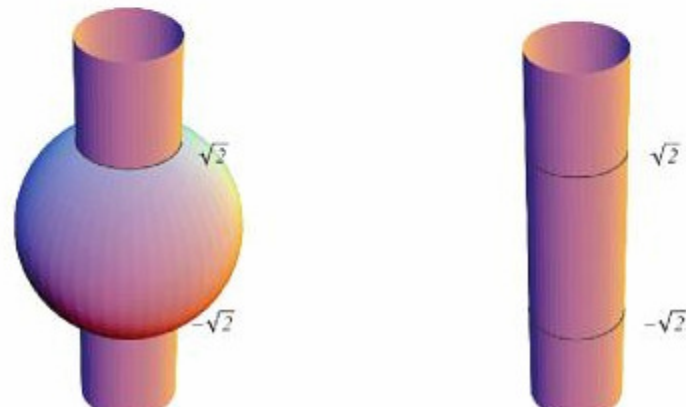
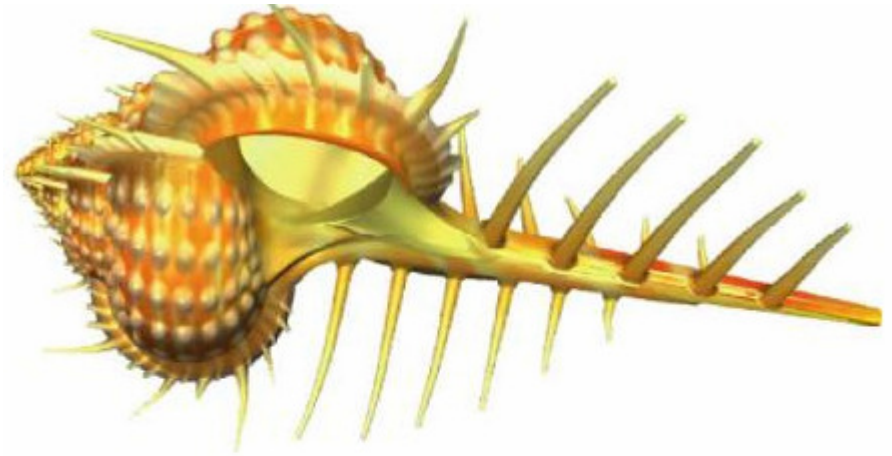


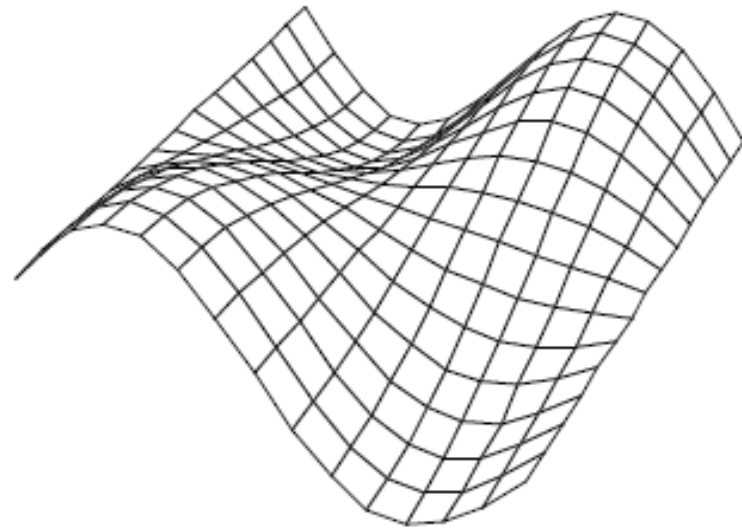
Fig. 1.4. (a) Whitney umbrella with-handle $x^2 - zy^2 = 0$; (b) Whitney umbrella without-handle $\{x^2 - zy^2 = 0\} - \{z < 0\}$.



Superfícies
São generalizações
das curvas,
Assim como o \mathbb{R}^2 é o
produto cartesiano
do $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, uma
superfície pode ser
vista como o
produto cartesiano de
duas curvas 3D



**\mathbb{R}^2 é o produto cartesiano do
 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, uma superfície pode ser
vista como o
produto cartesiano de duas
curvas 3D**



Assim superfícies são entes
Bidimensionais :

Superfícies Paramétricas

$$x = f(u,v)$$

$$y = g(u,v)$$

$$z = h(u,v)$$

exemplos

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, f(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$$

$$\begin{cases} x = \sin \theta \\ y = \cos \theta \end{cases} \quad \text{where } \theta \in [0, 2\pi]$$

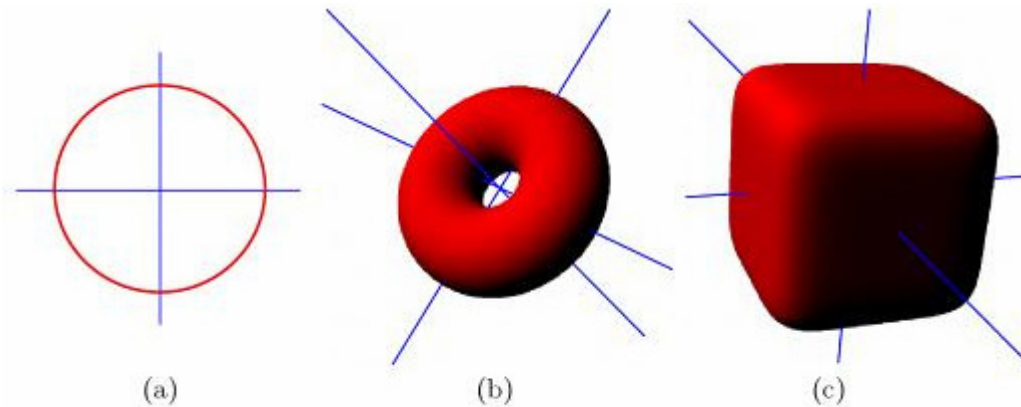


Fig. 0.1. (a) A unit circle; (b) a torus; (c) a blended cube.

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u (R + r \cos v) \\ \sin u (R + r \cos v) \\ r \sin v \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad \text{where } t \in [0, 1]$$

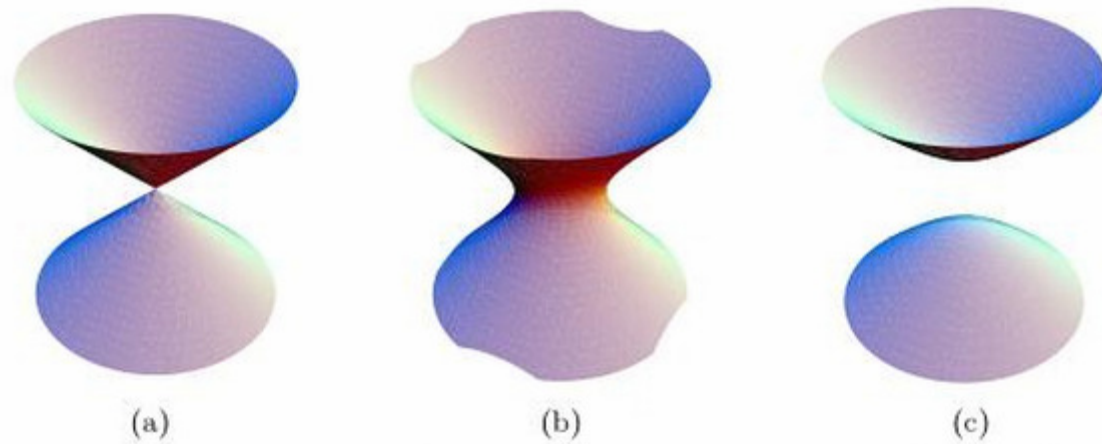


Fig. 1.3. (a) Cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; (b) hyperboloid of one sheet $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$; (c) hyperboloid of two sheets $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.

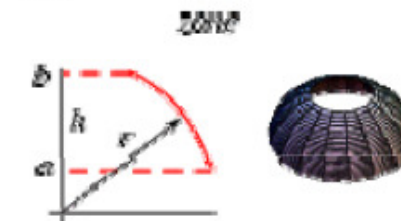
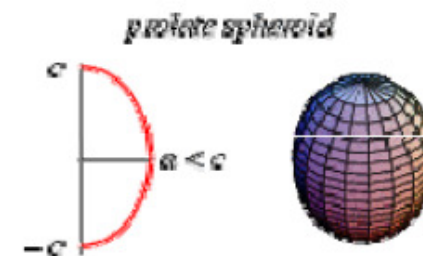
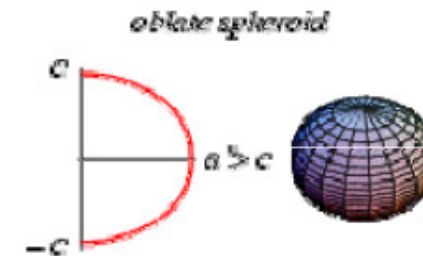
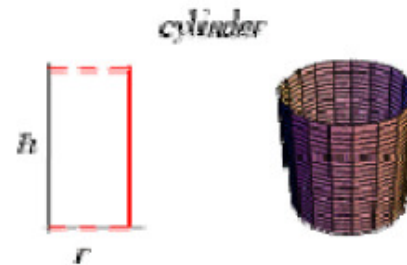
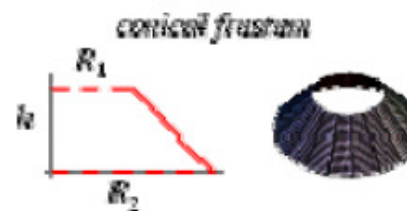
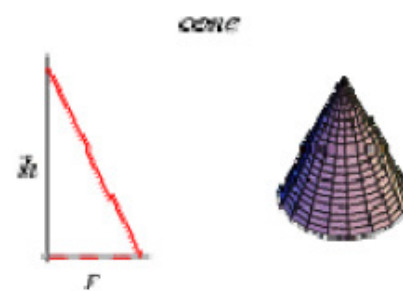
Formas de geração:

Superfície por caminho

- Superfície criada atravessando uma curva ao longo de um caminho no espaço

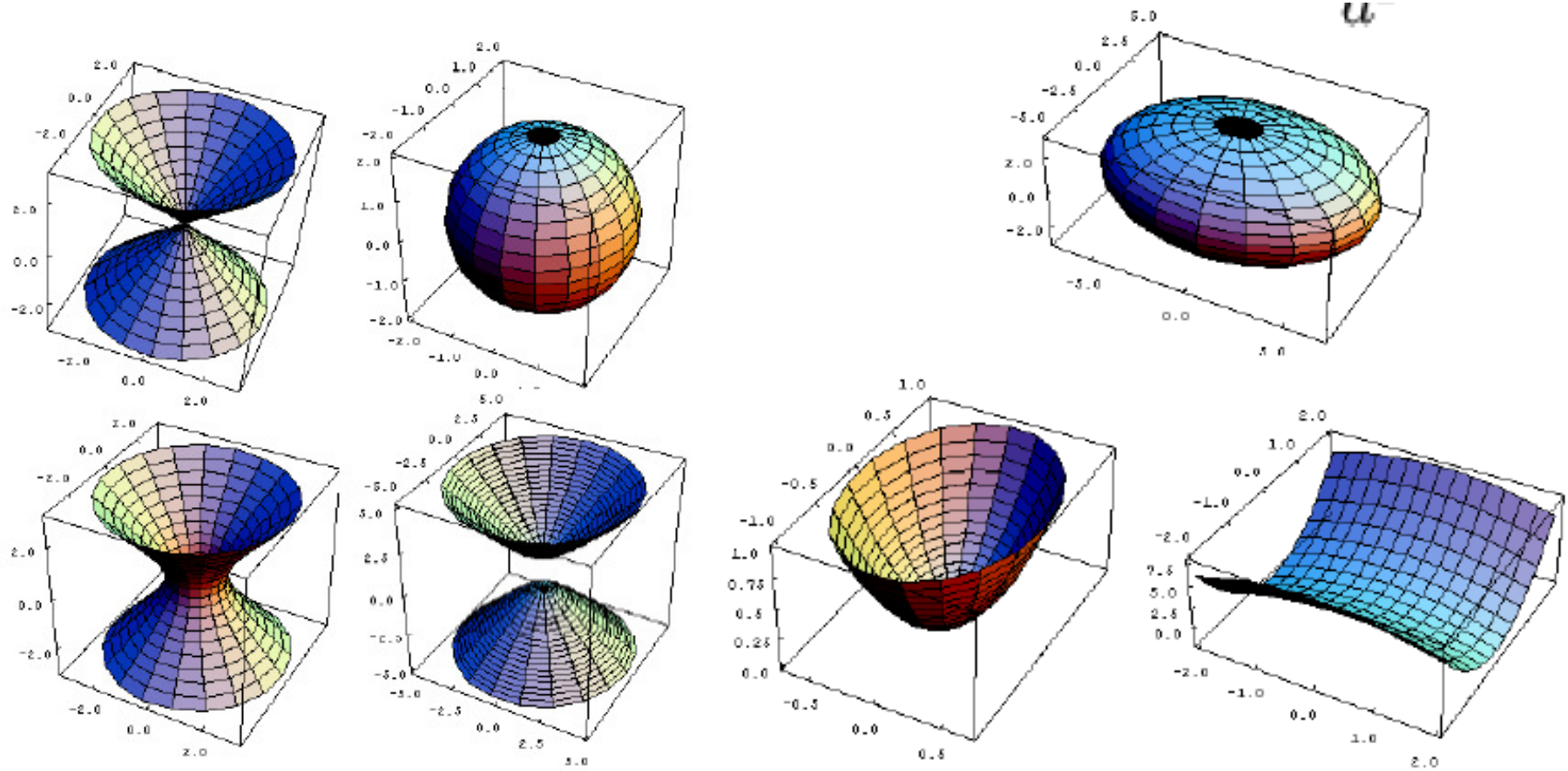
Revolução

- Superfície criada pela rotação de uma curva sobre um plano em torno de uma linha reta (o eixo de rotação) que está sobre o mesmo plano.



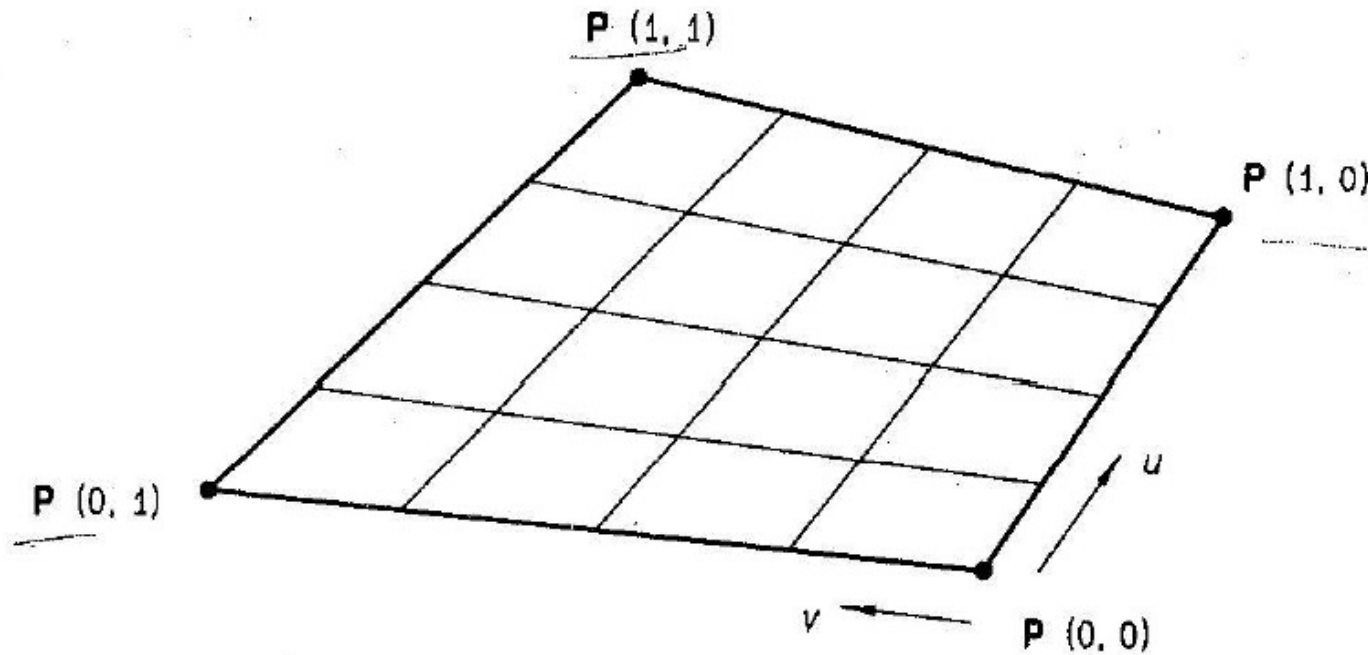
Quádricas

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$



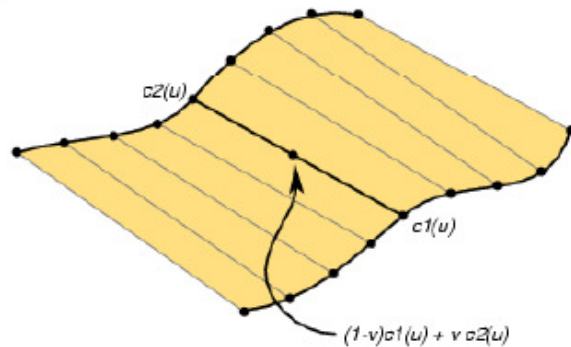
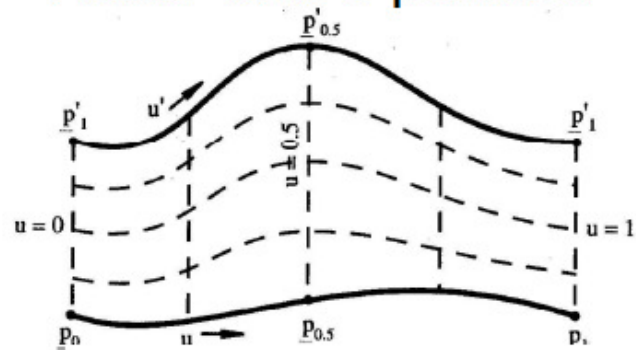
Geradas por interpolação

- Interpolação linear entre quatro pontos que não estão no mesmo plano



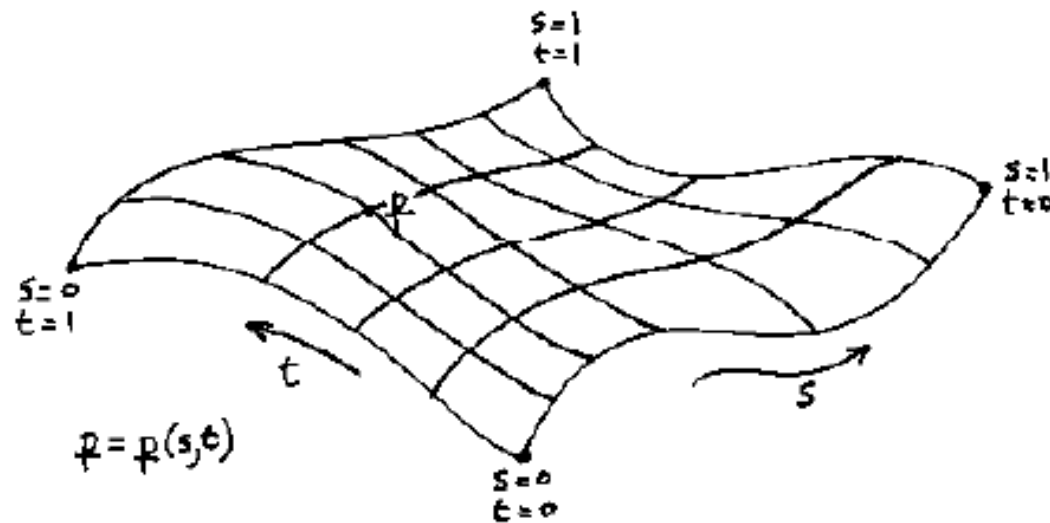
Lofting

- Construída juntando 2 curvas por linhas retas entre pontos



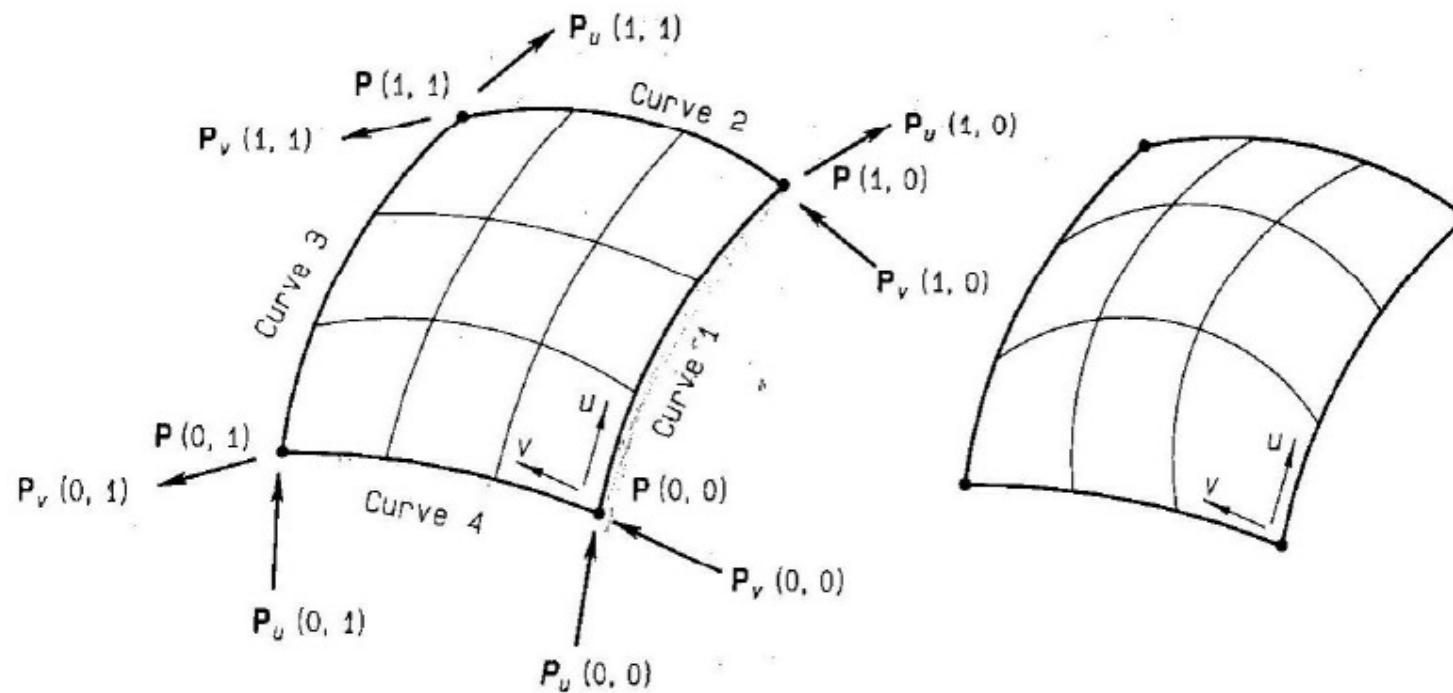
Superfície Linear de Coons

- Interpolação entre quatro curvas de fronteira
- Similar a superfície regrada em duas direções



Patches

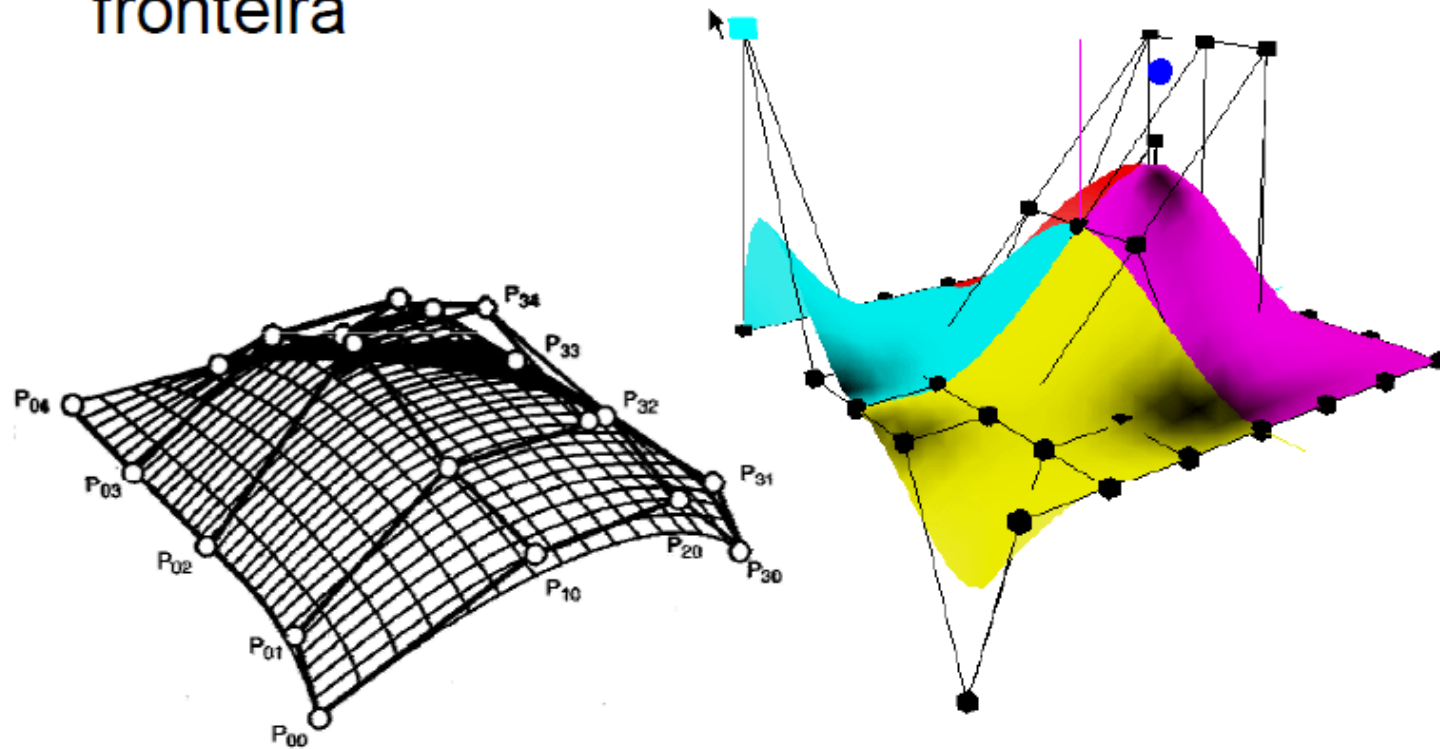
- Curvas cúbicas paramétricas como quatro curvas de fronteira



Remendos cúbicos

de Bezier

- Curvas Bezier como quatro curvas de fronteira

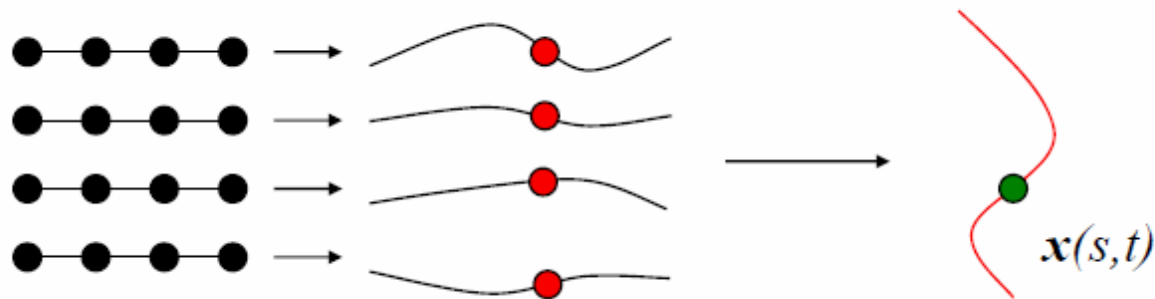


Outras Superfície

- **T-spline** surface can be thought of as a NURBS surface for which a row of control points is allowed to terminate without traversing the entire surface. The control net at a terminated row resembles the letter "T". Modeling surfaces with T-splines can reduce the number of control points in comparison to NURBS surfaces and make pieces easier to merge, but increases the book-keeping effort to keep track of the irregular connectivity.

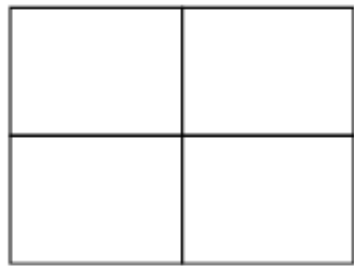
Retalhos de Bézier

- Curvas na fronteira são curvas de Bézier
- *Qualquer* curva para s ou t constante é uma curva Bézier
- Podemos pensar assim:
 - Cada linha da grade com 4 pontos de controle define uma curva de Bézier para o parâmetro s
 - Ao avaliar cada curva para um mesmo s obtemos 4 pontos de controle “virtuais”
 - Pontos de controle “virtuais” definem uma curva Bézier em t
 - Avaliando esta curva em um dado t resulta no ponto $\mathbf{x}(s,t)$

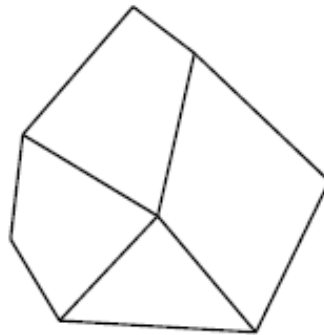


Malhas de Retalhos Bézier

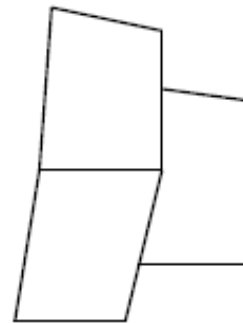
- São malhas compostas de diversos retalhos unidos ao longo de suas fronteiras
 - As arestas das grades de controle precisam se justapor perfeitamente
 - As grades precisam ser retangulares



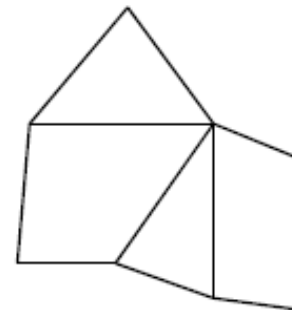
OK



OK



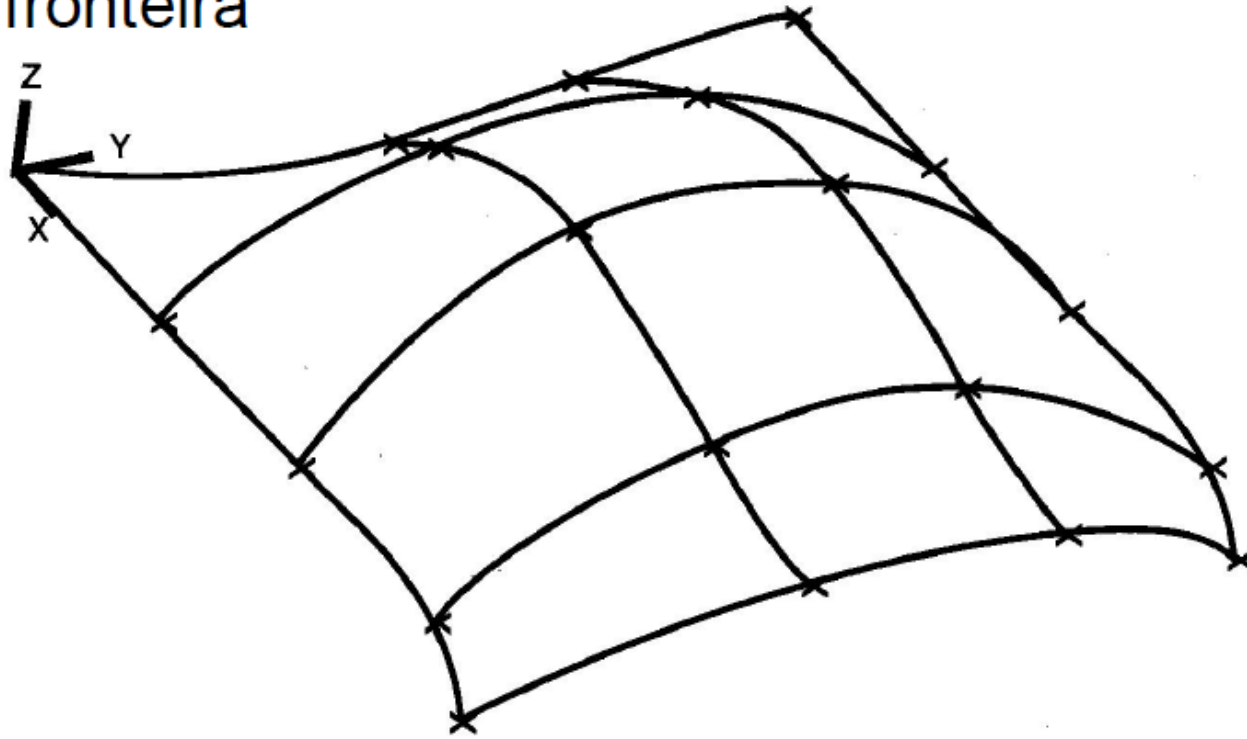
Não



Não

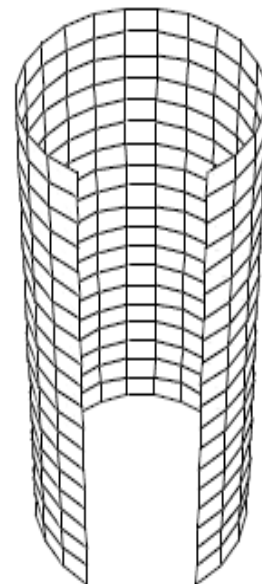
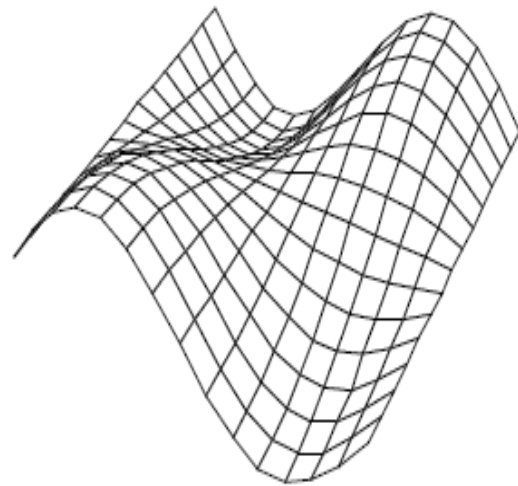
Superfície B-Splines

- Curvas B-Spline como quatro curvas de fronteira



Ideia de *multiplicação* de 2 curvas

A informação geométrica que define uma curva passa a ser ela própria uma função de uma variável paramétrica

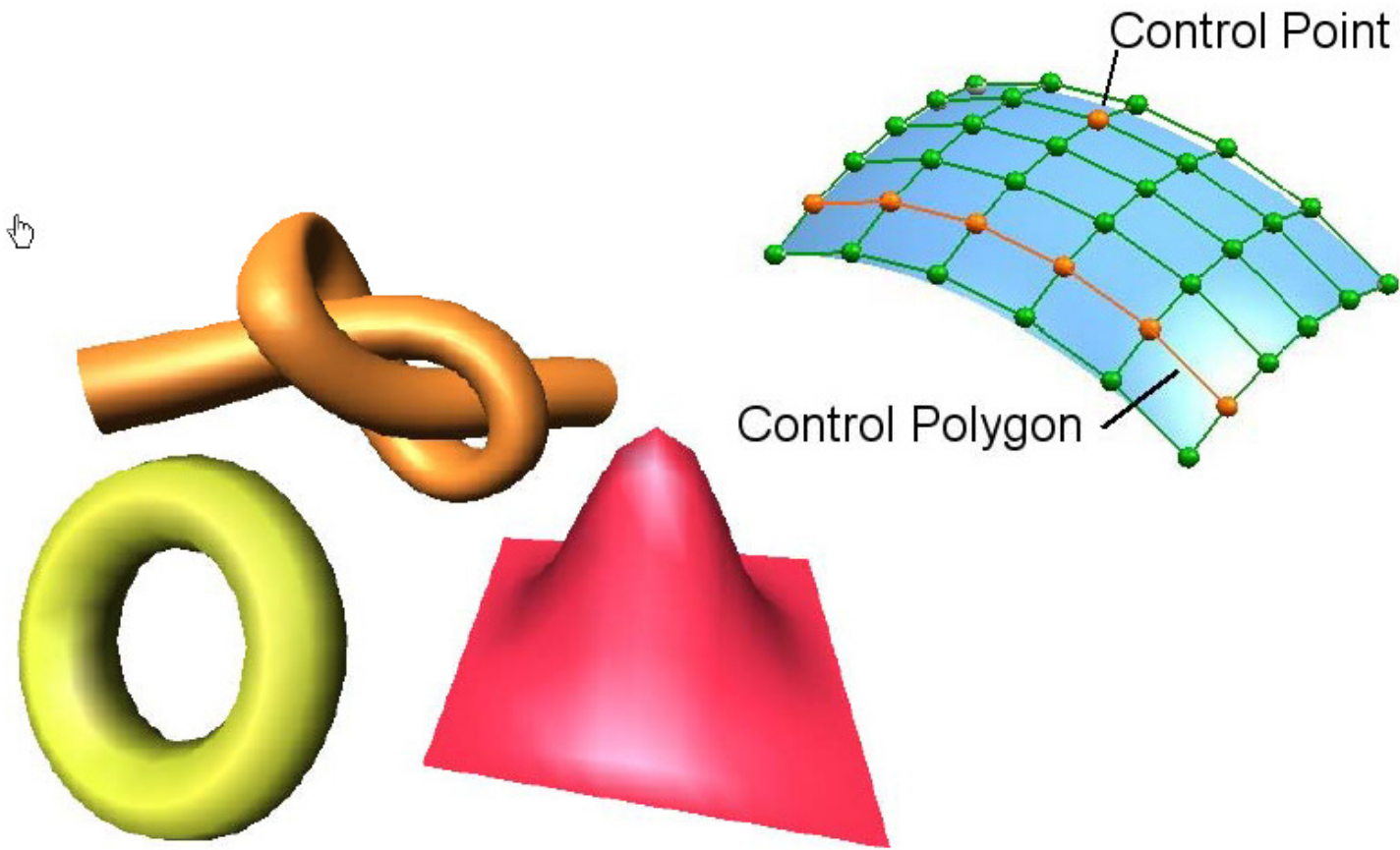


Superfícies Paramétricas

A forma geral de uma superfície 3D na sua representação paramétrica é:

$$f(u, v) = (f_x(u, v), f_y(u, v), f_z(u, v))$$

Nurbs



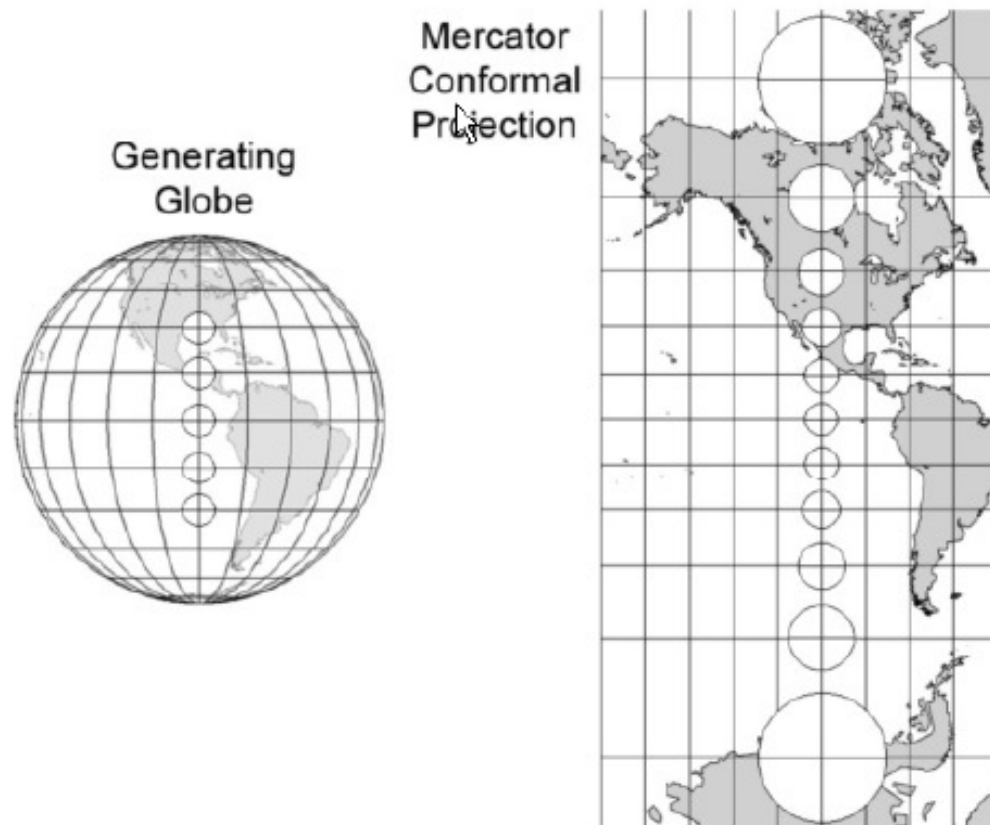
Malha de polígono (mesh)

- Coleção de vértices e polígonos que definem a forma de um objeto poliédrico
- Malhas de triângulos ou quadriláteros
 - triangulação
- Bom para caixas, armários, construir exteriores
- Ruim para superfícies curvas

- Manta de retalhos são usadas para modelar as fronteiras de objectos 3D complexos:

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 b_i(u) b_j(v) p_{ij}$$

Mapeamentos



Curvas de Nível

Existe uma outra técnica útil, para descrever o comportamento de uma função de duas variáveis.

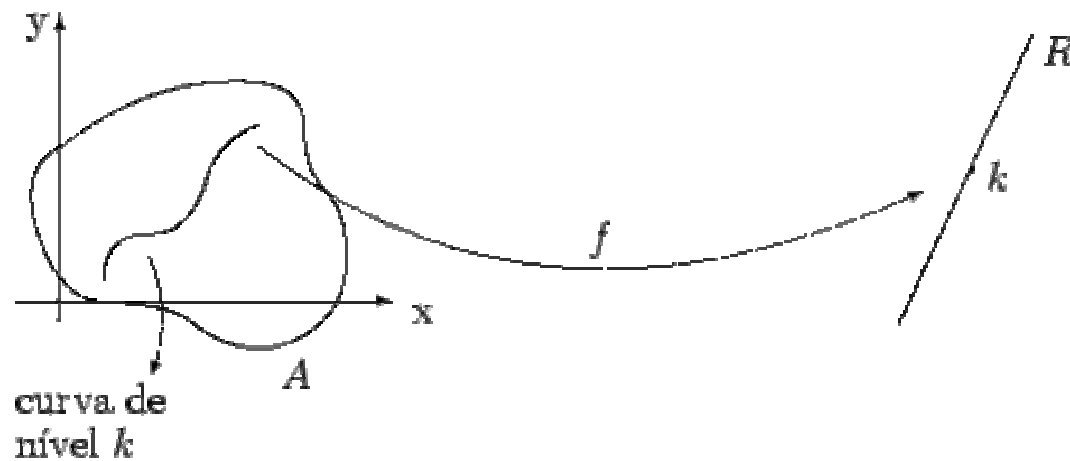
O método consiste em descobrir no plano xy os gráficos das equações $f(x, y) = k$ para diferentes valores de k .

Os gráficos obtidos desta maneira são chamados as **curvas de nível** da função f .

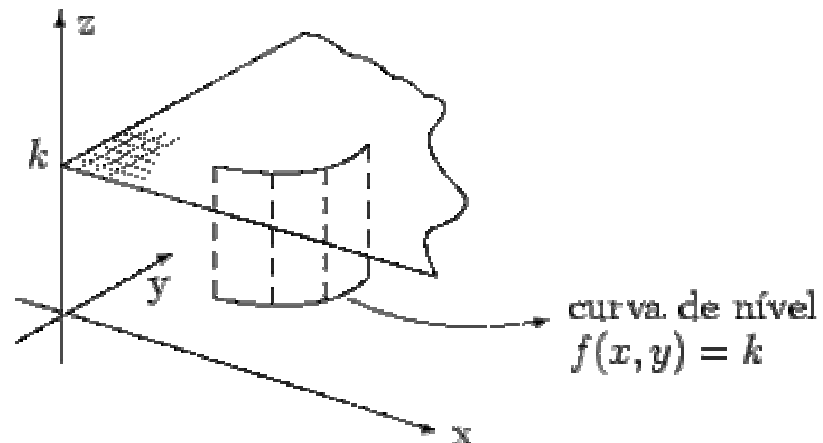
$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Curvas de Nível

Curva de nível $k : \{(x, y) \in A \text{ tal que } f(x, y) = k\}$.



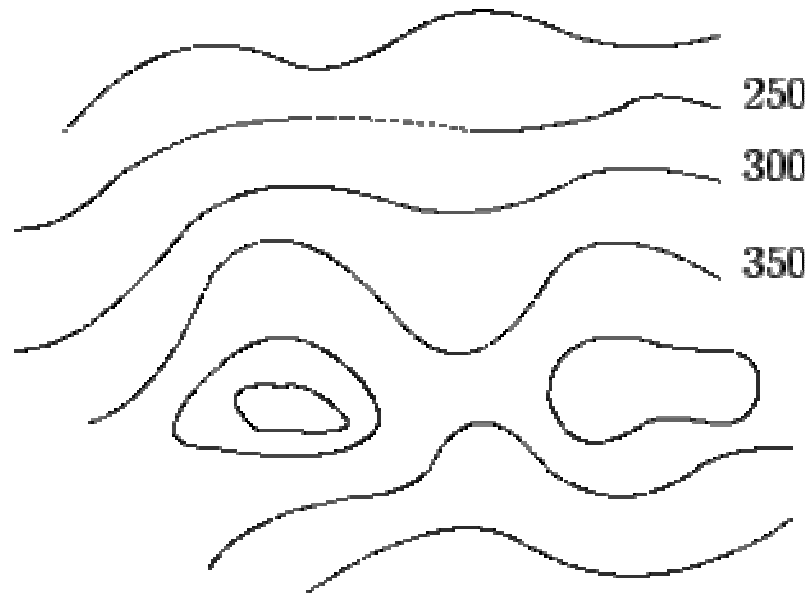
ou



Exemplo

$f(x,y) = z =$ altura em relação ao nível do mar.

Essas curvas de nível correspondem às **linhas de contorno** topográfico.

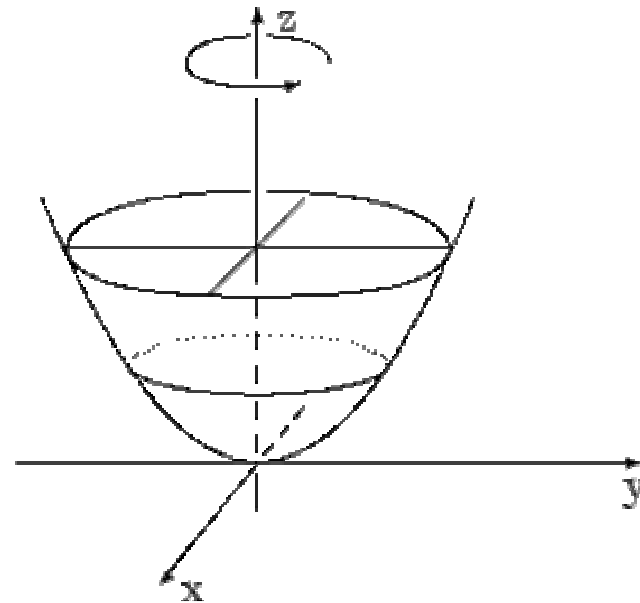
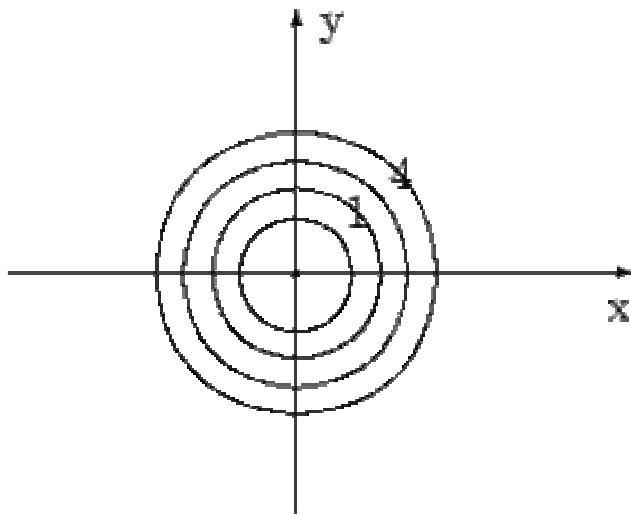


Exemplo

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

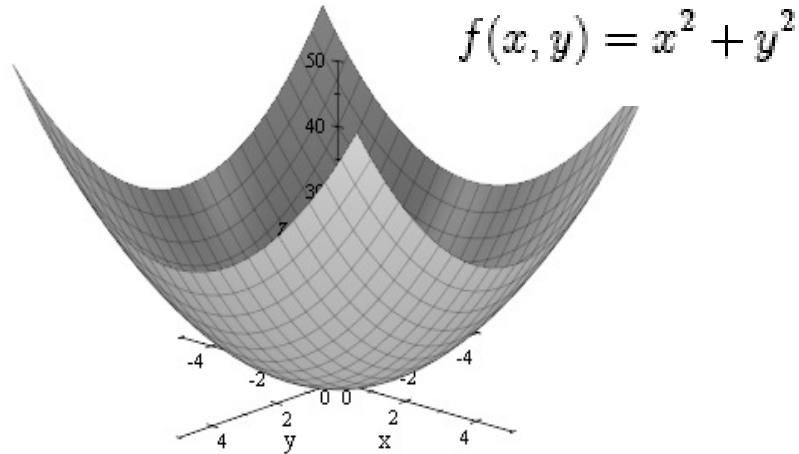
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

As curvas de nível são os gráficos das equações $x^2 + y^2 = k$.

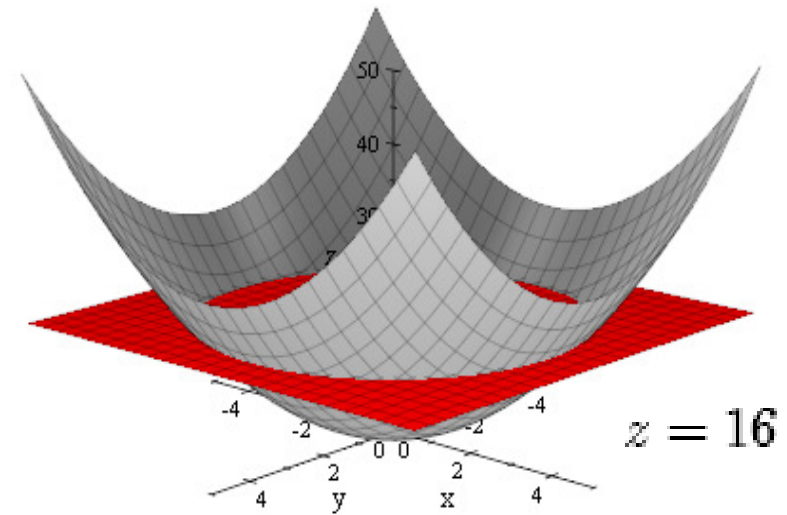
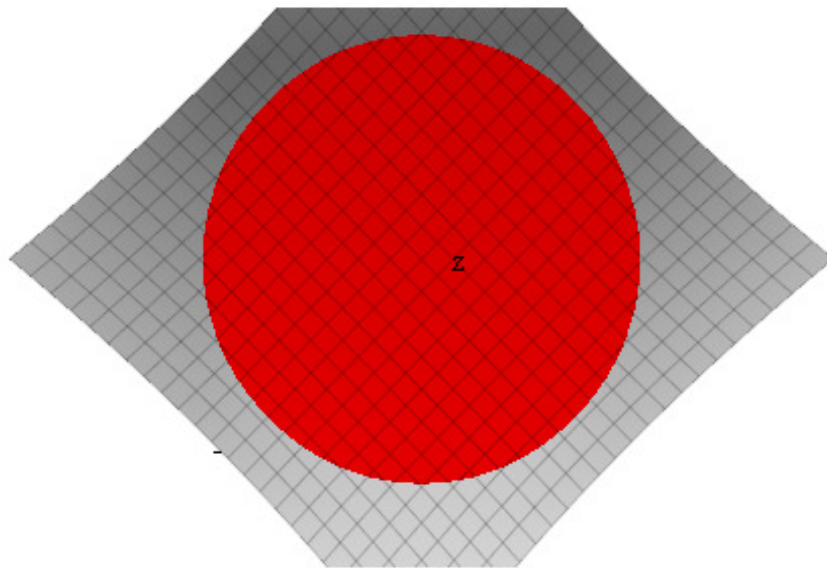


Exemplos:

Função Real de Variável Vetorial - Curvas de Nível



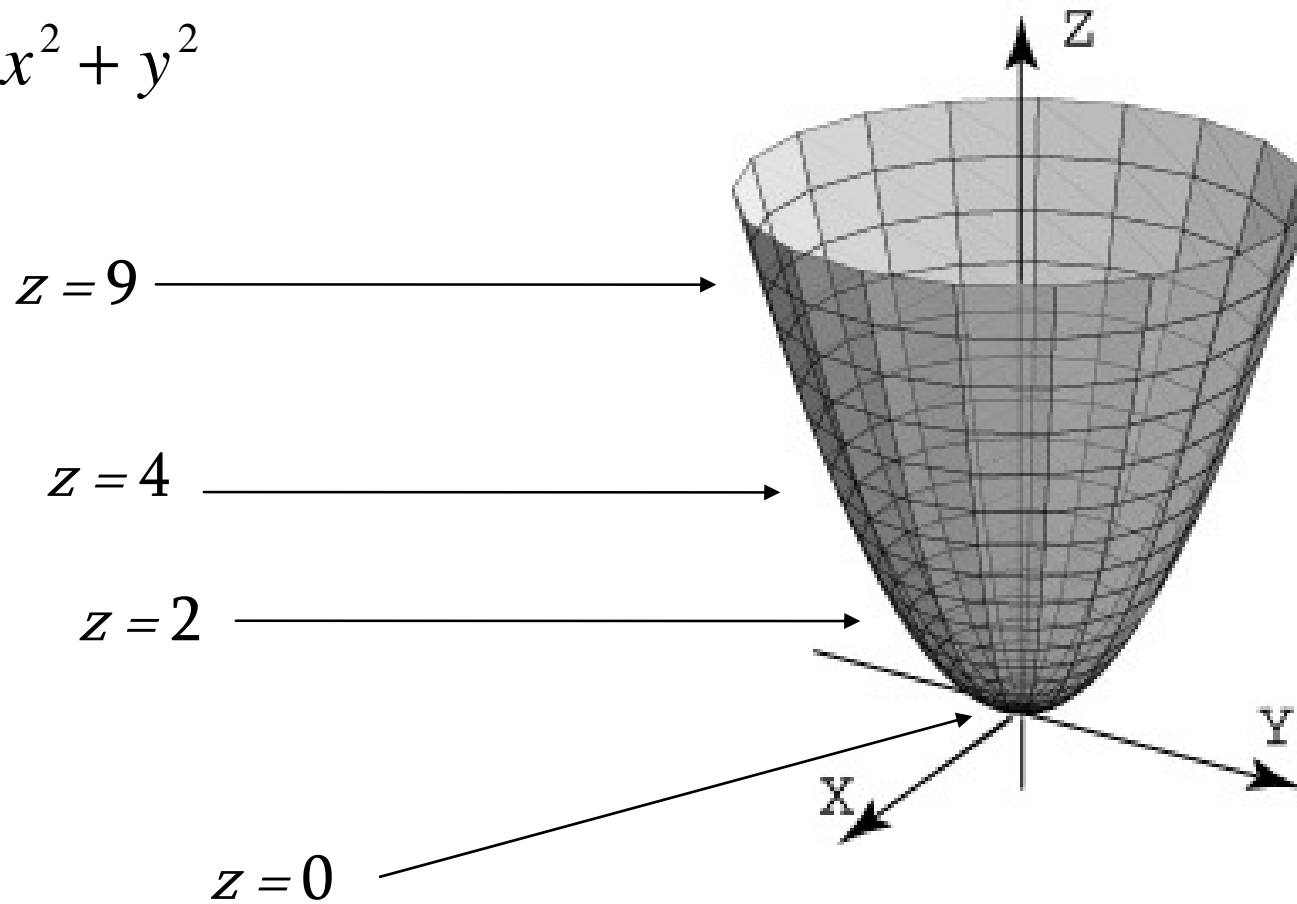
$$z = x^2 + y^2$$



Exemplos:

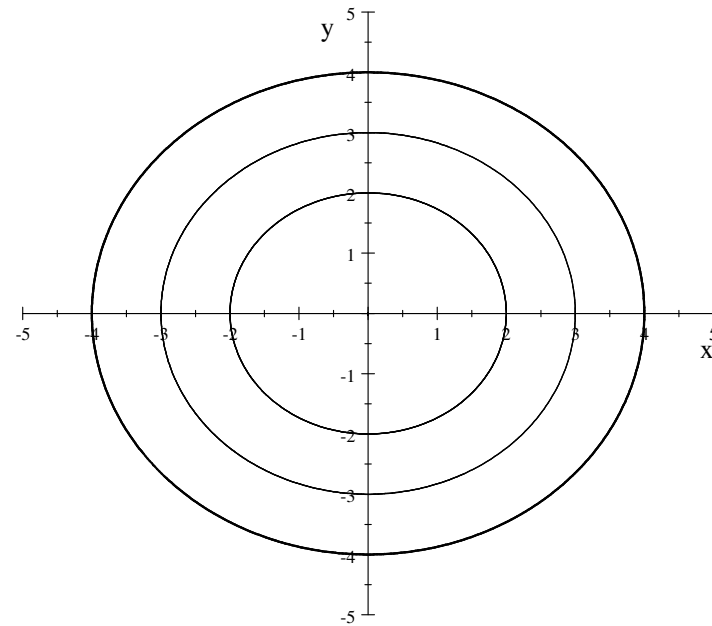
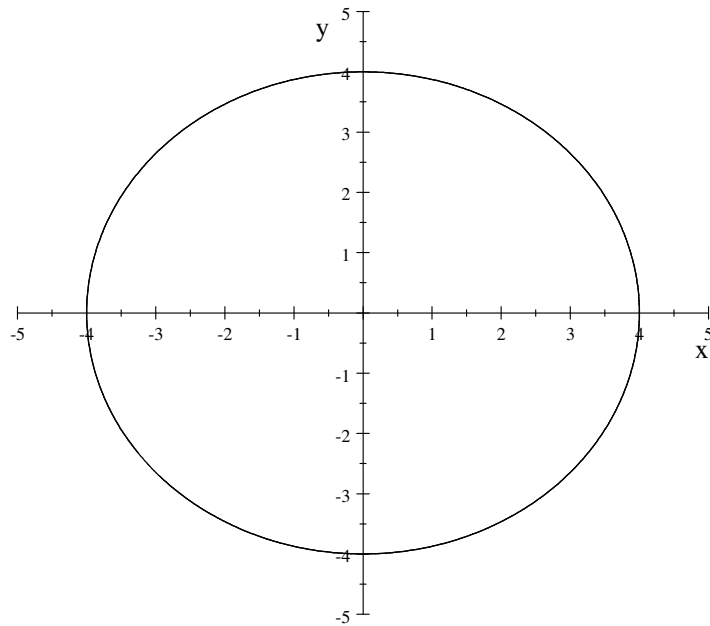
Função Real de Variável Vetorial - Curvas de Nível

$$z = x^2 + y^2$$



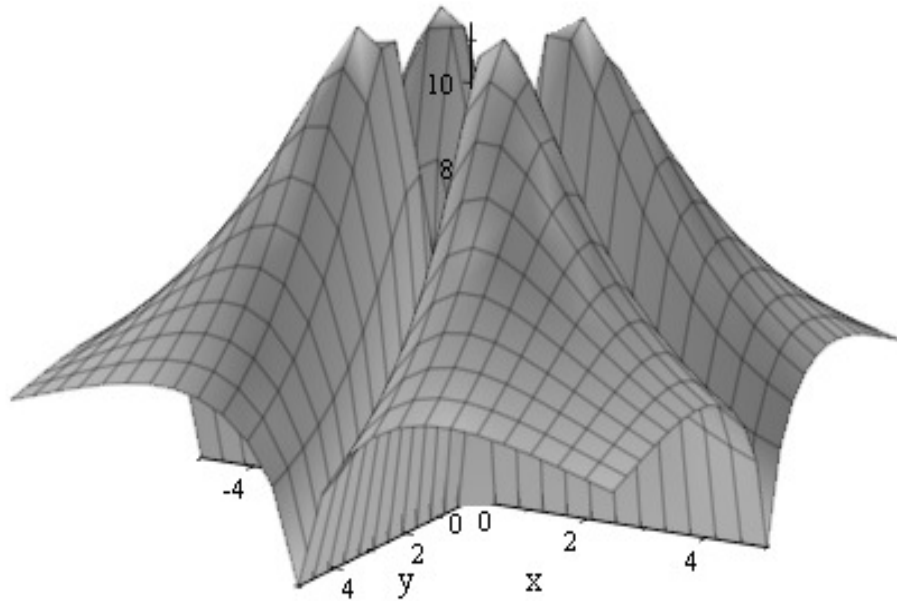
Exemplos:

Função Real de Variável Vetorial - Curvas de Nível



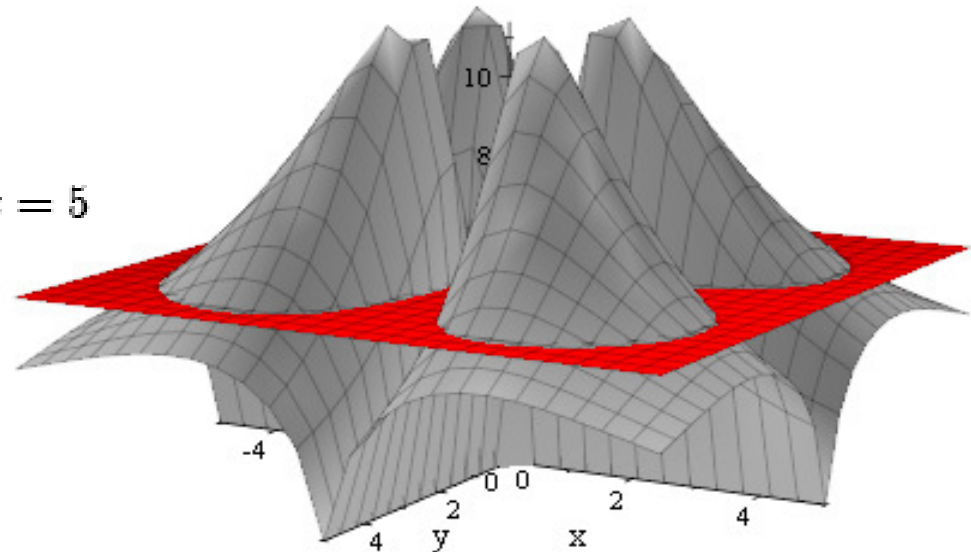
Exemplos:

Função Real de Variável Vetorial - Curvas de Nível



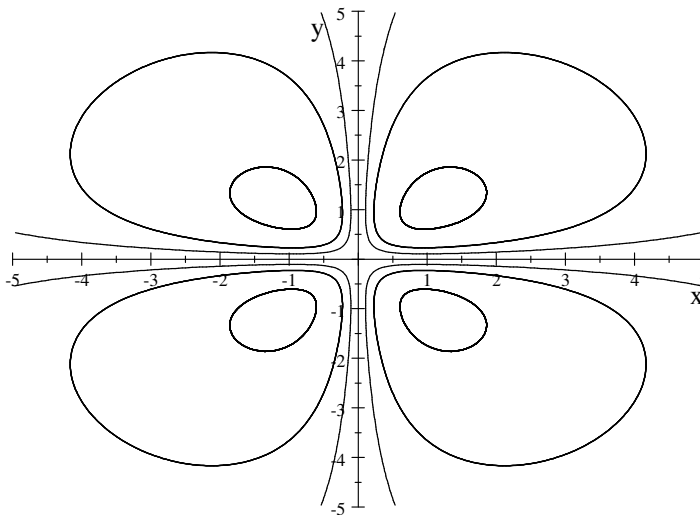
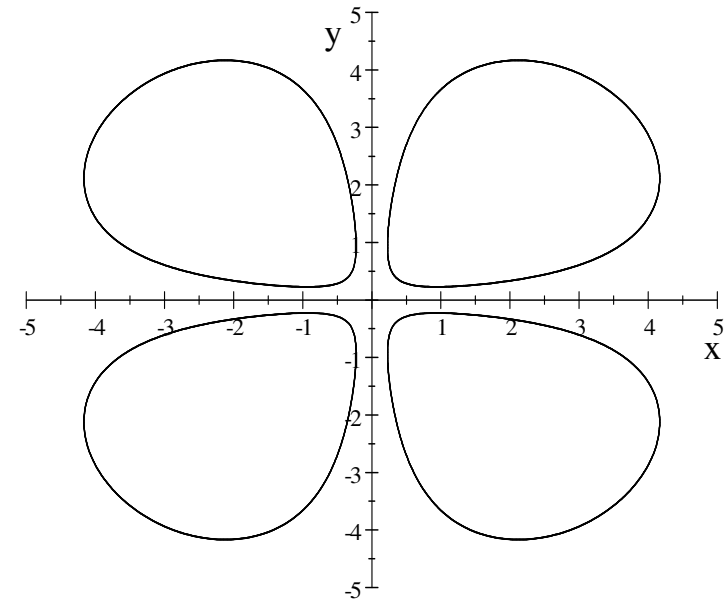
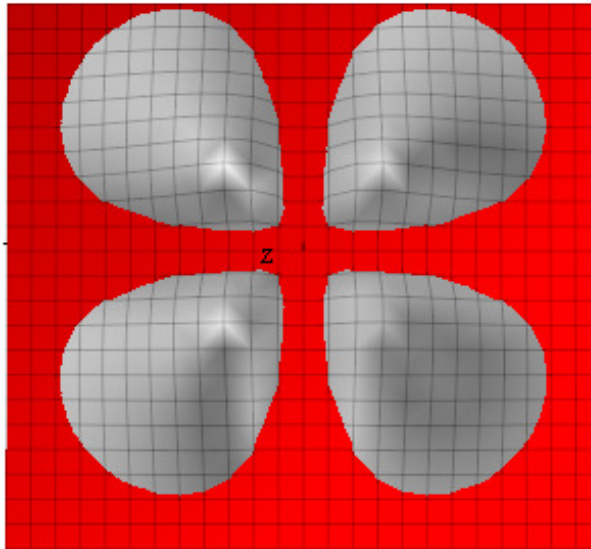
$$f(x, y) = 50 \frac{\ln(|xy| + 1)}{x^2 + y^2 + 1}$$

$z = 5$



Exemplos:

Função Real de Variável Vetorial - Curvas de Nível

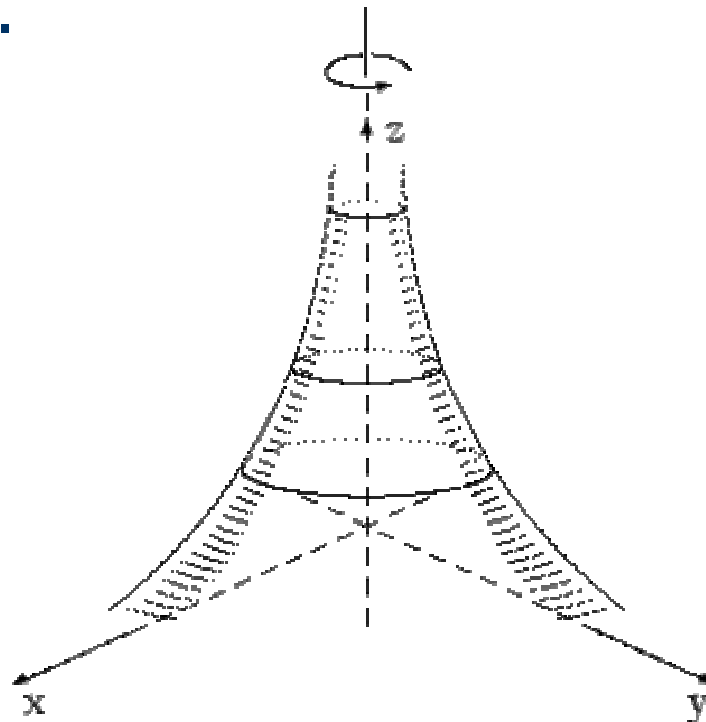
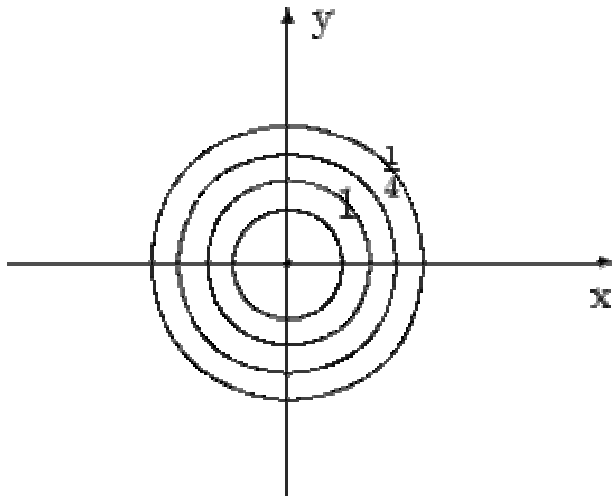


Exemplo

3. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Curvas de nível: $x^2 + y^2 = c$.



Exemplo

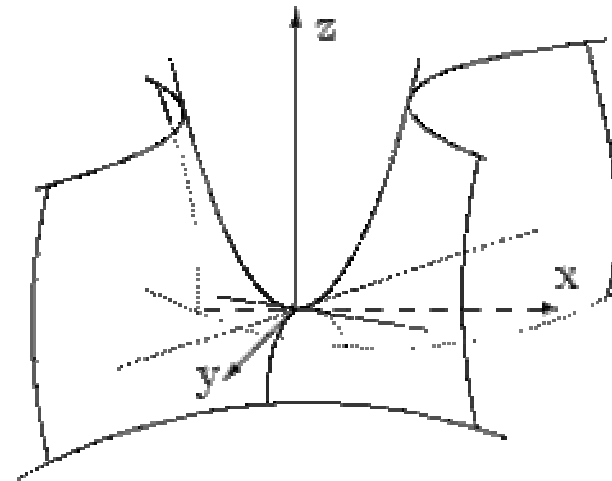
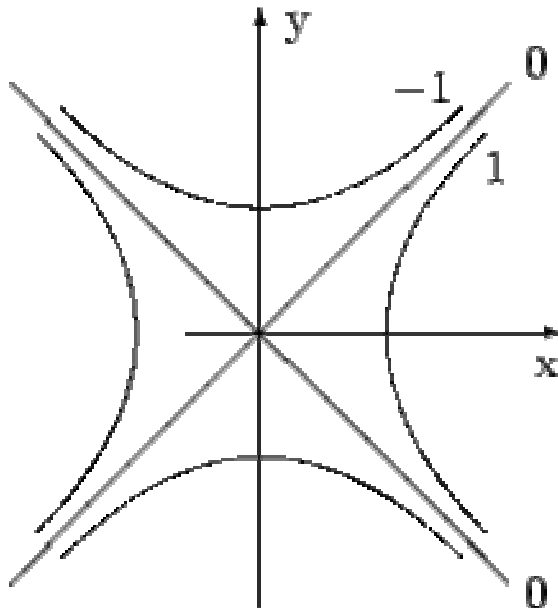
4. $z = f(x, y) = x^2 - y^2$

Curvas de nível:

$$x^2 - y^2 = c$$

$$c = 0 \rightarrow |x| = |y|$$

$c \neq 0$ - hipérboles



Superfície de Nível

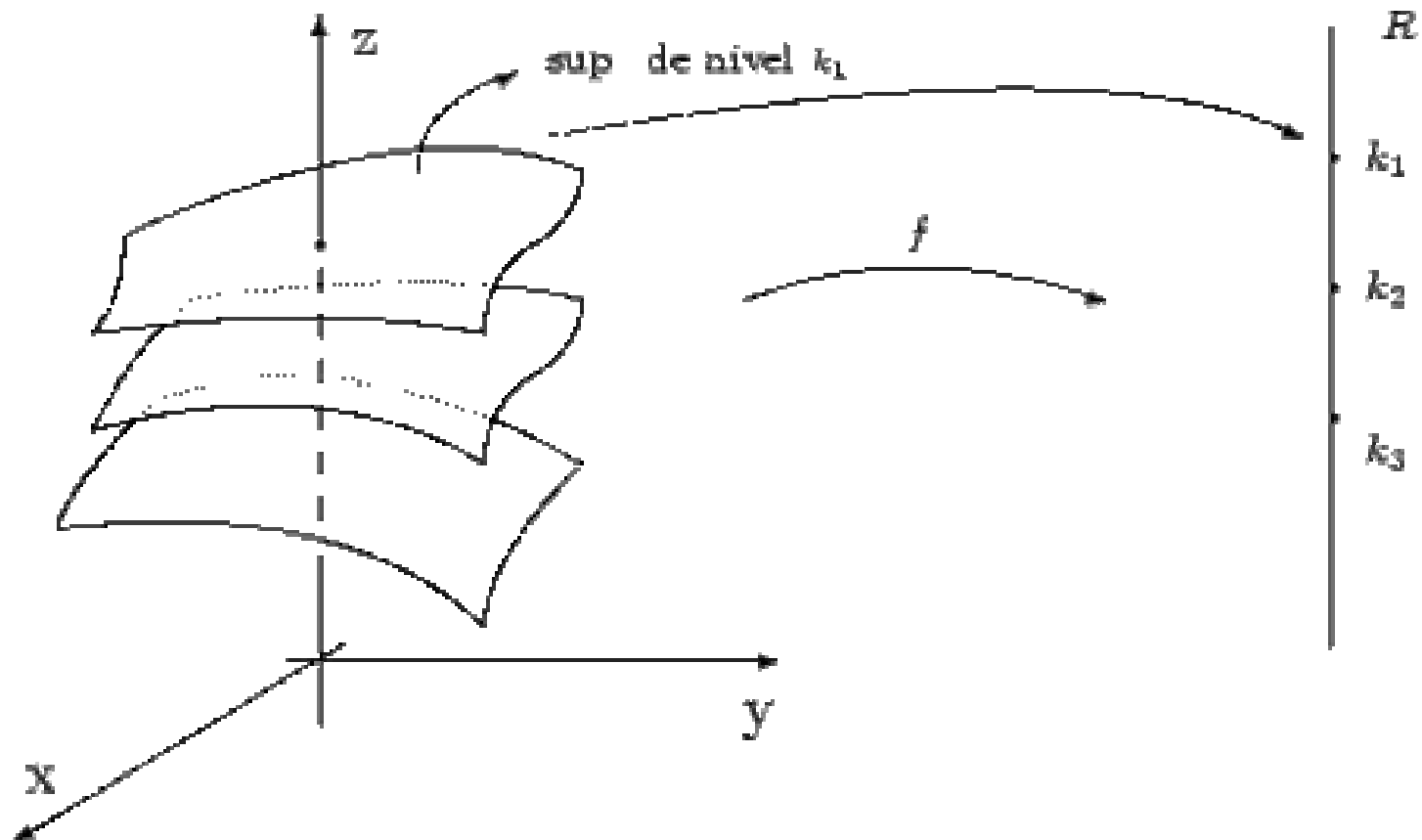
Se \mathbf{f} é uma função de três variáveis \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} então, por definição, as **superfícies de nível** de \mathbf{f} são os gráficos de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{k}$, para diferentes valores de \mathbf{k} .

$$f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Superfícies de nível $k : \{(x, y, z) \in A \text{ tal que } f(x, y, z) = k\}$.

Em aplicações, por exemplo, se $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ é a temperatura no ponto $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ então as superfícies de nível são chamadas **superfícies isotermas**. Se $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ representa potencial elas são chamadas **superfícies equipotenciais**.

Superfície de Nível



Exemplo

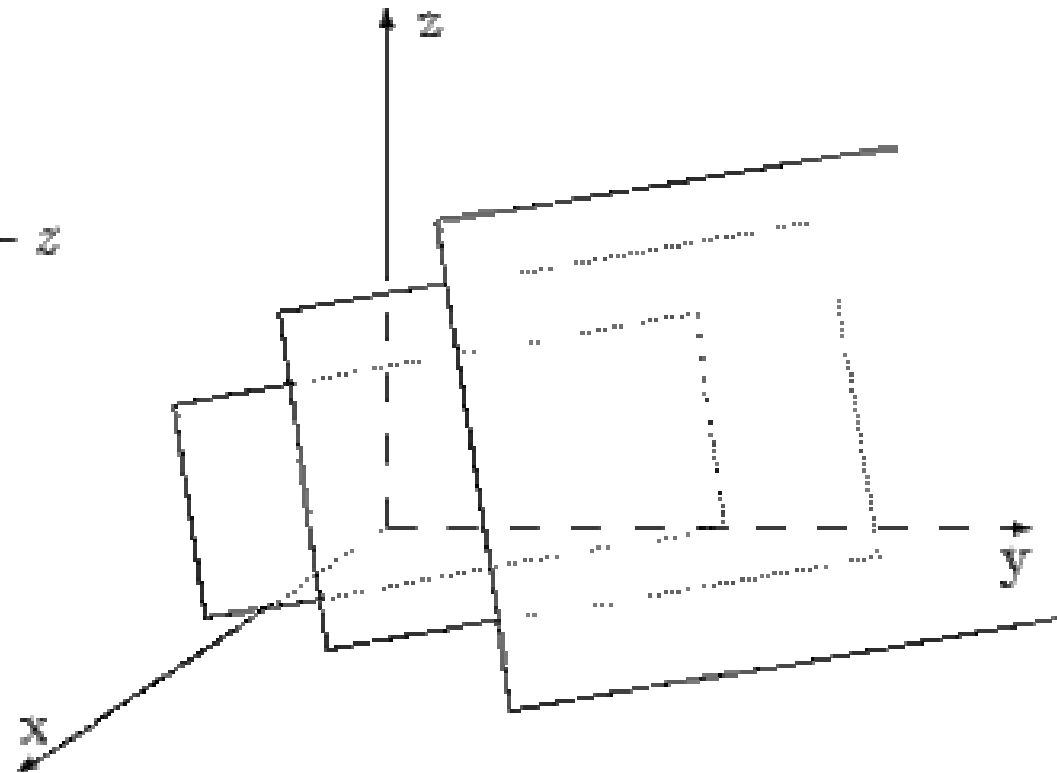
(1) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = 2x + y + z$$

superfícies de nível

$$2x + y + z = k$$

planos paralelos



Exemplo

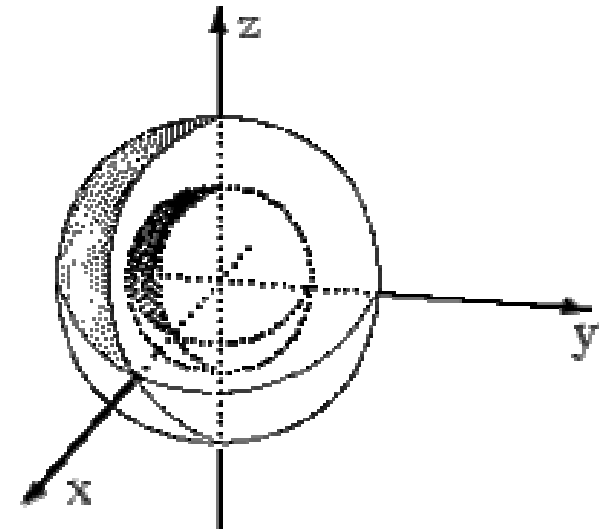
(2) $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

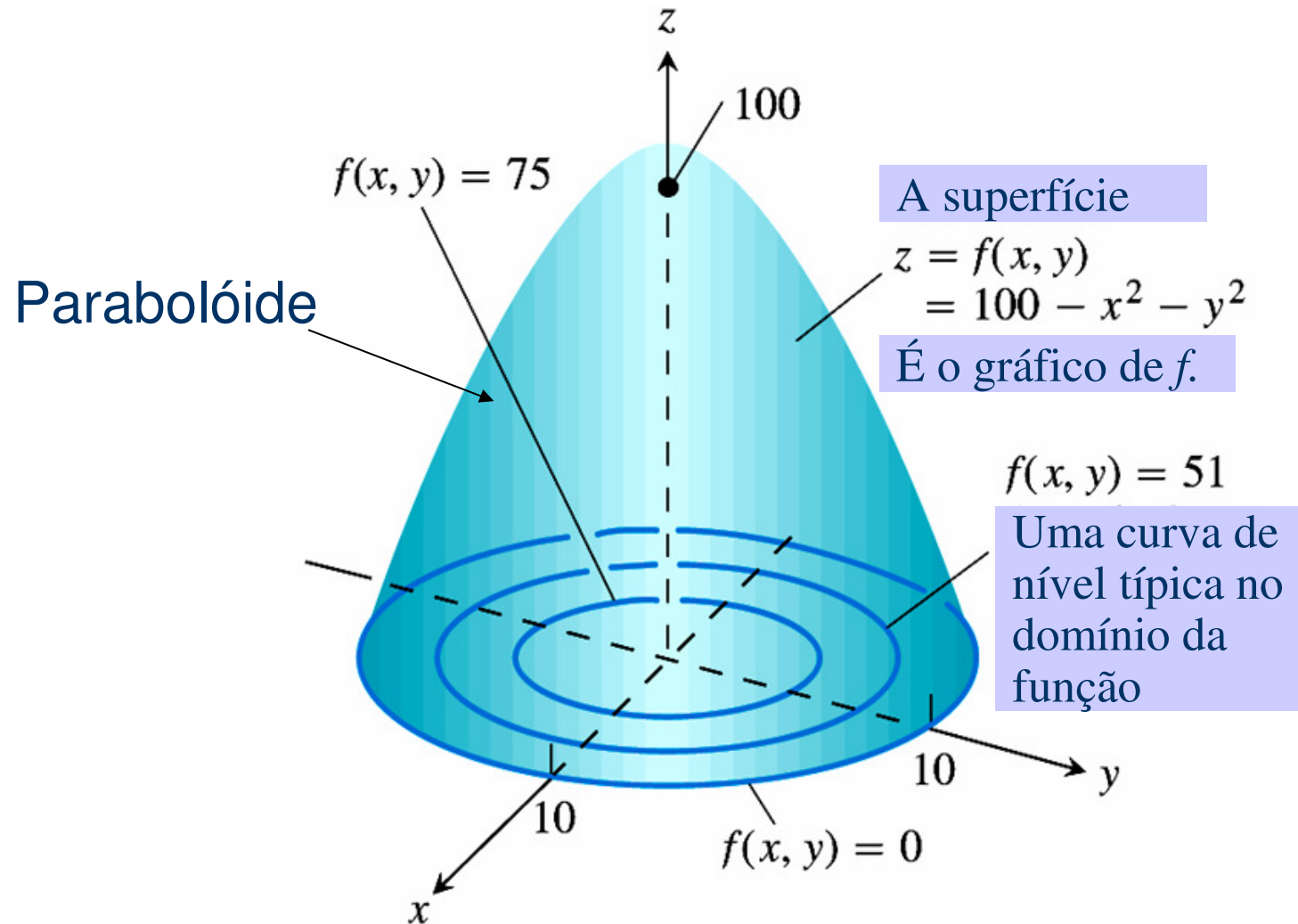
superfícies de nível

$$x^2 + y^2 + z^2 = k \geq 0$$

Superfícies esféricas de centro na origem

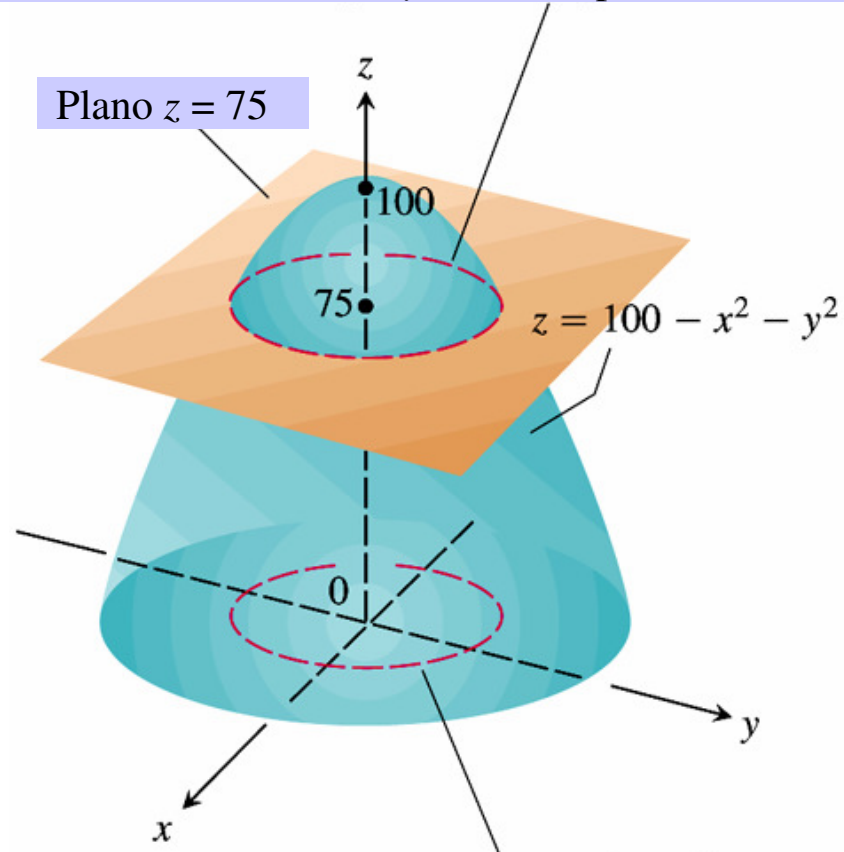


Superfície de Nível



Curvas de Nível X Curvas de Contorno

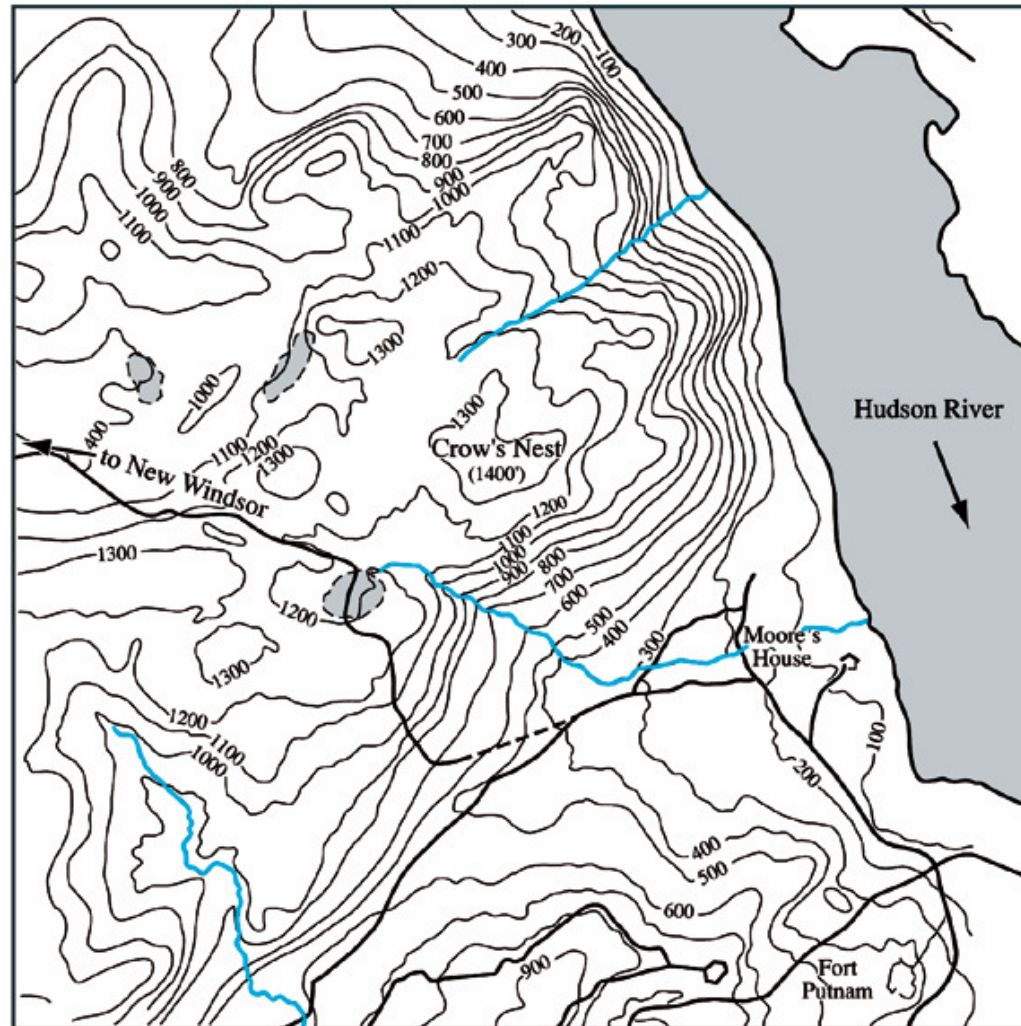
A curva de contorno $f(x,y) = 100 - x^2 + y^2 = 75$ é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$ no plano $z = 75$.



Traço: é a curva definida pelo encontro da superfície $f(x,y)$ com os planos xy , xz e yz .

A curva de nível $f(x,y) = 100 - x^2 + y^2 = 75$ é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$ no plano xy .

Curvas de Nível



Bibliografia

- Abel Gomes, Irina Voiculescu, Joaquim Jorge, Brian Wyvill, Callum Galbraith
Implicit Curves and Surfaces: Mathematics, Data Structures and Algorithms, Springer, 2009
- **“Computer Graphics: Principles and Practice”**, Foley, van Dam, Feiner and Hughes; Capítulo 11
- **“3D Computer Graphics”**, A. Watt, Capítulo 6