

(2) Construa o centro geométrico destes pontos, dado por

$$(x_c, y_c) = \left(\frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_{ij}, \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_{ij} \right)$$

e use-o como a solução aproximada do sistema original.

Utilize este algoritmo para aproximar a solução do sistema

$$x + y = 2$$

$$x - 2y = -2$$

$$3x - y = 3$$

e compare o resultado com o obtido nesta seção.

T2. (Para leitores que estudaram Cálculo.) Dado o conjunto de equações

$$a_k x + b_k y = c_k$$

para $k = 1, 2, 3, \dots, n$ (com $n > 2$), vamos considerar o seguinte algoritmo de mínimos quadrados para obter uma solução aproximada (x^*, y^*) do sistema. Dados um ponto (α, β) e a reta $a_i x + b_i y = c_i$, a distância deste ponto a esta reta é dada por

$$\frac{|a_i \alpha + b_i \beta - c_i|}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}$$

Se nós definirmos uma função $f(x, y)$ por

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{(a_i x + b_i y - c_i)^2}{a_i^2 + b_i^2}$$

e então determinarmos o ponto (x^*, y^*) que minimiza esta função, obteremos o ponto que está *mais próximo* de cada uma destas retas, no sentido de soma de mínimos quadrados. Mostre que x^* e y^* são soluções do sistema

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_i^2 + b_i^2} \right) x^* + \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{a_i^2 + b_i^2} \right) y^* = \sum_{i=1}^n \frac{a_i c_i}{a_i^2 + b_i^2}$$

e

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{a_i^2 + b_i^2} \right) x^* + \left(\sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{a_i^2 + b_i^2} \right) y^* = \sum_{i=1}^n \frac{b_i c_i}{a_i^2 + b_i^2}$$

Aplique este algoritmo ao sistema

$$x + y = 2$$

$$x - 2y = -2$$

$$3x - y = 3$$

e compare o resultado com o obtido nesta seção.

11.14 FRACTAIS

Nesta seção iremos utilizar certas classes de transformações lineares para descrever e gerar conjuntos intrincados no plano euclidiano. Estes conjuntos, denominados *fractais*, são atualmente o foco de muita pesquisa matemática e científica.

PRÉ-REQUISITOS: Geometria de Operadores Lineares de R^2 (Seção 9.2)
Espaço Euclidiano R^n
Logaritmos Naturais
Compreensão Intuitiva de Limites

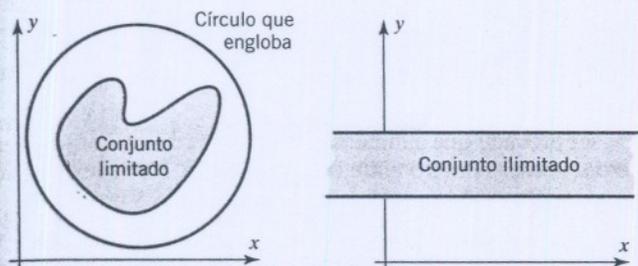
Fractais no Plano Euclidiano Na Matemática do final do século dezenove e do início do século vinte começaram a

aparecer vários conjuntos bizarros e estranhos de pontos do plano euclidiano. Embora tenham sido considerados curiosidades matemáticas, estes conjuntos, denominados *fractais*, estão crescendo rapidamente em importância. Hoje reconhecemos que eles revelam uma regularidade em fenômenos físicos e biológicos que anteriormente eram descartados como "aleatórios", "com ruído" ou "caóticos." Por exemplo, os fractais estão ao nosso redor nos formatos de nuvens, montanhas, litorais, árvores e samambaias.

Nesta seção nós damos uma breve descrição de certos tipos de fractais no plano euclidiano R^2 . Muito desta descrição é devido a dois matemáticos, Benoit B. Mandelbrot e Michael Barnsley, ambos pesquisadores ativos nesta área.

Conjuntos Auto-Similares Para começar nosso estudo de fractais, nós precisamos introduzir alguma terminologia de conjuntos em R^2 . Dizemos que um conjunto em R^2 é *limitado* se puder ser englobado em um círculo suficientemente grande

(Figura 11.14.1) e dizemos que um conjunto é **fechado** se contém todos os seus pontos de fronteira (Figura 11.14.2). Dois conjuntos em R^2 são ditos **congruentes** se pudermos fazê-los coincidir exatamente usando translações e rotações apropriadas do plano (Figura 11.14.3). Nós também vamos contar com a percepção intuitiva do leitor de distinguir entre conjuntos **sobrepostos** e **não-sobrepostos**, conforme ilustrado na Figura 11.14.4.



(a) Um conjunto englobado por um círculo. (b) Este conjunto não pode ser englobado por nenhum círculo.

Figura 11.14.1

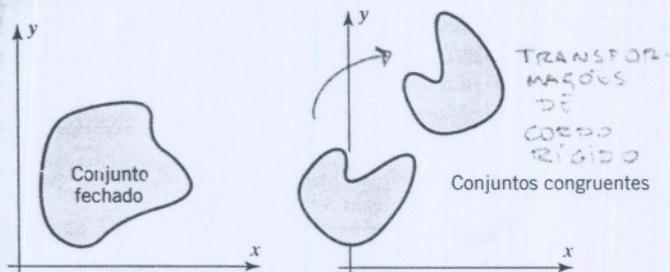


Figura 11.14.2 Os pontos de fronteira (linha mais forte) fazem parte do conjunto.

Figura 11.14.3

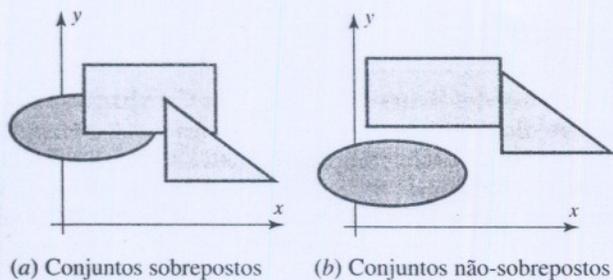


Figura 11.14.4

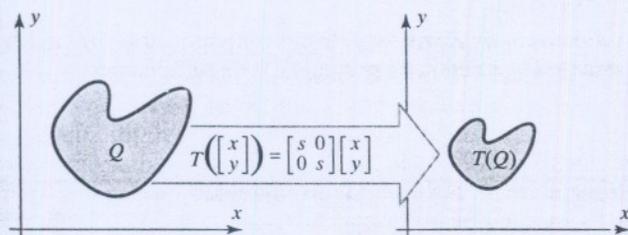


Figura 11.14.5 Uma contração de Q .

Se $T: R^2 \rightarrow R^2$ é o operador linear que modifica a escala por um fator s (veja a Tabela 8 da Seção 4.2) e se Q é um conjunto em R^2 , então o conjunto $T(Q)$, ou seja, o conjunto formado pelas imagens dos pontos de Q por T , é chamado uma **dilatação** do conjunto Q se $s > 1$ e uma **contração** de Q se $0 < s < 1$ (Figura 11.14.5). Em ambos casos, dizemos que $T(Q)$ é uma **homotetia** de Q de razão s .

Os tipos de fractais que nós vamos considerar inicialmente são **auto-similares**. Em geral, definimos um conjunto auto-similar do R^2 como segue:

Definição

Um subconjunto fechado e limitado do plano euclidiano R^2 é dito **auto-similar** se pode ser descrito da forma

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_k \quad (1)$$

onde $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$ são conjuntos não-sobrepostos, cada um dos quais é congruente à contração de S pelo mesmo fator s ($0 < s < 1$).

Se S é um conjunto auto-similar, então (1) é chamada, às vezes, a **decomposição** de S em conjuntos congruentes não-sobrepostos.

EXEMPLO 1 Um Segmento de Reta

Um segmento de reta em R^2 (Figura 11.14.6a) pode ser expresso como a união de dois segmentos de reta congruentes e não-sobrepostos (Figura 11.14.6b). Na Figura 11.14.6b nós separamos ligeiramente os dois segmentos de reta para facilitar sua visualização. Cada um destes dois segmentos menores é congruente à contração do segmento original pelo fator de $\frac{1}{2}$. Deste modo, um segmento de reta é um conjunto auto-similar com $k = 2$ e $s = \frac{1}{2}$.



Figura 11.14.6

EXEMPLO 2 Um Quadrado

Um quadrado em R^2 (Figura 11.14.7a) pode ser expresso como a união de quatro quadrados congruentes e não-sobrepostos (Figura 11.14.7b), onde novamente separamos ligeiramente os quatro quadrados. Cada um dos quatro quadrados é congruente à contração do quadrado original pelo fator de $\frac{1}{2}$. Deste modo, um quadrado é um conjunto auto-similar com $k = 4$ e $s = \frac{1}{2}$.

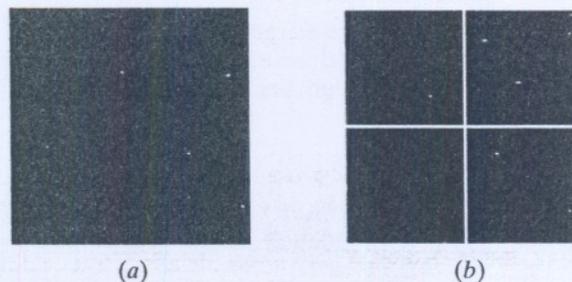


Figura 11.14.7

EXEMPLO 3 O Tapete de Sierpinski

O conjunto sugerido na Figura 11.14.8a foi descrito primeiro pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882–1969). Este conjunto pode ser expresso como a união de oito subconjuntos congruentes e não-sobrepostos (Figura 11.14.8b), cada um dos quais é congruente à contração do conjunto original pelo fator de $\frac{1}{3}$. Deste modo, este conjunto é um conjunto auto-similar com $k = 8$ e $s = \frac{1}{3}$. Note que o padrão intrincado de quadrados dentro de quadrados continua para sempre em escala menor e menor (embora isto somente possa ser sugerido por uma figura como a dada). ♦

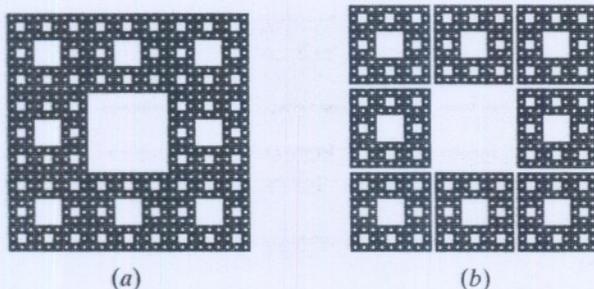


Figura 11.14.8

EXEMPLO 4 O Triângulo de Sierpinski

A Figura 11.14.9a ilustra um outro conjunto devido a Sierpinski. Este conjunto é um conjunto auto-similar com $k = 3$ e $s = \frac{1}{2}$ (Figura 11.14.9b). Como ocorre com o tapete de Sierpinski, o padrão intrincado de triângulos dentro de triângulos continua para sempre em escala menor e menor. ♦

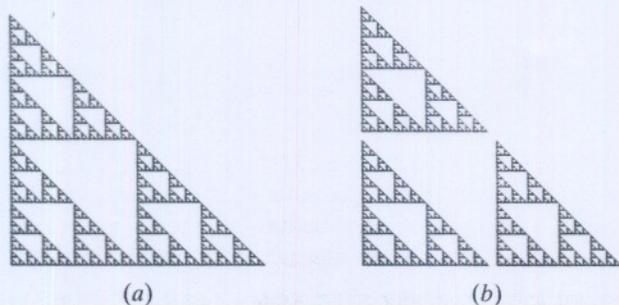


Figura 11.14.9

O tapete e o triângulo de Sierpinski têm uma estrutura mais complexa que o segmento de reta e o quadrado pois exibem um padrão que é repetido indefinidamente. Esta diferença será explorada mais adiante.

Dimensão Topológica de um Conjunto Na Seção 5.4 nós definimos a dimensão de um *subespaço* de um espaço vetorial como o número de vetores de uma base e descobrimos que esta definição coincide com nossa idéia intuitiva de dimensão. Por exemplo, a origem de R^2 tem diinensão zero, as retas

pela origem são unidimensionais e o espaço R^2 todo é bidimensional. Esta definição de dimensão é um caso especial de um conceito mais geral, chamado *dimensão topológica*, que é aplicável a subconjuntos de R^n que não necessariamente são subespaços. Uma definição precisa deste conceito é estudada em um ramo da Matemática chamado *Topologia*. Embora esta definição fuja do escopo deste texto, podemos enunciar informalmente que

- um ponto em R^2 tem dimensão topológica zero;
- uma curva em R^2 tem dimensão topológica um;
- uma região em R^2 tem dimensão topológica dois.

Podemos provar que a dimensão topológica de um conjunto em R^n é um número inteiro entre 0 e n , inclusive. Neste texto denotaremos a dimensão topológica de um conjunto S por $d_T(S)$.

EXEMPLO 5 Dimensão Topológica de Conjuntos

A Tabela 1 dá a dimensão topológica de cada um dos conjuntos estudados nos exemplos anteriores. Os primeiros dois resultados desta tabela são intuitivamente evidentes mas não os dois últimos. Enunciado informalmente, ambos o tapete e o triângulo de Sierpinski têm tantos “buracos” que mais parecem estruturas de redes de segmentos de retas do que regiões do plano e assim têm dimensão topológica um. A prova disto é bastante difícil. ♦

TABELA 1

Conjunto S	$d_T(S)$
Segmento de linha	1
Quadrado	2
Tapete de Sierpinski	1
Triângulo de Sierpinski	1

Dimensão de Hausdorff de um Conjunto Auto-Similar Em 1919, o matemático alemão Felix Hausdorff (1868–1942) deu uma definição alternativa para a dimensão de conjuntos arbitrários de R^n . Sua definição é bastante complicada, mas para conjuntos auto-similares reduz-se a algo bem simples:

Definição

A *dimensão de Hausdorff* de um conjunto auto-similar S do formato (1) é denotada por $d_H(S)$ e é definida por

$$d_H(S) = \frac{\ln k}{\ln(1/s)} \tag{2}$$

Neta definição, “ln” denota a função logaritmo natural. A Equação (2) também pode ser escrita como

$$s^{d_H(S)} = \frac{1}{k} \quad (3)$$

na qual a dimensão de Hausdorff $d_H(S)$ aparece como um expoente. A Fórmula (3) é mais útil para interpretar o conceito de dimensão de Hausdorff; esta fórmula diz, por exemplo, que se contrairmos um conjunto por um fator de $s = \frac{1}{2}$, então sua área (ou, mais corretamente, sua *medida*) decrescerá por um fator de $(\frac{1}{2})^{d_H(S)}$. Assim, contraindo um segmento de reta por um fator de $\frac{1}{2}$, sua medida (comprimento) diminuirá por um fator de $(\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{2}$ e contraindo uma região quadrada por um fator de $\frac{1}{2}$, sua medida (área) diminuirá por um fator de $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

Antes de passar para os exemplos, devemos apresentar alguns fatos sobre a dimensão de Hausdorff:

- As dimensões topológica e de Hausdorff de um conjunto não precisam coincidir.
- A dimensão de Hausdorff de um conjunto não precisa ser um número inteiro.
- A dimensão topológica de um conjunto é menor do que ou igual à dimensão de Hausdorff, ou seja, $d_T(S) \leq d_H(S)$.

EXEMPLO 6 Dimensão de Hausdorff de Conjuntos

A Tabela 2 dá a dimensão de Hausdorff de cada um dos conjuntos estudados nos exemplos anteriores.

TABELA 2

Conjunto S	s	k	$d_H(S) = \frac{\ln k}{\ln(1/s)}$
Segmento de linha	$\frac{1}{2}$	2	$\ln 2 / \ln 2 = 1$
Quadrado	$\frac{1}{2}$	4	$\ln 4 / \ln 2 = 2$
Tapete de Sierpinski	$\frac{1}{3}$	8	$\ln 8 / \ln 3 = 1,892 \dots$
Triângulo de Sierpinski	$\frac{1}{2}$	3	$\ln 3 / \ln 2 = 1,584 \dots$

Fractais Comparando as Tabelas 1 e 2, nós vemos que as dimensões de Hausdorff e topológica coincidem para o segmento de reta e para o quadrado, mas são desiguais para o tapete e o triângulo de Sierpinski. Em 1977, Benoit B. Mandelbrot indicou que conjuntos para os quais a dimensão topológica e a de Hausdorff diferem devem ser bem complicados (como Hausdorff já havia sugerido antes, em 1919). Mandelbrot propôs chamar tais conjuntos de *fractais* e ofereceu a seguinte definição.

Definição

Um *fractal* é um subconjunto de um espaço euclidiano cujas dimensões de Hausdorff e topológica não são iguais.

Mandelbrot também alertou que esta definição é bastante restritiva e que provavelmente será substituída no futuro; enquanto isto, permanece como uma definição formal de fractal. De acordo com esta definição, o tapete e o triângulo de Sierpinski são fractais, enquanto o segmento de reta e o quadrado não são fractais.

Segue da definição precedente que um conjunto cuja dimensão de Hausdorff não é um número inteiro deve ser um fractal (por que?). Contudo, veremos adiante que a recíproca não é verdadeira, ou seja, é possível um fractal ter dimensão de Hausdorff inteira.

Semelhanças Nós veremos agora como algumas técnicas de Álgebra Linear podem ser usadas para gerar fractais. Esta abordagem também conduz a algoritmos que podem ser explorados para desenhar fractais com computadores. Começamos com uma definição.

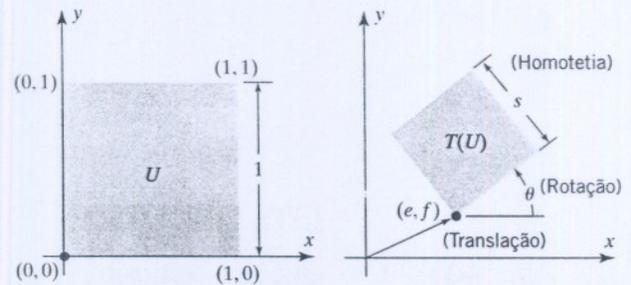
Definição

Uma *semelhança* de razão s , ou com fator de escala s , é uma aplicação de R^2 em R^2 da forma

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = s \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

onde s , θ , e e f são escalares.

Geometricamente, uma semelhança é composta de três aplicações mais simples: uma homotetia de razão s , uma rotação em torno da origem por um ângulo θ e uma translação (com e unidades na direção x e f unidades na direção y). A Figura 11.14.10 ilustra o efeito de uma semelhança sobre o quadrado unitário U .



(a) O quadrado unitário.

(b) A imagem do quadrado unitário pela semelhança.

Figura 11.14.10

Para as nossas aplicações a fractais nós somente utilizaremos semelhanças *contrativas*, com o que queremos dizer que a razão s da semelhança está restrita ao intervalo $0 < s < 1$. Conseqüentemente, quando nos referirmos a semelhanças, nós

sempre estaremos pensando em semelhanças sujeitas a esta restrição.

As semelhanças são importantes no estudo de fractais por causa do seguinte fato:

Se $T: R^2 \rightarrow R^2$ é uma semelhança de razão s se S é um conjunto fechado e limitado em R^2 , então a imagem $T(S)$ do conjunto S por T é congruente à contração de S pelo fator s .

Lembre da definição de conjuntos auto-similares em R^2 que um conjunto fechado e limitado S em R^2 é dito auto-similar se pode ser descrito da forma

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_k$$

onde $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$ são conjuntos não-sobrepostos, cada um dos quais é congruente à contração de S pelo mesmo fator s ($0 < s < 1$) [veja (1)]. Nos próximos exemplos nós vamos obter as semelhanças que produzem os conjuntos $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$ a partir de S para o segmento de reta, o quadrado, o tapete e o triângulo de Sierpinski.

EXEMPLO 7 Um Segmento de Ret

O nosso segmento de reta em R^2 será o segmento de reta S ligando os pontos $(0, 0)$ e $(1, 0)$ do plano xy (Figura 11.14.11a). Considere as duas semelhanças

$$\begin{aligned} T_1 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ T_2 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

ambas com $s = \frac{1}{2}$ e $\theta = 0$. Na Figura 11.14.11b nós mostramos o efeito destas duas semelhanças sobre o quadrado unitário U . A semelhança T_1 leva U sobre o quadrado menor $T_1(U)$ e a semelhança T_2 leva U sobre o quadrado menor $T_2(U)$. Simultaneamente, T_1 leva o segmento de reta S sobre o segmento menor $T_1(S)$ e T_2 leva o segmento de reta S sobre o segmento menor e não-sobreposto $T_2(S)$. A união destes dois segmentos de reta menores e não-sobrepostos é precisamente o segmento de reta original S ; ou seja,

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \quad (5)$$

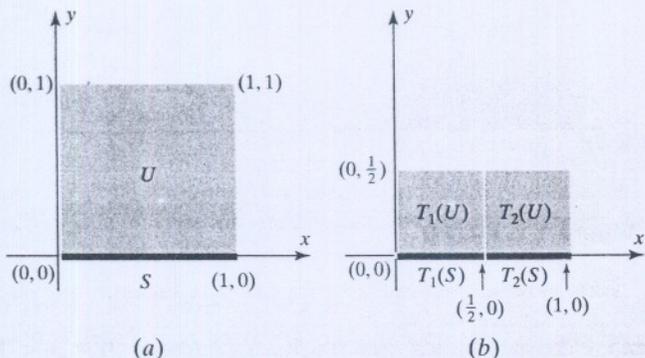


Figura 11.14.11

EXEMPLO 8 Um Quadrado

Vamos considerar o quadrado unitário U do plano xy (Figura 11.14.12a) e as quatro semelhanças a seguir, todas com $s = \frac{1}{2}$ e $\theta = 0$:

$$\begin{aligned} T_1 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ T_2 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ T_3 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ T_4 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

As imagens do quadrado unitário U por estas quatro semelhanças são os quatro quadrados mostrados na Figura 11.14.12b. Assim,

$$U = T_1(U) \cup T_2(U) \cup T_3(U) \cup T_4(U) \quad (7)$$

é uma decomposição de U em quatro quadrados não-sobrepostos que são congruentes à contração de U pelo mesmo fator ($s = \frac{1}{2}$).

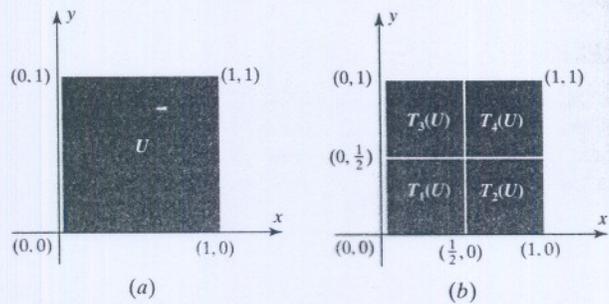


Figura 11.14.12

EXEMPLO 9 O Tapete de Sierpinski

Vamos considerar um tapete de Sierpinski S sobre o quadrado unitário U do plano xy (Figura 11.14.13a) e as oito semelhanças a seguir, cada uma tendo $s = \frac{1}{3}$ e $\theta = 0$:

$$T_i \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 8 \quad (8)$$

onde os oito valores de $\begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$ são

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

As imagens de S por estas oito semelhanças são os oito conjuntos mostrados na Figura 11.14.13b. Assim,

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S) \cup \dots \cup T_8(S) \quad (9)$$

é uma decomposição de S em oito conjuntos não-sobrepostos que são congruentes à contração de S pelo mesmo fator ($s = \frac{1}{3}$). ♦

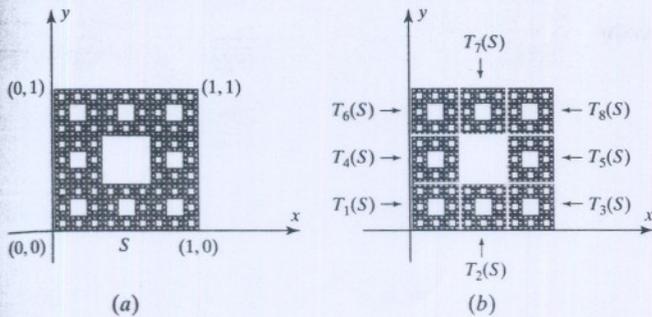


Figura 11.14.13

EXEMPLO 10 O Triângulo de Sierpinski

Vamos considerar um triângulo de Sierpinski S encaixado no quadrado unitário U do plano xy , como ilustrado na Figura 11.14.14a e as três semelhanças a seguir, cada uma tendo $s = \frac{1}{2}$ e $\theta = 0$:

$$\begin{aligned} T_1 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ T_2 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ T_3 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

As imagens de S por estas três semelhanças são os três conjuntos na Figura 11.14.14b. Assim,

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S) \quad (11)$$

é uma decomposição de S em três conjuntos não-sobrepostos que são congruentes à contração de S pelo mesmo fator ($s = \frac{1}{2}$). ♦

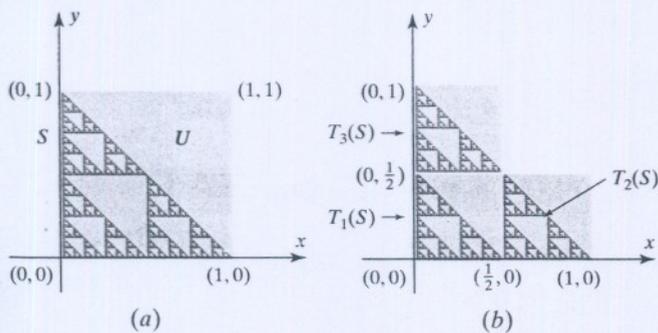


Figura 11.14.14

Nos exemplos acima nós começamos com um conjunto específico S e mostramos sua auto-similaridade encontrando semelhanças $T_1, T_2, T_3, \dots, T_k$ de mesma razão e tais que $T_1(S), T_2(S), T_3(S), \dots, T_k(S)$ são conjuntos não-sobrepostos com

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S) \cup \dots \cup T_k(S) \quad (12)$$

O teorema seguinte ataca o problema recíproco de determinar um conjunto auto-similar a partir de uma coleção de semelhanças.

Teorema 11.14.1

Se $T_1, T_2, T_3, \dots, T_k$ são semelhanças contrativas de mesma razão, então existe um único conjunto não-vazio, fechado e limitado S do plano euclidiano tal que

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S) \cup \dots \cup T_k(S)$$

Além disto, se os conjuntos $T_1(S), T_2(S), T_3(S), \dots, T_k(S)$ são não-sobrepostos, então S é auto-similar.

Algoritmos para Gerar Fractais Em geral, não existe uma maneira simples de obter diretamente o conjunto S do teorema precedente. Nós agora descreveremos um procedimento iterativo que determina S a partir das semelhanças que o definem. Primeiro damos um exemplo do procedimento e depois damos o algoritmo para o caso geral.

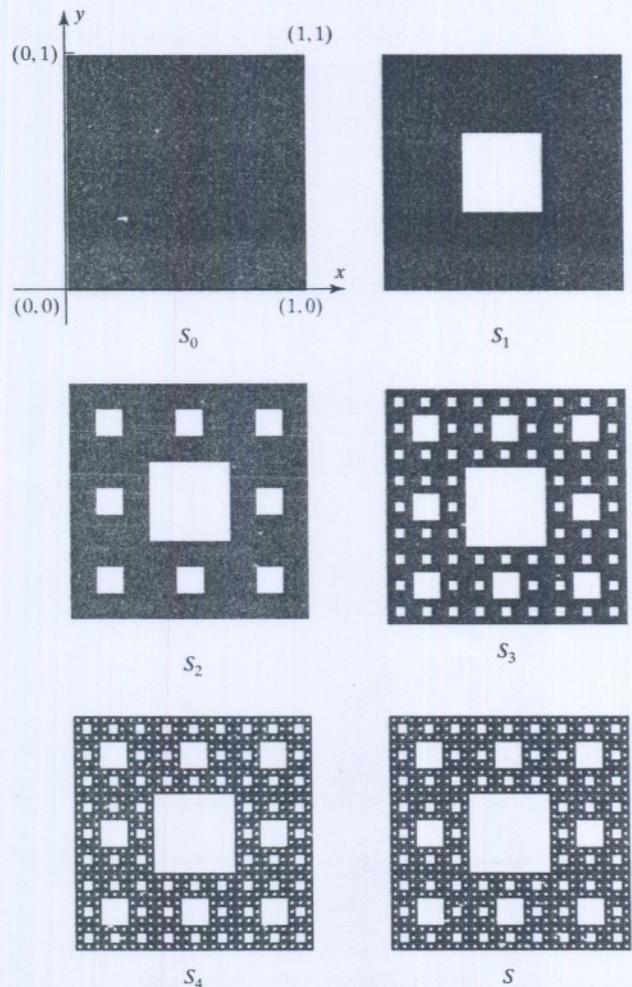


Figura 11.14.15

EXEMPLO 11 O Tapete de Sierpinski

A Figura 11.14.15 mostra o quadrado unitário S_0 do plano xy que serve de conjunto “inicial” de um procedimento iterativo para a construção do tapete de Sierpinski. O conjunto S_1 na figura é o resultado de aplicar a S as oito semelhanças T_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) de (8) que determinam o tapete de Sierpinski. Este conjunto S_1 consiste de oito regiões quadradas, cada uma de lado de comprimento $\frac{1}{3}$, circundando um quadrado central vazio. Em seguida aplicamos as oito semelhanças a S_1 e obtemos o conjunto S_2 . Analogamente, aplicando as oito semelhanças a S_2 resulta o conjunto S_3 . Se nós continuarmos este processo indefinidamente, a seqüência de conjuntos S_1, S_2, S_3, \dots “convergirá” a um conjunto S que é o tapete de Sierpinski. ♦

OBSERVAÇÃO. Embora devêssemos dar uma definição formal do que significa uma seqüência de conjuntos “convergir” a um conjunto, uma interpretação intuitiva é suficiente para este tratamento introdutório.

Embora na Figura 11.14.15 tenhamos começado com o quadrado unitário para chegar ao tapete de Sierpinski, nós poderíamos ter começado com qualquer conjunto não-vazio S_0 . A única restrição sobre o conjunto S_0 é que ele deve ser fechado e limitado. Por exemplo, se nós começarmos com o conjunto S_0 específico mostrado na Figura 11.14.16, então o conjunto S_1 na figura é o conjunto obtido aplicando cada uma das oito semelhanças de (8). Aplicando as oito semelhanças a S_1 obtemos o conjunto S_2 . Como antes, aplicando as oito semelhanças indefinidamente, produz o tapete de Sierpinski como conjunto-limite.

O algoritmo geral ilustrado no exemplo precedente é o seguinte: Sejam $T_1, T_2, T_3, \dots, T_k$ semelhanças contrativas de mesma razão e, para um conjunto arbitrário Q qualquer em R^2 , defina o conjunto $\mathfrak{J}(Q)$ por

$$\mathfrak{J}(Q) = T_1(Q) \cup T_2(Q) \cup T_3(Q) \cup \dots \cup T_k(Q)$$

O algoritmo a seguir gera uma seqüência de conjuntos $S_0, S_1, \dots, S_n, \dots$ que converge ao conjunto S do Teorema 11.14.1.

Algoritmo 1

Passo 0. Escolha um conjunto S_0 não-vazio, fechado e limitado em R^2 .

Passo 1. Calcule $S_1 = \mathfrak{J}(S_0)$.

Passo 2. Calcule $S_2 = \mathfrak{J}(S_1)$.

Passo 3. Calcule $S_3 = \mathfrak{J}(S_2)$.

⋮

Passo n. Calcule $S_n = \mathfrak{J}(S_{n-1})$.

⋮

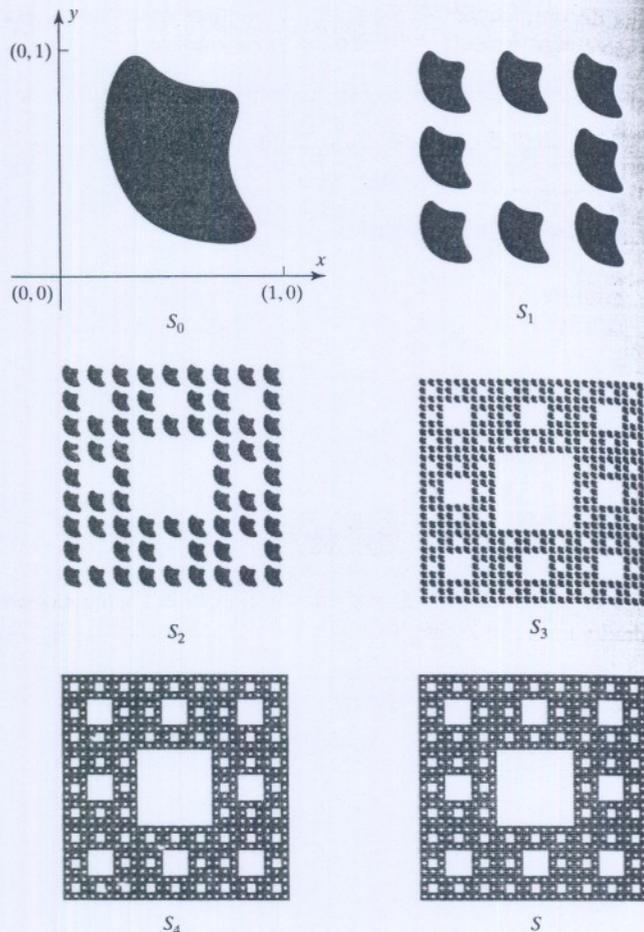


Figura 11.14.16

EXEMPLO 12 O Triângulo de Sierpinski

Vamos construir o triângulo de Sierpinski determinado pelas três semelhanças dadas em (10). A aplicação de conjuntos correspondente é $\mathfrak{J}(Q) = T_1(Q) \cup T_2(Q) \cup T_3(Q)$. A Figura 11.14.17 mostra um conjunto arbitrário S_0 não-vazio, fechado e limitado em R^2 , as quatro primeiras iteradas S_1, S_2, S_3, S_4 e o conjunto-limite S (o triângulo de Sierpinski). ♦

EXEMPLO 13 Usando o Algoritmo 1

Considere as duas semelhanças a seguir:

$$T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

A ação destas duas semelhanças no quadrado unitário U está ilustrada na Figura 11.14.18.

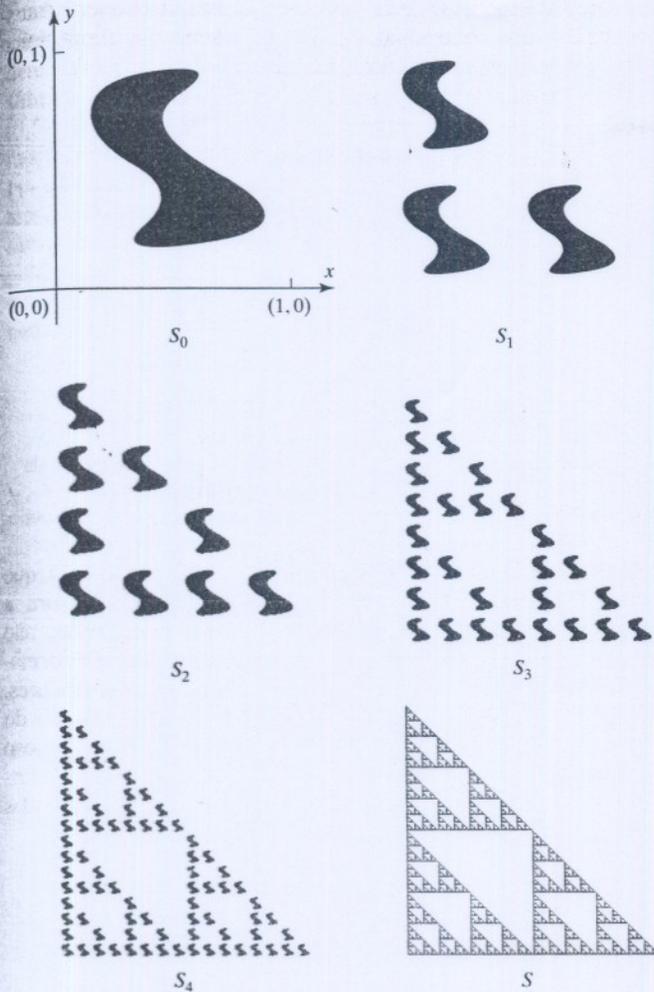


Figura 11.14.17

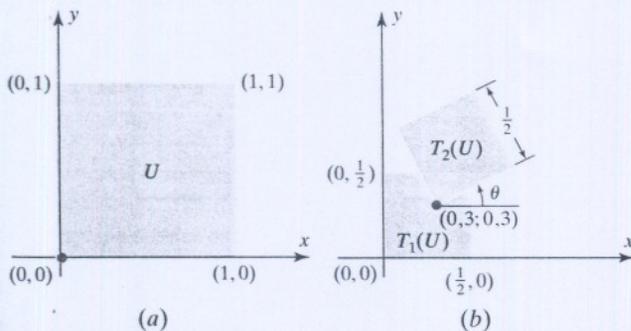


Figura 11.14.18

Aqui, o ângulo de rotação θ é um parâmetro que nós variamos para gerar diferentes conjuntos auto-similares. Os conjuntos auto-similares gerados por estas duas semelhanças aparecem na Figura 11.14.19 para vários valores de θ . Por simplicidade, deixamos de desenhar os eixos x e y mas a origem é sempre o ponto mais abaixo e à esquerda do conjunto. Estes conjuntos foram gerados em computador usando o Algoritmo 1 para os valores de θ indicados. Como $k = 2$ e $s = \frac{1}{2}$, segue de (2) que a dimensão de Hausdorff destes conjuntos é 1 para cada valor de θ . Pode ser mostrado que a dimensão topológica destes conjun-

tos é 1 para o caso $\theta = 0$ e é 0 para todos os demais valores de θ . Segue-se que o conjunto auto-similar para $\theta = 0$ não é um fractal [é o segmento de reta de $(0, 0)$ a $(0,6; 0,6)$], enquanto que os conjuntos auto-similares para todos os demais valores de θ são fractais. Em particular, são exemplos de fractais com dimensão de Hausdorff inteira. ♦

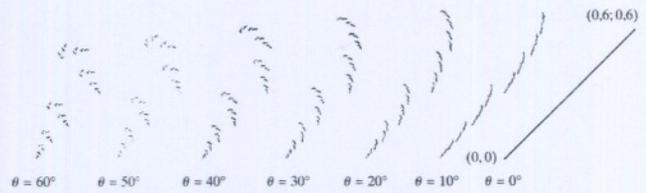


Figura 11.14.19

Uma Abordagem Monte Carlo A abordagem descrita no Algoritmo 1 para construir conjuntos auto-similares usando funções de conjuntos consome muito tempo de computador, pois as semelhanças envolvidas devem ser aplicadas a cada um dos muitos pixels de uma tela de monitor em cada iteração. Em 1985, Michael Barnsley descreveu um método alternativo e mais prático para gerar um conjunto auto-similar através de suas semelhanças. É um assim chamado *método de Monte Carlo* que utiliza probabilidades e Barnsley se refere a ele como o *Algoritmo da Iteração Aleatória*.

Sejam $T_1, T_2, T_3, \dots, T_k$ semelhanças contrativas de mesma razão. O próximo algoritmo gera uma seqüência de pontos

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \dots$$

que converge ao conjunto S do Teorema 11.14.1.

Algoritmo 2

Passo 0. Escolha um ponto arbitrário $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ em S .

Passo 1. Escolha aleatoriamente uma das k semelhanças, digamos T_{k_1} , e calcule

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = T_{k_1} \left(\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \right)$$

Passo 2. Escolha aleatoriamente uma das k semelhanças, digamos T_{k_2} , e calcule

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = T_{k_2} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right)$$

⋮

Passo n. Escolha aleatoriamente uma das k semelhanças, digamos T_{k_n} , e calcule

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = T_{k_n} \left(\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \right)$$

⋮

Os pixels correspondentes aos pontos gerados por este algoritmo preenchem os pixels que representam o conjunto-limite S numa tela de monitor.

A Figura 11.14.20 mostra quatro estágios do Algoritmo de Iteração Aleatória que gera o tapete de Sierpinski começando com o ponto inicial $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

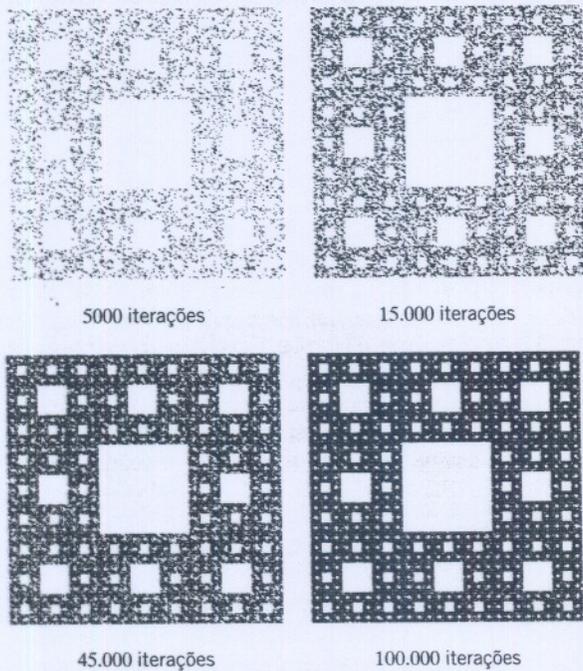


Figura 11.14.20

OBSERVAÇÃO. Embora o Passo 0 requeira a escolha de um ponto do conjunto S que pode até nem ser conhecido antes, isto não é um problema sério. Na prática, podemos geralmente começar com qualquer ponto do \mathbb{R}^2 e, depois de umas poucas iterações (digamos, umas 10 iterações) o ponto gerado vai estar tão próximo de S que o algoritmo funciona corretamente daí em diante.

Fractais mais Gerais Até aqui discutimos fractais que são conjuntos auto-similares de acordo com a definição dada acima. No entanto, o Teorema 11.14.1 permanece válido se as semelhanças T_1, T_2, \dots, T_k são substituídas por transformações mais gerais, chamadas *transformações afins contrativas*. Uma transformação afim é definida como segue:

Definição

Uma *transformação afim* é uma aplicação de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 da forma

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

onde a, b, c, d, e e f são escalares.

A Figura 11.14.21 mostra como uma transformação afim leva o quadrado unitário sobre um paralelogramo $T(U)$. Uma transformação afim é dita *contrativa* se a distância euclidiana entre a imagem de dois pontos quaisquer do plano pela transformação é estritamente menor que a distância euclidiana origi-

nal entre estes pontos. Pode ser mostrado que quaisquer k transformações afins contrativas T_1, T_2, \dots, T_k determinam um único conjunto fechado e limitado S satisfazendo a equação

$$S = T_1(S) \cup T_2(S) \cup T_3(S) \cup \dots \cup T_k(S) \quad (13)$$

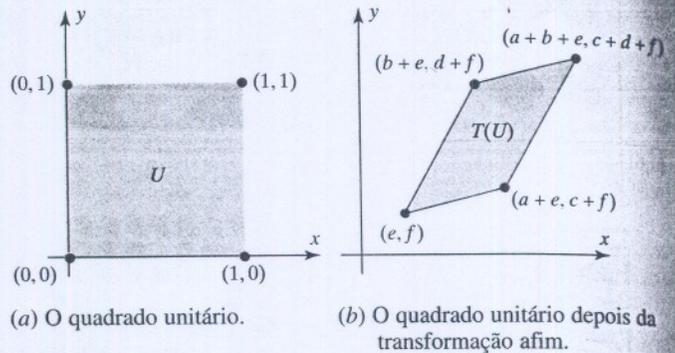


Figura 11.14.21

A Equação (13) tem o mesmo formato que a Equação (12), que utilizamos para definir conjuntos auto-similares. Embora a Equação (13), que usa transformações afins contrativas, não determine um conjunto auto-similar, o conjunto S que é formado tem muitas das características de conjuntos auto-similares. Por exemplo, a Figura 11.14.22 mostra como um conjunto do plano que parece uma samambaia (um exemplo tornado famoso por Barnsley) pode ser gerado por quatro transformações afins contrativas. Observe como a samambaia central é a união das

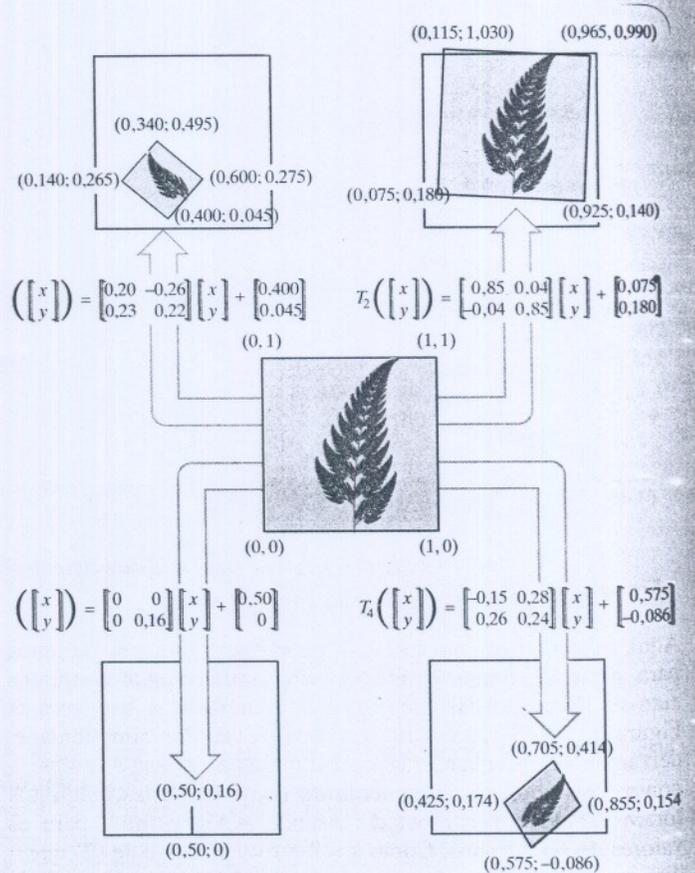


Figura 11.14.22

quatro samambaias menores que a cercam, que são imagens afins ligeiramente sobrepostas. Também note como T_3 , por ter determinante da parte matricial nulo, leva a samambaia inteira sobre o pequeno segmento de reta que liga os pontos $(0,50; 0)$ e $(0,50; 0,16)$. A Figura 11.14.22 contém muita riqueza de informação e deveria ser estudada cuidadosamente.

Michael Barnsley continua trabalhando nas aplicações desta teoria ao ramo de compressão e transmissão de dados. A samambaia, por exemplo, fica completamente determinada pelas quatro transformações afins T_1, T_2, T_3 e T_4 . Estas quatro transformações, por sua vez, ficam completamente determinadas pelos 24 números dados na Figura 11.14.22 que definem

seus valores de a, b, c, d, e e f . Dito de outra maneira, estes 24 números *codificam* completamente a imagem da samambaia. Armazenar estes 24 números em um computador requer consideravelmente menos espaço de memória do que armazenar uma descrição pixel por pixel da samambaia. Em princípio, qualquer imagem digitalizada em uma tela de monitor pode ser descrita por um número finito de transformações afins, embora não seja fácil determinar quais transformações devemos usar. Mesmo assim, uma vez codificadas, as transformações afins em geral requerem várias ordens de grandeza menos memória de computador do que uma descrição pixel por pixel da imagem digitalizada.

Leitura Recomendada

Os leitores interessados em aprender mais sobre fractais devem consultar os seguintes livros, o primeiro dos quais elabora a abordagem por transformações lineares apresentada nesta seção.

1. MICHAEL BARNSELY, *Fractals Everywhere* (Academic Press, Nova Iorque, 1993).
2. BENOIT B. MANDELBROT, *The Fractal Geometry of Nature* (W. H. Freeman, Nova Iorque, 1982).
3. HEINZ-OTTO PEITGEN e P. H. RICHTER, *The Beauty of Fractals* (Springer-Verlag, Nova Iorque, 1986).
4. HEINZ-OTTO PEITGEN e DIETMAR SAUPE, *The Science of Fractal Images* (Springer-Verlag, Nova Iorque, 1988).

Conjunto de Exercícios 11.14

1. O conjunto auto-similar da figura dada tem os tamanhos indicados. Sabendo que o canto inferior esquerdo está situado na origem do plano xy , encontre as semelhanças que determinam este conjunto. Qual é a dimensão de Hausdorff deste conjunto? Este conjunto é um fractal?
2. Encontre a dimensão de Hausdorff do conjunto auto-similar da figura dada. Use uma régua para medir a figura e determine um valor aproximado do fator de escala s deste conjunto. Quais são os ângulos de rotação das semelhanças que determinam este conjunto?

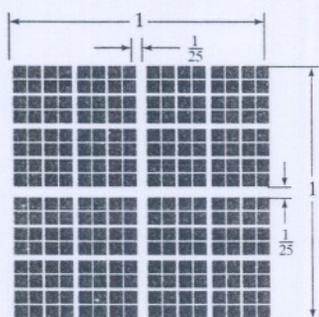
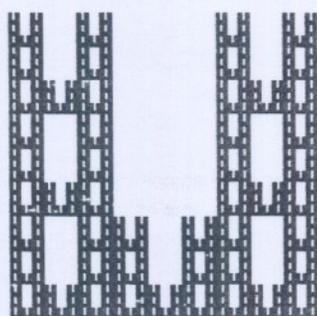


Figura Ex-1

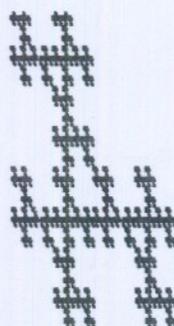


Figura Ex-2

3. Para cada um dos conjuntos auto-similares da figura dada, encontre: (i) a razão s das semelhanças que descrevem o conjunto; (ii) os ângulos de rotação θ de todas as semelhanças que descrevem o conjunto (todos os ângulos de rotação são múltiplos de 90°); e (iii) a dimensão de Hausdorff do conjunto. Quais destes conjuntos são fractais e por que?



(a)



(b)

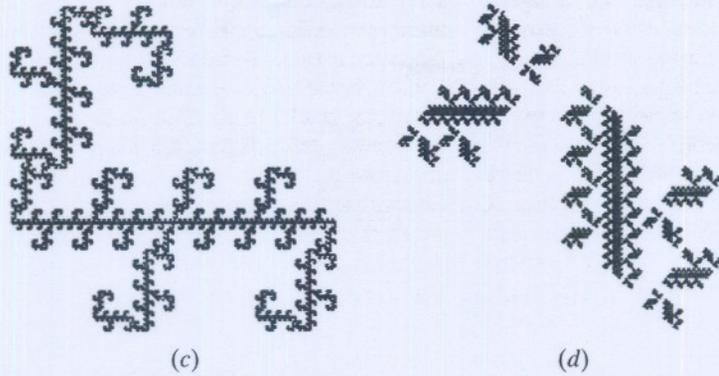


Figura Ex-3

4. Das quatro transformações afins mostradas na Figura 11.14.22, somente a transformação T_2 é uma semelhança. Encontre a razão s e o ângulo de rotação θ desta semelhança.
5. Encontre as coordenadas da pontinha da samambaia da Figura 11.14.22. [Sugestão. A transformação T_2 aplica a ponta da samambaia nela mesmo.]
6. O quadrado na Figura 11.14.7a foi expresso como a união de quatro quadrados não-sobrepostos indicados na Figura 11.14.7b. Suponha agora que o quadrado seja expresso como a união de 16 quadrados não-sobrepostos. Usando a Equação (2), verifique que sua dimensão de Hausdorff continua sendo 2.
7. Mostre que as quatro semelhanças

$$T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$T_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

dão o quadrado unitário como a união de quatro quadrados *sobrepostos*. Calcule o lado direito da Equação (2) para os valores de k e s determinados por estas semelhanças e mostre que o resultado não é o valor correto da dimensão de Hausdorff do quadrado. [Observação. Este exercício mostra a necessidade de exigir que os conjuntos sejam não-sobrepostos na definição de conjuntos auto-similares e suas dimensões de Hausdorff.]

8. Todos os resultados desta seção podem ser estendidos ao R^n . Calcule a dimensão de Hausdorff do cubo unitário em R^3 (veja a figura dada). Sabendo que a dimensão topológica do cubo é 3, decida se este cubo é um fractal. [Sugestão. Expresse o cubo unitário como a união de 8 cubos menores congruentes e não-sobrepostos.]

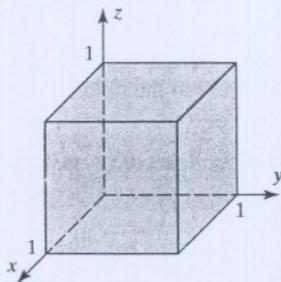


Figura Ex-8

9. O conjunto em R^3 da figura dada é um conjunto auto-similar obtido pela remoção de certos buracos cúbicos do cubo unitário e chamado a *esponja de Menger*. Observe que cada face da esponja de Menger é um tapete de Sierpinski e que os buracos do tapete de Sierpinski agora atravessam toda a esponja de Menger. Determine os valores de k e s para a esponja de Menger e obtenha sua dimensão de Hausdorff. A esponja de Menger é um fractal?

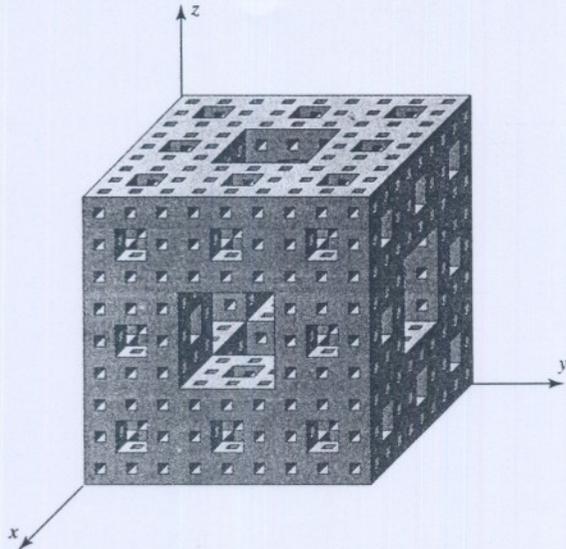


Figura Ex-9

10. As duas semelhanças

$$T_1 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T_2 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

determinam um fractal conhecido como *conjunto de Cantor*. Começando com o quadrado unitário U como conjunto inicial, esboce os quatro primeiros conjuntos determinados pelo Algoritmo 1. Em seguida obtenha a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor. (Este conjunto famoso foi o primeiro exemplo que Hausdorff forneceu, em seu artigo de 1919, de um conjunto cuja dimensão de Hausdorff não coincide com a dimensão topológica.)

11. Calcule as áreas dos conjuntos S_0, S_1, S_2, S_3 e S_4 da Figura 11.14.15.

Requisito: Recurso Computacional

Exercícios Computacionais 11.14

Os seguintes exercícios foram elaborados para serem resolvidos utilizando um recurso computacional. Em geral, este recurso é o MATLAB, Mathematica, Maple, Derive ou Mathcad, mas também pode ser um outro tipo de *software* de Álgebra Linear ou uma calculadora científica com funcionalidade de Álgebra Linear. Para cada exercício você deverá ler a documentação pertinente do recurso que estiver utilizando. O objetivo destes exercícios é fornecer uma competência básica na utilização do seu recurso computacional. Uma vez dominadas as técnicas nestes exercícios, você deverá ser capaz de usar seu recurso computacional para resolver também muitos dos problemas nos conjuntos de exercícios regulares.

T1. Use semelhanças da forma

$$T_i \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}$$

para mostrar que a esponja de Menger (Exercício 9) é o conjunto S dado por

$$S = \bigcup_{i=1}^{20} T_i(S)$$

para semelhanças T_i (com $i = 1, 2, 3, \dots, 20$) convenientemente escolhidas. Determine estas semelhanças determinando a coleção de matrizes 3×1

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, 20 \right\}$$

T2. Generalize ao R^n as idéias envolvidas no conjunto de Cantor (em R^1), no tapete de Sierpinski (em R^2) e na esponja de Menger (em R^3), considerando o conjunto S dado por

$$S = \bigcup_{i=1}^{m_n} T_i(S)$$

com

$$T_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

onde cada constante a_{ki} é igual a 0, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$, mas nunca duas delas iguais a $\frac{1}{3}$ ao mesmo tempo. Use um computador para construir o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} \text{ for } i = 1, 2, 3, \dots, m_n \right\}$$

e assim determinar o valor de m_n para $n = 2, 3, 4$. Em seguida, obtenha uma expressão para m_n .

11.15 CAOS

Nesta seção nós usamos uma transformação do quadrado unitário do plano xy sobre si mesmo para descrever o conceito de aplicação caótica.

PRÉ-REQUISITOS: Geometria de Operadores Lineares de R^2 (Seção 9.2)
Autovetores e Autovalores
Compreensão Intuitiva de Limites e Continuidade

Caos A palavra *caos* apareceu pela primeira vez na literatura matemática em 1975, num artigo (em inglês) de Tien-Yien Li e James Yorke intitulado "Período Três Implica Caos." Hoje em dia, o termo é utilizado para descrever certas transformações na Matemática e certos fenômenos físicos que, à primeira vista, parecem ter um comportamento aleatório e desordenado mas que, na verdade, têm um elemento subjacente de ordem bem determinado (como, por exemplo, geração aleatória de números, embaralhar as cartas de um baralho, arritmia cardíaca, vibração das asas de um avião em vôo, mudanças na mancha vermelha de Júpiter e aberrações da órbita de Plutão). Nesta seção nós estudaremos uma transformação caótica específica, conhecida como a *transformação do gato de Arnold*, em referência ao matemático russo Vladimir I. Arnold, que usou o esboço de um gato para a sua descrição.

A Transformação do Gato de Arnold Para descrever a transformação do gato de Arnold nós precisamos de algumas técnicas da aritmética modular. Se x é um número real, então a notação $x \bmod 1$ denota o único número no intervalo $[0, 1)$ que difere de x por um número inteiro. Por exemplo,

$$2,3 \bmod 1 = 0,3, \quad 0,9 \bmod 1 = 0,9, \quad -3,7 \bmod 1 = 0,3, \quad 2,0 \bmod 1 = 0$$

Observe que se x é um número real não-negativo, então $x \bmod 1$ é simplesmente a parte fracionária de x . Se (x, y) é um par ordenado de números reais, então a notação $(x, y) \bmod 1$ denota o par $(x \bmod 1, y \bmod 1)$. Por exemplo,

$$(2,3; -7,9) \bmod 1 = (0,3; 0,1)$$

Observe que o ponto $x \bmod 1$ é um ponto do intervalo $[0, 1)$ para cada número real x , e que o ponto $(x, y) \bmod 1$ é um ponto do quadrado unitário

$$S = \{(x, y) \mid 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$$

para cada par ordenado (x, y) . Note que as arestas superior e da direita do quadrado não estão incluídas em S .

A transformação do gato de Arnold é a aplicação $\Gamma: R^2 \rightarrow R^2$ definida pela fórmula

$$\Gamma: (x, y) \rightarrow (x + y, x + 2y) \bmod 1$$

ou, em notação matricial, por

$$\Gamma \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \bmod 1 \tag{1}$$

Para entender a geometria da transformação do gato de Arnold, é conveniente escrever (1) na forma fatorada

$$\Gamma \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \bmod 1$$

que expressa a transformação do gato de Arnold como uma composta de um cisalhamento na direção x com fator 1 seguido de um cisalhamento na direção y com fator 1. Como as contas são feitas mod 1, a aplicação Γ leva todos os pontos de R^2 no quadrado unitário S .

Nós iremos ilustrar o efeito da transformação do gato de Arnold no quadrado unitário S que, na Figura 11.15.1a, aparece sombreado e contendo a imagem de um gato. Pode ser mostrado que não importa quando é feita a conta mod 1, se depois de cada cisalhamento ou somente no final das contas. Nós veremos ambos métodos, inicialmente fazendo a conta mod 1 somente no fim. Os passos são os seguintes: