

CAPÍTULO 3

Transformações em Espaços Métricos, Contrações e Construção de Fractais

Suponha que existam dois espaços X e Y . Suponha também uma lei de associação f que relaciona a cada elemento de X um elemento de Y . Diz-se que f é uma **função** de valores em Y , definida em X . Algumas vezes os termos **mapeamento**, **transformação** ou **operadores** são usados ao invés de função. Também diz-se que f é uma função que **transforma ou mapeia** X em Y , e usa-se a notação $f : X \rightarrow Y$.

Se a função f é definida em um conjunto X , diz-se que X é o *domínio* (“domain”) de f , e escreve-se: $\mathcal{D}(f)=X$. Se y é elemento de Y ($y \in Y$) tal que $y = f(x)$, diz-se que y é a **imagem** de x ou que y é o **valor** de f em x . O conjunto de todos os elementos de Y que são imagens, sob a função f , de algum elemento de X é chamado de **range** de f e é representado pela notação $\mathcal{R}(f)$, isso é :

$$\mathcal{R}(f) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ para algum } x \in X\}$$

A **Geometria fractal** estuda subconjuntos complexos de espaços métricos simples como \mathbb{R}^2 , \mathcal{C} , $\hat{\mathcal{C}}$, \mathbb{R} . As fractais são subconjuntos que têm algumas **propriedades invariantes** sob **transformações geométricas**. Na geometria de **fractais determinísticas**, os objetos estudados são subconjuntos gerados por transformações geométricas simples do **próprio espaço nele mesmo**. Este capítulo vai se dedicar ao estudo de algumas destas transformações que são importantes não só para compreender-se as transformações que levarão a **compressão de imagens**, como também para o projeto de diversos **efeitos especiais** em imagens utilizados na computação gráfica (em filtros de “warping” e “morphing”).

3.1 - Transformações na Reta

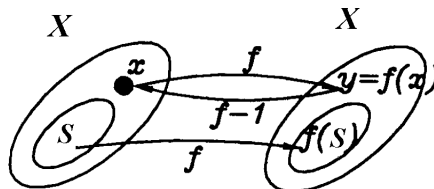
Definição 1: Uma **transformação** em um espaço métrico (X, d) é uma função $f : X \rightarrow X$ que relaciona exatamente um ponto $f(x) \in X$ a cada ponto $x \in X$.

Se S é um subconjunto de X ($S \subset X$) então sua **imagem** é: $f(S) = \{f(x) : x \in S\}$.

Uma transformação f é chamada “**1 a 1**” (“one – to – one”) ou “injetiva” se para dois pontos x e $y \in X$ as imagens forem idênticas, $f(x) = f(y)$, apenas quando $x = y$.

Uma transformação, f , é chamada “**sobre**” se $f(X) = X$ (ou seja sua imagem é o próprio conjunto).

Uma função é **inversível** se for “1 a 1” e “sobre” (“bijetiva”). Neste caso pode-se definir: $f^{-1} : X \rightarrow X$, chamada **inversa** de f e representada por $f^{-1}(y) = x$, onde x é o único ponto tal que $y = f(x)$.



Para mostrar que você entendeu: Defina um espaço métrico, e nele indique uma função inversível e outra não inversível.

Definição 2: Se $f : X \rightarrow X$ é uma transformação em (X, d) então **interações progressivas** de f são transformações $f^{on} : X \rightarrow X$ definidas como:

$$f^{o0}(x) = x, f^{o1}(x) = f(x), f^{o2}(x) = f \circ f^{o1}(x) = f(f(x)) \dots f^{on+1}(x) = f \circ f^{on}(x) = f(f^{on}(x))$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$

Se $f : X \rightarrow X$ for uma transformação inversível então, **interações regressivas** de f são transformações $f^{o-n} : X \rightarrow X$ definidas como:

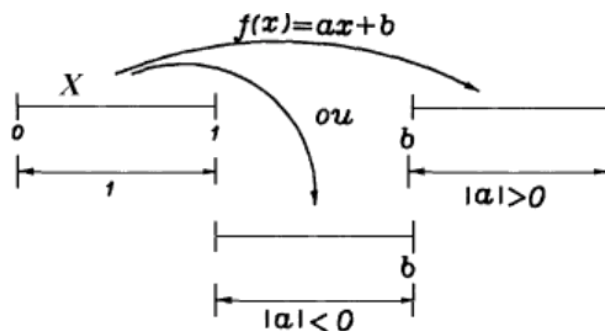
$$f^{-1}(x) = f^{o-1}(x), f^{o-2}(x) = f^{-1} \circ f^{-1}(x) = f^{-1}(f^{-1}(x)), f^{o-n}(x) = (f^{on})^{-1}(x)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$

É necessário, para trabalhar com geometria fractal, uma “familiaridade” com as transformações básicas em $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathcal{C}, \hat{\mathcal{C}}$. É importante o entendimento das relações existentes entre as “fórmulas” que descreve as transformações e seus **efeitos geométricos** (como esticamentos, torções, dobramentos) sobre o conjunto base em que atuam. O que as transformações fazem com pontos individuais não é tão importante quanto o que causam em conjunto de pontos (como retas, círculos, imagens).

Definição 3: Uma **transformação afim** no \mathbb{R} é uma transformação na forma: $f(x) = ax + b$ onde a e b são constantes reais.

Vejamos o que ela faz em um conjunto. Se $X = [0, 1]$, então $f(X)$, depois de transformado, terá comprimento $|a|$, o ponto zero se moverá para b . $f(X)$ ficará a direita ou a esquerda de b se a for uma constante positiva ou negativa, respectivamente. Se $|a| > 1$ a linha $X = [0, 1]$ se expande. Se $|a| < 1$ a linha $X = [0, 1]$ se contrai. Dependendo da translação, b , e da escala, a , a transformação pode ou não conter o zero, ser toda positiva, toda negativa etc



Entendeu mesmo? Então defina uma função que reproduza uma imagem 5 vezes, cada vez com 50% do tamanho anterior e deslocada horizontalmente da anterior de $b = 5$ pixels. Como implementar isso?

Definição 4: Uma transformação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na forma

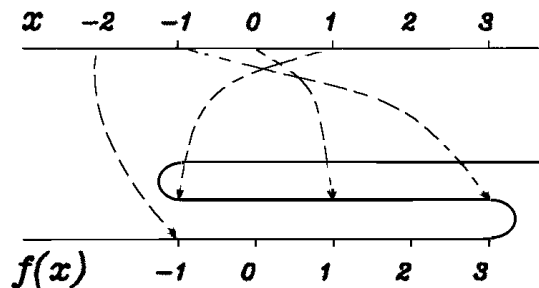
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_Nx^N$$

onde a_i são números reais, $a_N \neq 0$ e N é um inteiro não negativo é chamada, TRANSFORMAÇÃO POLINOMIAL. N é chamado de grau da transformação.

Uma transformação polinomial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de grau N pode produzir até $(n - 1)$ dobras.

Exemplo:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x + 1 \\ f(-2) &= -8 + 6 + 1 = -1 \\ f(-1) &= -1 + 3 + 1 = 3 \\ f(0) &= 1 \\ f(1) &= 1 - 3 + 1 = -1 \\ f(3) &= 27 - 9 + 1 = 19 \\ f(2) &= 8 - 6 + 1 = 3 \end{aligned}$$



Para mostrar que você entendeu: Como você poderia usar esta função para fazer efeitos especiais de dobramentos em imagens?

Dica em: A. Conci, "Um Algoritmo para Obtenção de Efeitos de Dobramentos de Imagens", Resumo das Comunicações do XVI CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Uberlândia, MG, 6 a 9 de setembro de 1993, p. 42.

Em uma **transformação polinomial de grau n** , mostre que os valores de x que são transformados em pontos de dobras são as soluções de $\frac{df(x)}{dx}$, $x \in \mathbb{R}$. A solução desta equação é chamada **ponto crítico da função f** . Se c é um ponto crítico, então $f(c)$ é chamado de **valor crítico**. No entanto um valor crítico não é necessariamente um ponto de dobramento.

Definição 5: Se $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (lembra-se da reta com infinito que, topologicamente, equivale a uma circunferência!). Então uma transformação: $f : \hat{\mathbb{R}} \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$ definida como $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ onde $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$ e $ad \neq bc$ é chamada uma **transformação de Möbius**. Se $c \neq 0$ a imagem de $-\frac{d}{c}$ é ∞ : $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ e $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Se $c = 0$ então $f(\infty) = \infty$.

Transformações de Möbius são inversível. Por exemplo $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}$.

3.2 - Transformações no \mathbb{R}^2 .

Definição 1: Uma transformação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + e \\ cx_1 + dx_2 + f \end{pmatrix}$$

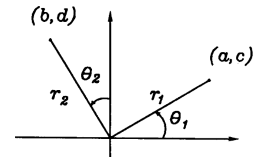
onde a, b, c, d, e, f , são números reais é chamada **transformação afim**.

É também muito usual a notação:

$$f(x) = Ax + t \quad \text{onde} \quad A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad t = \begin{vmatrix} e \\ f \end{vmatrix}$$

onde A é uma matriz 2×2 e t um vetor. Para melhor identificar os efeitos de mudança de escala e rotação associados a A , ela é frequentemente escrita como:

$$A = \begin{vmatrix} r_1 \cos \theta_1 & -r_2 \sin \theta_2 \\ r_1 \sin \theta_1 & r_2 \cos \theta_2 \end{vmatrix}$$



ou seja (r_1, θ_1) são as coordenadas polares de (a, c) e $(r_2, \theta_2 + \frac{\pi}{2})$ as coordenadas polares de (b, d) .

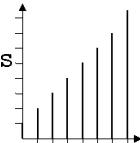
Encontre os fatores de escala r_1 e r_2 e os ângulos θ_1 θ_2 , definidores da transformação afim que leva o triângulo de Sierpinski de vértices $(0,0)$; $(0,1)$ e $(1,0)$ no segmento de reta $(1,1)(2,2)$ de modo que os pontos $(0,1)$ e $(1,0)$ sejam levados ao ponto $(1,1)$.

Definição 2: Uma **transformação linear** é uma transformação afim em que $t = 0$.

Transformações lineares transformam paralelogramos em paralelogramos com origens no mesmo ponto.

Descubra :

1. que transformação “*levaria*” um triângulo de vértices: $(1,0)$; $(0,1)$; $(1,0)$ em outro de vértices: $(4,5)$; $(-1,2)$ e $(3,0)$. Descreva o que aconteceria com um “*rosto*” transformado por esta função;
2. que transformação “*levaria*” a primeira linha da figura ao lado nas depois de aplicada recursivamente.



Como pode-se obter a transformação afim que produz determinado efeito? Que leve, por exemplo, a folha maior na menor!

$$f(\text{FOLHA GRANDE}) = (\text{FOLHA PEQUENA})$$

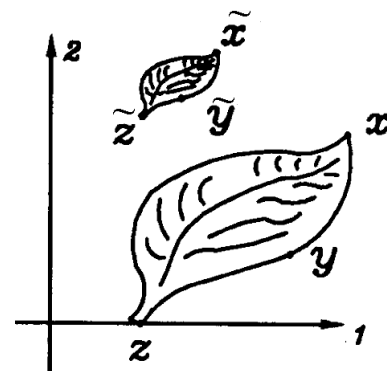
Marca-se 3 pontos na folha grande: x, y, z , e os 3 pontos correspondentes a estes na folha pequena: $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$.

Os valores de a, b e e devem satisfazer as equações :

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = ax_1 + bx_2 + e \\ \tilde{y}_1 = ay_1 + by_2 + e \\ \tilde{z}_1 = az_1 + bz_2 + e \end{cases}$$

e c, d, e e f devem satisfazer:

$$\begin{cases} \tilde{x}_2 = cx_1 + dx_2 + f \\ \tilde{y}_2 = cy_1 + dy_2 + f \\ \tilde{z}_2 = cz_1 + dz_2 + f \end{cases}$$



Definição 3: Uma transformação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é chamada **SIMILITUDE** se é uma transformação afim com a matriz A na forma:

$$A = \begin{vmatrix} r \cos\theta & -r \sin\theta \\ r \sin\theta & r \cos\theta \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{vmatrix} r \cos\theta & r \sin\theta \\ r \sin\theta & -r \cos\theta \end{vmatrix}$$

θ é chamado de ângulo de rotação e r fator de escala.

$$\text{Se } A = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}, \quad \text{ou seja} \quad \begin{matrix} \theta_1 = \theta_2 = \theta \\ r_1 = r_2 = r \end{matrix}$$

a SIMILITUDE é chamada rotação.

Se a matriz A for igual a $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ a transformação é chamada REFLEXÃO

Similitudes são conformes (preservam ângulos). Uma similitude no plano, tanto pode ser considerada no espaço \mathcal{C} quanto no \mathbb{R}^2 , mas é escrita de maneira mais simplificada no \mathcal{C} . Por exemplo a função que dobra a escala de uma imagem e a rotaciona de θ° pode ser: $w * z$, com $w = 2(\cos\theta + \sin\theta i)$ em \mathcal{C} , ou

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \quad \text{no } \mathbb{R}^2$$

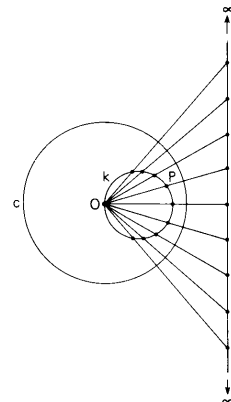
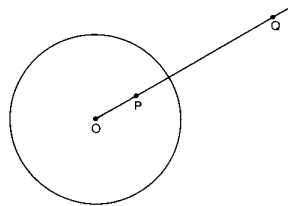
Definição 4: Uma das transformações, $f(x_1, x_2)$, mais importantes do $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a INVERSÃO NO CÍRCULO UNITÁRIO: se $(x_1, x_2) \neq 0 \in \mathbb{R}^2$ e $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ é a distância do ponto a origem do \mathbb{R}^2 , esta transformação é definida pela forma:

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r} \right)$$

Ela faz com que os pontos com $r < 1$ sejam mapeados para fora do círculo unitário centrado na origem. Os pontos com $r > 1$ serão mapeados para dentro deste círculo. Assim os pontos do exterior (que podem ocupar áreas infinitas) têm sua imagem **condensada** em um “microcosmo”.

Este mapeamento tem algumas propriedades interessantes:

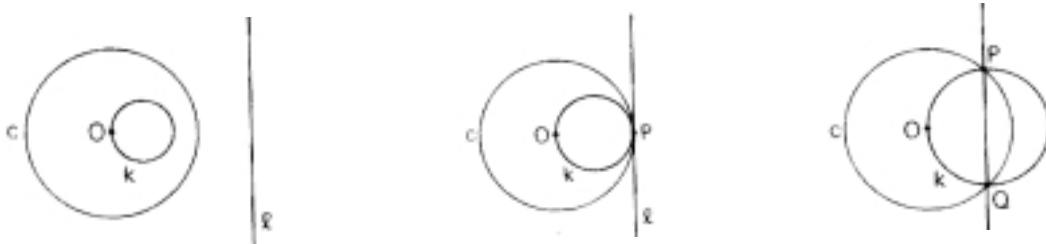
(1) é **simétrico**: se P é a imagem de Q , então Q é a imagem de P (ou seja a imagem pode ser “condensada e descondensada” a qualquer instante);



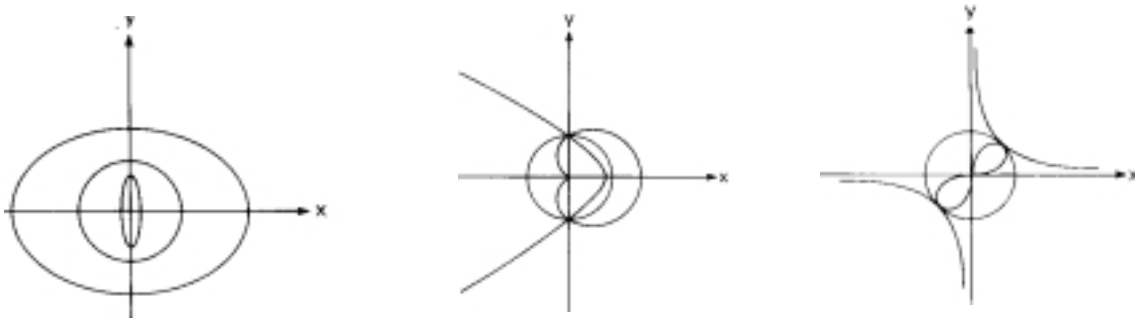
(2) o círculo unitário permanecerá invariante;

(3) linhas retas passando pelo centro, continuarão linhas retas passando pelo centro (embora a posição dos pontos seja invertida: os exteriores ficam no interior e os do interior no exterior);

(4) linhas **retas** que não passam pelo centro, serão mapeadas em **círculos** passando pelo centro e vice-versa (a figura abaixo mostra 3 destas linhas: se a reta tiver todos os seus pontos com $r > 1$, todos os seus pontos mapeados terão $r < 1$; os pontos da reta com raio, $r = 1$ ficarão inalterados; e se tiver pontos interiores e exteriores ao círculo unitário, será mapeada em um círculo com pontos interiores ou exteriores ao círculo unitário);



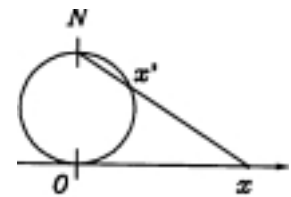
- (5) elipses, que são curvas do segundo grau, se tornarão curvas do quarto grau;
- (6) parábolas se tornarão cardióides; e hipérbolas se tornarão curvas com formas de “oito” que lembram o símbolo de infinito;
- (7) esta idéia pode ser estendida para o espaço através da INVERSÃO NA ESFERA.



3.3 - Transformação de Mobius na Esfera de Riemann

Definição 1: Uma transformação: $f = \hat{\mathcal{C}} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ na forma

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ com } a, b, c, d, \in \mathcal{C}, ad - bc \neq 0$$



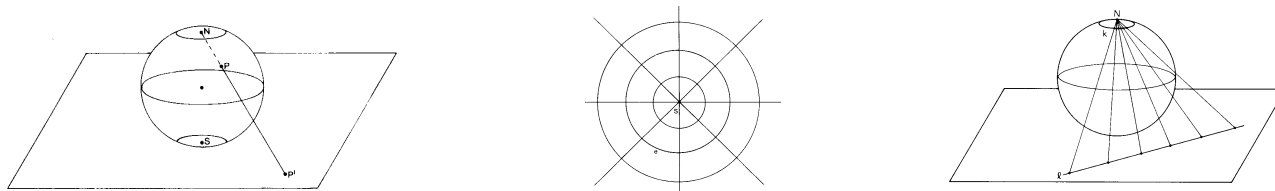
é chamada uma TRANSFORMAÇÃO DE MÖBIUS em $\hat{\mathcal{C}}$. Se $c \neq 0$ então $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ e $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Se $c = 0$ então $f(\infty) = \infty$.

Esta transformação mapeia o plano complexo na esfera $\hat{\mathcal{C}}$. É inversível e de aplicações na **cartografia** (onde é conhecida como projeção **estereográfica**, sendo usada desde o século 2 A.C.). Se cada ponto da Terra (imaginada como uma esfera perfeita) for projetado no plano através da reta que o une ao “pólo norte” teremos o **mapeamento estereográfico** da superfície da Terra.

Algumas propriedades desta transformação são:

- (1) Os paralelos, ou círculos de latitudes, serão mapeados em círculos concêntricos em torno do pólo sul; os círculos de longitude, ou meridianos, serão mapeados em raios partindo do pólo;
- (2) O mapeamento é conforme (o que o torna útil para o planejamento de rotas de navios). e faz com que se pense na esfera como um modelo “finito” para o plano que é “infinito”;

(3) Devido às distorções que ocorrem próximo ao pólo Norte, em cartografia, apenas um dos hemisférios é mapeado por vez, sendo o outro obtido por inversão.



Note que o conjunto das transformações de Möbius tal que $f(\infty) = \infty$ é o conjunto das transformações afins.

Considere $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \mathcal{C}$ sendo $z \neq 0$. O que esta transformação pode fazer em uma imagem? Mostre seu efeito na imagem de um tabuleiro de xadrez.

3.4 - Transformações Analíticas

Conceitualmente uma transformação é analítica se for contínua e se comportar localmente como uma similitude (uma forma de generalização da transformação de Möbius).

Definição 2: Seja (\mathcal{C}, d_E) , \mathcal{C} o plano complexo e d_E a métrica Euclidiana. Uma transformação $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ é chamada **analítica** se para cada $z_0 \in \mathcal{C}$ existe uma similitude na forma:

$w(z) = az + b$ para algum par $a, b \in \mathcal{C}$ tal que

$$\frac{d(f(z), w(z))}{d(z, z_0)} \rightarrow 0 \text{ quando } z \rightarrow z_0$$

Os números a e b dependem de z_0 . Se para algum $z_0 = c$, $a = 0$, então c é chamado de **ponto crítico** da transformação e $f(z)$ é chamado de **valor crítico**.

OBS.: Se a transformação analítica $f(z)$ puder ser descrita como a razão de dois polinômios em z , como por exemplo:

$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ ou $f(z) = \frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}$ os números a e b da similitude $w(z)$ são dados por:

$$a = f'(z_0) \text{ e } b = f(z_0) - a z_0$$

e os pontos críticos serão as soluções de $f'(c) = 0$.

A similitude $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ definida como $f(z) = 3z + 1$, mapeia círculos em círculos aumentados por um fator de escala 3, e com centro transladados de $3z_0 + 1$. O que faz a função $f(z) = z^2$ em um quarto de círculo?

3.5 - Como Mudar Coordenadas

A maioria dos espaços tem um sistema de coordenadas, X_c , que auxilia a localização dos pontos do espaço.

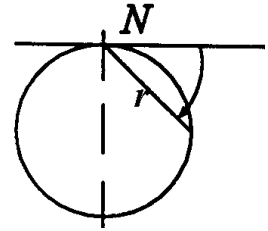
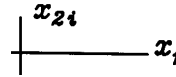
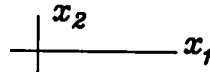
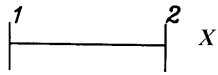
Exemplos:

$$X = [1, 2]$$

$$X = \mathbb{R}^2$$

$$X = \mathcal{C}$$

$$X = \hat{\mathcal{C}}$$



O sistema de coordenadas é, ele próprio, um espaço métrico que denotaremos por X_c . Note que X_c pode conter pontos que não correspondem a pontos de X . Usualmente nós confundimos um ponto $x \in X$ com suas coordenadas $x \in X_c$.

Exemplos:

$$X_c = \mathbb{R} \quad , \quad X = [1, 2] \quad , \quad x = 0,5 \in X_c \text{ mas } x \notin X.$$

$$X_c = \mathbb{R}^2 \quad e \quad X = [0, 1] \times [0, 1] \quad (\text{quadrado unitário}) \quad x = (-1, -1) \in X_c \text{ mas } x \notin X.$$

Pode-se pensar que o espaço X repousa sobre X_c . **Mudança de coordenada** neste sentido será uma transformação.

$$\theta : {}^1X_c \rightarrow {}^2X_c$$

que transforma um ponto $x \in X$, antes sobre o ponto ${}^1x \in {}^1X_c$, no ponto ${}^2x = \theta({}^1x) \in {}^2X_c$.

Neste sentido devemos diferenciar entre o ponto x do espaço X e suas coordenadas ${}^1x \in {}^1X_c$ ou ${}^2x \in {}^2X_c$. Assim a mudança de coordenadas $\theta : {}^1X_c \rightarrow {}^2X_c$ pode ser pensada como a mudança de X relativa ao seu espaço de coordenadas X_c .

Teorema 1: Seja X um espaço métrico e X_c seu espaço de coordenadas. Seja uma mudança de coordenadas definida por:

$$\theta : {}^1X_c \rightarrow {}^2X_c$$

Se θ for inversível, quando tratada como uma transformação de X em $\theta(X)$, e se a coordenada de um ponto antes da transformação for 1x e depois 2x de modo que

$${}^2x = \theta({}^1x)$$

Então se

$$\begin{aligned} {}^1f : X &\rightarrow X' \\ {}^1x &\rightarrow {}^1f({}^1x) = {}^1y \end{aligned}$$

for uma transformação expressa nas coordenadas iniciais; e se ${}^2x \rightarrow {}^2f({}^2x) = {}^2y$ for a fórmula de f expressa nas novas coordenadas então:

$$\begin{aligned} {}^2f({}^2x) &= (\theta \circ {}^1f \circ \theta^{-1})({}^2x) \\ {}^1f({}^1x) &= (\theta^{-1} \circ {}^2f \circ \theta)({}^1x) \end{aligned}$$

Exemplo: no esquema que segue

$${}^1f({}^1x) = {}^1x + (3;3)$$

ou usando coordenadas homogêneas:

$$f \begin{pmatrix} {}^1x_1 \\ {}^1x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^1x_1 \\ {}^1x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\theta: {}^1X_c \rightarrow {}^2X_c$$

$$\theta \begin{pmatrix} {}^1x_1 \\ {}^1x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^2x_1 \\ {}^2x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^1x_1 \\ {}^1x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\theta^{-1}: {}^2X_c \rightarrow {}^1X_c$$

$$\theta^{-1} \begin{pmatrix} {}^2x_1 \\ {}^2x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1x_1 \\ {}^1x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0.5 & 3.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^2x_1 \\ {}^2x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e ${}^2f({}^2x) = {}^2x + (3;6)$ ou, usando o teorema e coordenadas homogêneas:

$${}^2f({}^2x) = (\theta \circ {}^1f \circ \theta^{-1})({}^2x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0.5 & 3.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considere: $\theta({}^1X_c) = {}^1X_c + 1 = {}^2X_c$, qual será 2f se $f({}^1X) = 2 \cdot {}^1X = X'$?

Definição 3: Se $f: X \rightarrow X$ for uma transformação em um espaço métrico. Chama-se **ponto fixo** ao ponto $x_f \in X$ tal que $f(x_f) = x_f$. Em outras palavras ponto fixo é o ponto do espaço que não se move pela transformação.

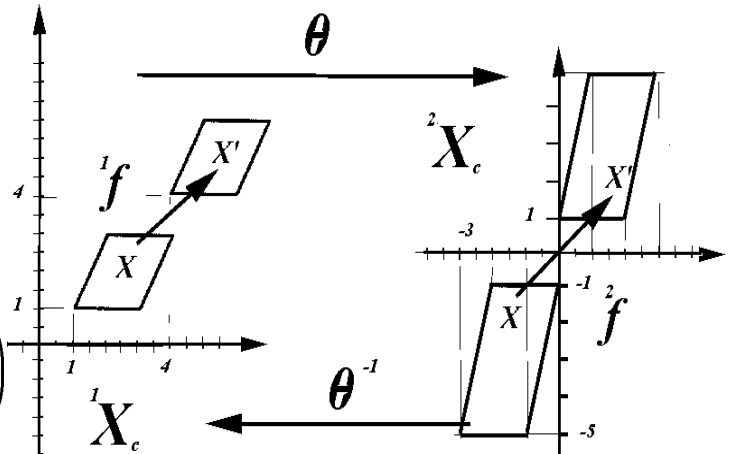
Considere: $\theta({}^1X_c) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} {}^1X_c = {}^2X_c$, qual será 2f e seu ponto fixo se $f({}^1X) = 2 \cdot {}^1X = X'$?

3.6 - Teorema do Mapeamento de Contração

Definição 1: Uma transformação $f: X \rightarrow X$ no espaço métrico (X, d) é chamada de CONTRAÇÃO se existe uma constante $0 \leq s \leq 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

o número s é chamado de FATOR de CONTRAÇÃO.



Exemplo 1: $(X = [0, 1], d_E)$, $f_1(x) = \frac{1}{3}x$ e $f_2(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x$ são mapeamentos de contração com fator de contração **1/3**. A aplicação sucessiva destas funções a pontos do espaço produz o **conjunto de Cantor**.

Definição 2: Seja S um conjunto de reais. O **ínfimo de S** é o maior real para o qual todos os elementos de S sejam maior ou igual.

$$\text{Inf } S = \text{MAX}\{x \in \mathbb{R} : x \leq s \forall s \in S\}$$

O ínfimo sempre existe, pela própria natureza dos números reais (mesmo que igual a $-\infty$).

Definição 3: O **supremo** de um conjunto S é o menor real para o qual qualquer elemento de S seja no máximo igual ou menor.

$$\text{Sup } S = \text{min}\{x \in \mathbb{R} : x \leq s \forall s \in S\}$$

O supremo de um conjunto também sempre existe, mesmo que seja ∞ .

Exemplo 2: O *Inf* de $f_1(x)$ e $f_2(x)$ do exemplo 1 seriam 0 e 2/3. O *Sup* de $f_1(x)$ e $f_2(x)$, do mesmo exemplo, seriam 1/3 e 1 respectivamente.

Teorema 1: Seja $f : X \rightarrow X$ um mapeamento de contração em um espaço métrico completo (X, d) . Então f possui exatamente **um ponto fixo** $x_f \in X$ e para qualquer ponto $x \in X$ a sequência $\{f^{on}(x) : n = 0, 1, 2, \dots\}$ **converge para x_f** . Ou seja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(x) = x_f \text{ para cada } x \in X$$

Exemplo 3: A aplicação sucessiva da f_1 , do exemplo 1, converge para 0. A aplicação sucessiva de f_2 converge para $\frac{2}{3}$.

Exemplo 4: Em $([0, 1] \times [0, 1], d_E)$ as transformações :

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} ;$$

$$f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0.5 \\ 0 \end{vmatrix} e$$

$$f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{vmatrix}$$

têm fator de contração **1/2**, e têm ponto fixo em $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

3.7 - Mapeamento de Contração no Espaço das Fractais

Se $(\mathcal{H}(X), h(d))$ for o espaço dos compactos do espaço métrico (X, d) , e $h(d)$ a métrica de Hausdorff corresponde a métrica d , então pode-se definir FRACTAL DETERMINISTICA como o PONTO FIXO de uma TRANSFORMAÇÃO DE CONTRAÇÃO em $(\mathcal{H}(X), h(d))$.

Lema 1: Um mapeamento de **contração** no espaço métrico (X, d) é **contínuo**.

Lema 2: Um mapeamento contínuo, no espaço métrico (X, d) , mapeia $\mathcal{H}(X)$ nele mesmo.

Lema 3: Seja $w : X \rightarrow X$ um mapeamento de contração no espaço métrico (X, d) , com fator de contração s . Então:

$w : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ definida por: $w(B) = \{w(x) : x \in B\} \forall B \in \mathcal{H}(X)$ é um mapeamento de **contração** em $(\mathcal{H}(X), h(d))$ com **fator de contração** s (o mapeamento de um conjunto B é o mapeamento de todos os seus pontos, o mapeamento de \mathcal{H} é o mapeamento de todos os seus conjuntos).

Lema 4: Para qualquer 4 conjuntos B, C, D e E em $\mathcal{H}(X)$ tem-se que

$$h(B \cup C, D \cup E) \leq h(B, D) \vee h(C, E)$$

Relembrando:

a notação “ $x \vee y$ ” significa o “máximo dos dois reais x e y ”; e

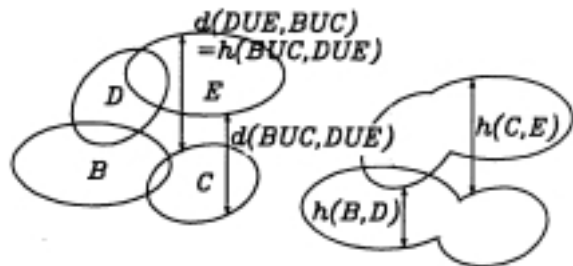
$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A)$$

onde

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\}$$

e

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) : y \in B\}$$



Ou seja o **Lema 4** afirma que:

$$\max\{d(D \cup E, B \cup C), d(B \cup C, D \cup E)\} \leq \max\{d(D, E), d(B, C), d(B, C), d(D, E)\}$$

(a distância máxima entre os conjuntos unidos é menor ou igual a distância máxima entre os conjuntos antes da união.)

Lema 5: Seja $(w_n : n = 1, 2, \dots, N)$ contrações em $(\mathcal{H}(X), h)$, onde s_n denota o fator de contração de w_n . Define-se $W : (\mathcal{H}(X), \mathcal{H}(X))$ como:

$$\begin{aligned} W(B) &= w_1(B) \cup w_2(B) \cup \dots \cup w_N(B) \\ &= \cup_{n=1}^N w_n(B) \text{ para cada } B \in \mathcal{H}(X) \end{aligned}$$

W é a união dos mapeamentos de contração e um mapeamento de contração com FATOR DE CONTRAÇÃO :

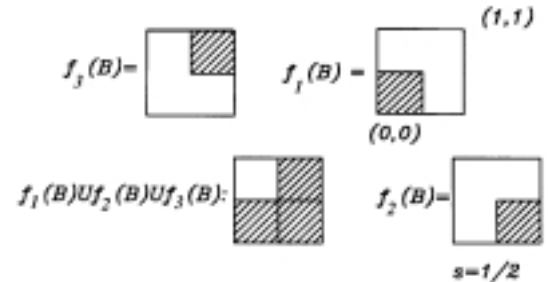
$$s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$$

(uma consequência do Lema 4).

Exemplo 5: Considerando f_1 , f_2 e f_3 do exemplo 4.

Se $X = [0, 1] \times [0, 1]$ e $d = d_E$,
 $W(B) = f_1(B) \cup f_2(B) \cup f_3(B)$ para cada $B \in \mathcal{H}(x)$.

Se $B = X$ então $f_1(B)$, $f_2(B)$, $f_3(B)$, e
 $f_1(B) \cup f_2(B) \cup f_3(B)$,
 dadas pela figura ao lado, têm $s = 1/2$



Definição 1: Uma **Hyperbolic Iterated Function System (IFS)** consiste de um espaço métrico completo (X, d) com um conjunto finito de contrações $w_n : X \rightarrow X$. A notação usada para um IFS é: $\{X; w_n, n = 1, 2, N\}$ e seu fator de contração é: $s = \text{MAX} \{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$

Exemplo 6: Uma IFS para as funções do exemplo 5 seria: $\{[0, 1] \times [0, 1]; f_1, f_2, f_3\}$ e $s = 1/2$

Teorema 1: Se $\{X : w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ é uma IFS com fator de contração s , então a transformação $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ definida por

$$W(B) = \cup_{i=1}^N w_n(B) \quad \forall B \in \mathcal{H}(X)$$

é uma contração em $(\mathcal{H}(X), h(d))$ com fator de contração s , tal que:

$$h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C) \quad \forall B \text{ e } C \text{ em } \mathcal{H}.$$

E o único ponto fixo desta W , $A \in \mathcal{H}(X)$, dado por

$$A = W(A) = \cup_{n=1}^N w_n(A),$$

é tal que $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(B)$ para qualquer $B \in \mathcal{H}(X)$.

Definição 2: O **ponto fixo A** do teorema anterior é chamado de **ATRATOR DO IFS**.

Exemplo 7: Para a IFS do exemplo 6, $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(\square)$ será um triângulo de Sierpinski.



OBS.: Pode-se pensar em usar a palavra **FRACTAL DETERMINISTICA**, na definição 2, ao invés de **ATRATOR**.

3.8 - Algoritmos para Geração de Fractais a Partir do IFS.

O Algoritmo Determinístico calcula diretamente o limite ($n \rightarrow \infty$) de $W^{on}(A_0)$ onde A_0 é um conjunto qualquer.

Supondo que queiramos iniciar com um conjunto $A_0 \in \mathbb{R}^2$, então os mapeamentos de contração, aplicados ao conjunto A_0 , podem ser representados por transformações afins:

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}$$

Para padronizar o caso de $X \subset \mathbb{R}^2$, vamos representar cada w_i pelas constantes $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$. Assim um conjunto W pode ser tabelado, cada linha da tabela indicando uma transformação afim. A tabela abaixo representa, por exemplo, as transformações que geram o triângulo de Sierpinsky. As tabelas das contrações são chamadas de código IFS.

Em poucos passos, o algoritmo determinístico pode ser descrito como:

DETERMINE OS VALORES DAS TRANSFORMAÇÕES AFINS

$a_i, b_i, \dots, e_i, f_i$

↓

DETERMINE UM CONJUNTO INICIAL - UMA FIGURA QUALQUER
NA TELA - A_0

↓

$N = 1$

↓

ENQUANTO O USUÁRIO NÃO INTERROMPER
ou $N < NMAX$

↓

TRANSFORME A_0 , USANDO CADA UMA DAS TRANSFORMAÇÕES,
OBTENDO A_N . LIMPE A TELA. DESENHE NOVO
CONJUNTO A_N

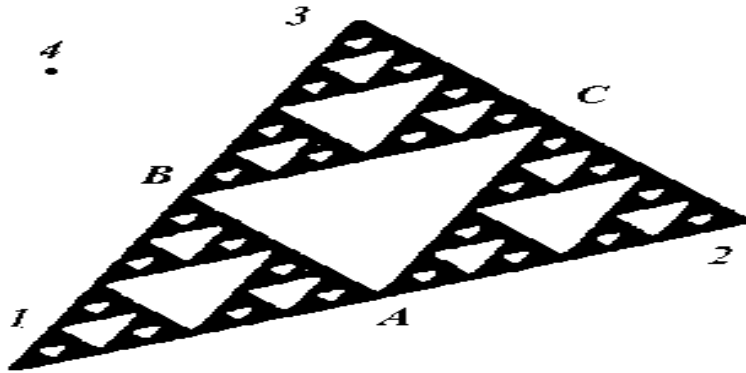
↓

$N = N + 1$

3.9 - Uma Visão Intuitiva dos Iterated Function System

Marque **3 pontos arbitrários** em um papel (vamos chamá-lo de pontos 1, 2, 3). Você será o jogador de um jogo que tem sido chamado: **jogo do caos**. Marque um **4º ponto** localizado onde você bem queira, vamos chamar este de z_1 .

Agora pegue **um dado** e jogue-o. Se quando você jogá-lo der **1 ou 4**, **2 ou 5**, **3 ou 6** isto quer dizer que deu **1**, **2 ou 3** respectivamente. Em cada vez que você jogar o dado você irá fazer o ponto z_1 **andar metade da distância entre o valor indicado pelo dado e a sua posição atual**. Continue jogando por muito tempo, digamos até marcar 1 MILHÃO DE PONTOS. Agora **apague os 10 primeiros pontos**. **O que restará no papel?** (-Uma poeira de **pontos randomica!** -Afiml você **esperava algo mais?** -Nada disso!) O que você verá se, o seu lápis tiver ponta **suficientemente fina**, se você tiver **medido corretamente** e, se não tiver um **tremendo azar!** Um **triângulo de Sierpinski** com vértices nos pontos que você escolheu.



Vamos chamar a **figura final** de **A** (**atrator do processo iterativo** que você jogou). Note que **A** é formado da união de três cópias com metade do tamanho de **A**:

$$A = w_1(A) \cup w_2(A) \cup w_3(A)$$

onde cada w_i é uma **transformação afim**. w_i transforma o triângulo de vértices nos pontos 1, 2 e 3, no triângulo de vértices nos pontos 1, A e B, ou A, 2 e C ou B, C e 3.

Definição 1: (Revisão da Definição 1 da Seção 3.2) Uma transformação $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ na forma $w(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + e, cx_1 + dx_2 + f)$ onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ é chamada uma **TRANSFORMAÇÃO AFIM 2D**.

É geralmente utilizada a seguinte notação:

$$w(x) = w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t$$

onde A é a matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e o vetor t é $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

Como podemos definir uma transformação afim que leva um dado conjunto em outro? Que transformação levará a figura maior na menor?

$$w(\text{figura grande}) = (\text{figura menor})$$

Marcamos **3 pontos na figura grande** e os **3 pontos equivalentes a estes na pequena**. E determinamos a transformação que levará um grupo no outro, determinando as incógnitas $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, que são a solução do sistema de equações que segue:

$$\begin{cases} x_1a + y_1b + e = x'_1 \\ x_1c + y_1d + f = y'_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2a + y_2b + e = x'_2 \\ x_2c + y_2d + f = y'_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3a + y_3b + e = x'_3 \\ x_3c + y_3d + f = y'_3 \end{cases}$$

Definição 2: Sejam w_1, w_2, \dots, w_N transformações afins sobre pontos do \mathbb{R}^2 que levam um ponto $z \in \mathbb{R}^2$ em outro ponto $w(z) \in \mathbb{R}^2$, de forma que os pontos de um conjunto sejam transformados em pontos do mesmo conjunto mas, mais próximo. Ou seja se $d(z_1, z_2)$ é a distância entre dois pontos z_1 e z_2 então a distância entre os pontos transformados será:

$$d(w_i(z_1), w_i(z_2)) < s \cdot d(z_1, z_2)$$

onde $0 \leq s < 1$ e $i = 1, 2, \dots, N$. Estas transformações são chamadas de **CONTRAÇÃO**, e s fator de contração.

Uma generalização do **jogo do caos** é: sejam w_1, w_2, \dots, w_N contrações no \mathbb{R}^2 , escolha um ponto z , **randomicamente**, para obter uma sequência de pontos $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{100.000}$ aplique randomicamente qualquer uma das contrações definidas. Por exemplo para obter o ponto z_{33} pegue o ponto z_{32} e aplique randomicamente qualquer uma das contrações $w_1(z_{32}) \dots w_N(z_{32})$. Então **com probabilidade 1** a sequência irá convergir para uma **figura única** (Atrator no limite). Esta figura será a única que obedecerá a equação.

$$A = w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_N(A)$$

$$A = \bigcup_{n=1}^N w_n(A)$$

Definição 3: Um conjunto finito de contrações em um espaço métrico (X, d) com seus respectivos fatores de contração $s_n, n = 1, 2, \dots, N$ é chamado **Iterated Function System (I.F.S)** (Revisão da definição da seção 3.7).

Definição 4: O conjunto de pontos gerados pelo I.F.S. é chamado **atrator** do **I.F.S.** Alguns autores chamam este de **fractal** produzido pelo I.F.S.

A estrutura das fractais gerados ou o atrator A é muito **intrigante**: os **contornos não podem, como nas formas Euclidianas serem simplificados pela amplificação da figura**. No entanto, A é completamente definida uma vez conhecida as transformações w_1, w_2, \dots, w_N que a geram. **Cada uma destas transformações é especificada por 6 números de 2 dígitos**. Estes números uma vez conhecidos podem reproduzir exatamente a figura.

Aqui apresentaremos dois algoritmos para desenvolvimento de fractais usando I.F.S. (1) **O Deterministic Algorithm** e o (2) **Random Iteration Algorithm**. O primeiro é baseado

na computação direta da sequência $A_{n+1} = \cup_{i=1}^N w_i(A_n)$ a partir de um conjunto inicial A_0 . Vamos ilustrar este 1º algoritmo mostrando seu uso na I.F.S. cujo atrator é o triângulo de Sierpinski.

As transformações afins

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \\ 1 \end{pmatrix}$$

podem ser resumidos na notação.

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} = A_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + t_i$$

a tabela abaixo então resume esta informação.

IFS para o triângulo de Sierpinski

i	a	b	c	d	e	f	p
1	1/2	0	0	1/2	1	1	0.33
2	1/2	0	0	1/2	1	50	0.33
3	1/2	0	0	1/2	50	50	0.34

Nesta tabela p_i indica a probabilidade associada a transformação w_i . As probabilidades devem ser tais que $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$ e $p_i > 0$. Estas probabilidades têm um importante papel no 2º algoritmo a ser apresentado. Seus valores podem ser obtidos aproximadamente por:

$$p_i \approx \frac{|det A_i|}{\sum_{i=1}^N |det A_i|} = \frac{|a_i d_i - b_i c_i|}{\sum_{i=1}^N |a_i d_i - b_i c_i|} \quad i = 1, \dots, N$$

se em algum caso $det|A_i| = 0$ deve-se usar para p_i um valor muito pequeno (0.001 por exemplo). Algumas situações devem ser tratadas empiricamente. A significação matemática de p_i é mais complicada, estes irão determinar a medida fractal do atrator e são informações importantes para o reendering (fixam a coloração como será visto no capítulo 5).

O algoritmo que segue dá a sequência A_i a partir de um conjunto inicial, A_0 . Neste caso A_0 é um quadrado, ou seja uma matriz 100 x 100 de pixels da tela cujas linhas e colunas 1 a 100 estão acessas. Duas matriz 100 x 100 guardarão os valores na iteração atuais, t , e seguintes, S . $a(i), b(i), c(i), d(i), f(i)$ representam os valores tabelados para o atrator.

Algoritmo Determinístico:

Exemplificando o uso de I.F.S. para o triângulo de Sierpinski (é o mesmo algoritmo da seção 3.8 com mais detalhes).


```

/*variáveis: */

    int S(100, 100), t(100, 100) /* matrizes que guardarão array de pixels */;
    float a(1) = .5, b(1) = c(1) = 0, d(1) = .5, e(1) = 1, f(1) = 1,
          a(2) = .5, b(2) = c(2) = 0, d(2) = .5, e(2) = 1, f(2) = 50,
          a(3) = .5, b(3) = c(3) = 0, d(3) = .5, e(3) = 1, f(3) = 50;
          /* valores das transformações afins */

/* inicialização do conjunto inicial: (um quadrado no caso)*/

    para i = 1 a 100 {t(i, 1) = t(1, i) = t(100, i) = t(i, 100) = 1; /* acenda_os_pixeis(i, 1);
    acenda_os_pixeis(1, i); acenda_os_pixeis(100, i); acenda_os_pixeis(i, 100); */}

/* faça as transformações w nos conjuntos Ai obtendo Ai+1 enquanto o usuário não inter-
romper o programa */

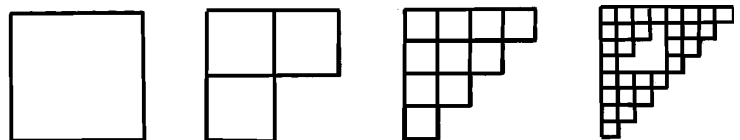
    para i=1 a 100
        para j = 1 a 100
            se t (i, j) = 1 então
                {S(a(1) * i + b(1) * j + e(1) , c(1) * i + d(1) * j + f(1)) = 1;
                S(a(2) * i + b(2) * j + e(2) , c(2) * i + d(2) * j + f(2)) = 1;
                S(a(3) * i + b(3) * j + e(3) , c(3) * i + d(3) * j + f(3)) = 1;
                } /* aplica-se cada uma das transformações ao conjunto inicial*/

    limpe a tela;

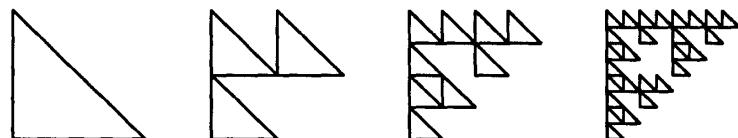
/* transforma os valores novos em elementos de t e desenha a figura gerada : */
    para i = 1 a 100
        para j = 1 a 100
            { t (i, j) = S(i, j);
            S(i,j) = 0; /*zera toda a matriz*/
            se t(i, j) = 1 então acenda_os_pixeis (i, j);
            }

```

O uso do algoritmo produz a sequência:



É interessante notar que **qualquer outro conjunto A_0 inicial não vazio produzirá o mesmo efeito**. Note que a figura inicial acaba por não ter influência na imagem final, gerada, do triângulo de Sierpinski. As figuras abaixo mostram a sequência obtida se fosse utilizado um triângulo.



Obs.: (1) Algumas vezes é necessário fazer **transformações de coordenadas** para a obtenção da figura final. (2) **Falhas nestas coordenadas poderão resultar em figuras interessantes e imprevisíveis.**

O algoritmo seguinte, ao invés de usar com mesma frequência as transformações escolhe cada transformação baseando-se na sua **probabilidade**.

Algoritmo Randômico:

Exemplo geração do triângulo de Sierpinski.

```

/* deve ser usada uma função da linguagem usada para gerar randomicos < 1 */
/* use os mesmos vetores a( ), b( ), c( ), . . . f( )*/
defina_window_com_limites (0, 0, 100, 100)
/* inicialize (x, y) e defina os números */
x = y = 0 ; numits = 10000;
para n = 1 até numits
  {
/* escolhe números 1, 2 ou 3 com a mesma probabilidade e aplica a função escolhida*/
  K = int (3* rand( ) - 0.00001) + 1
  new x = a (K) * x + b (K) * y + e (K) ;
  new y = c(K) * x + d (K) * y + f (K) ;
  x = new x ; y = new y;
  Se K > 10 acenda_pixeis_(x, y)  }

```

Este algoritmo: (**Randon Iteration Algorithm**) é baseado na teoria ergódica. As linhas em pseudocódigo deste algoritmo computam 10.000 (dez mil) pontos do atrator dado pela mesma tabela do algoritmo anterior (triângulo de Sierpinski). O resultado da implementação deste algoritmo para a tabela abaixo é uma “folha de samambaia”.

<u>IFS para uma samambaia</u>							
i	a	b	c	d	e	f	p
1	0.0	0.0	0.00	.16	0	0	.01
2	0.85	.04	-0.04	0.85	0	1.60	0.85
3	0.20	-0.26	0.23	0.22	0	1.60	0.07
4	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

O ponto chave do uso do I.F.S. para a geração de fractais é então a escolha das transformações de **contração afim**. A forma de fazer isto é a seguinte:

- 1 - Faça um esboço de poucas linhas da imagem a ser gerada (uma folha composta por poligonais por exemplo).
- 2 - Cubra esta imagem com cópias reduzidas da própria imagem. É importante reduzir ao mínimo as superposições de cópias e os buracos, para minimizar a distância de Hausdorff entre os dois conjuntos.
- 3 - Determine os mapeamentos e use os algoritmos. Este procedimento para obtenção das transformações afins que produzirão determinado atrator é denominado **Teorema da Colagem**.

Obs. O conjunto de pontos não precisa ser só \mathbb{R}^2 , podem ser usado \mathcal{C} ou \mathbb{R}^3 .

3.11 - Como usar o “Teorema da Colagem” para obter Fractais

O teorema da colagem é central para a obtenção de IFS a partir de um atrator dado; seu enunciado em uma forma informal é:

Teorema da colagem: Considere um conjunto $L \in \mathcal{H}(X)$ dado e um número real $\epsilon \geq 0$ também dado. Escolhendo uma IFS com fator de contração $0 \leq s \leq 1$ tal que:

$$h(L, \cup_{n=1}^N w_n(L)) \leq \epsilon$$

onde $h(d)$ é a métrica de Hausdorff no espaço (X, d) . Então se A é o atrator do IFS.

$$h(L, A) \leq \frac{\epsilon}{1-s}$$

ou

$$h(L, A) \leq (1-s)^{-1} h(L, \cup_{n=1}^N w_n(L)) \text{ para todo } L \in \mathcal{H}(X).$$

O teorema “diz” que para encontrar um IFS cujo atrator se “pareça” com um dado conjunto, deve-se encontrar um conjunto de contração tal que suas uniões ou “colagens” sobre o conjunto de contrações se transforme proximamente ao dado conjunto (as proximidades são medidas pelas métricas de Hausdorff).

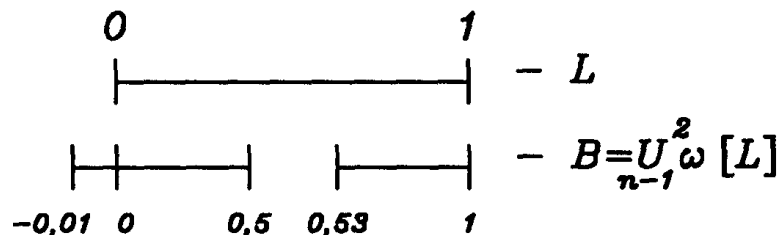
Exemplos: Suponha se esteja tentando contrações para uma IFS cujo atrator seja $[0, 1]$ e tenha-se por tentativa obtido

$$w_1(x) = 0,51x - 0,01 \text{ (contração } 0,51)$$

$$w_2(x) = 0,47x + 0,53 \text{ (contração } 0,47)$$

Quanto o atrator do IFS obtido pelas w_i acima estará longe de $[0, 1]$? Pelo Teorema da Colagem deve-se calcular as $h(d)$:

$$h([0, 1], \cup_{i=1}^2 w_i([0, 1])) = h([0, 1], [-0,01, 0,5] \cup [0,53, 1])$$



$$d(L, B) = \max\{d(x, B), x \in A\} = |0,515 - 0,53| = 0,015$$

$$d(B, L) = \max\{d(x, A), x \in B\} = 0,01$$

$$h(L, B) = 0,015$$

(o fator de contração do IFS será: $0.51 = s$) pelo teorema da colagem distância do limite do IFS para A será:

$$h([0, 1], A) \leq \frac{0.015}{(1 - 0.51)} = \frac{0.015}{0.49} = 0.04$$

OBS: As contrações podem aparecer de diversas formas como por exemplo:

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta & -s \sin \theta \\ r \sin \theta & s \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

neste caso fica mais fácil computar as contrações s_i de cada i (serão o maior r ou s) e, para todo o IFS a contração será o maior dos s_i .

Outro exemplo: $\{\mathcal{C}, w_i\}$,

$$w_i(z) = s_1 z + (1 - s_i) a_i$$

nesta forma a_i é o ponto fixo e s_i é o fator de escala:

ou no $\mathbb{R}^3 : \{\mathbb{R}^3, w_i\}$

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} j \\ k \\ \ell \end{vmatrix}$$

3.12 - Conjuntos de Condensação

Uma outra forma de fazer mapeamentos de contração em $\mathcal{H}(X)$ é através de conjuntos de condensação.

Definição 1: Considere um espaço métrico (X, d) e um elemento C de $\mathcal{H}(X)$. Uma transformação $w_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ tal que $w_0(B) = C$ para todo conjunto B , elemento de $\mathcal{H}(X)$, é chamada transformação de condensação e o conjunto associado, C , é chamado de **conjunto de condensação**.

Obs.: A transformação de condensação w_0 é um mapeamento de contração em $\mathcal{H}(X)$, $h(d)$ com fator de contração zero. Ela possui um único ponto fixo, o conjunto de condensação.

Definição 2: Chama-se uma IFS com condensação a IFS em que uma das contrações é uma transformação de condensação: $\{X, w_0, w_1, w_2, \dots, w_n\}$ onde w_0 é uma condensação e $\{X, w_1, \dots, w_n\}$ é uma IFS com fator de contração $0 \leq s < 1$. O fator de contração do IFS com condensação é o mesmo da IFS sem condensação.

Obs: O teorema da colagem para IFS com condensação é:

Teorema da Colagem com Condensação: Se $\{X; w_n, n = 0, 1, \dots, N\}$ é uma IFS com condensação e com fator de contração s , então a transformação

$$W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$$

$$W(B) = \cup_{n=0}^N w_n(B) \quad \forall B \in \mathcal{H}(X)$$

é um mapeamento de contração em $(\mathcal{H}(X), h(d))$ com fator de contração s tal que

$$h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C) \quad \forall B \text{ e } C \in \mathcal{H}(X)$$

seu único ponto fixo $A \in \mathcal{H}(X)$ obedece a

$$A = W(A) = \cup_{n=0}^N w_n(A)$$

e é obtido por $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{on}(B) \quad \forall B \in \mathcal{H}(X)$

Exemplo:

Seja a *IFS* : $\{\mathbb{R}; w_0, w_1\}$, o conjunto de condensação é $w_0 = [0, 1]$ e $w_1 = \frac{1}{2}x + 2$.

O que seria o atrator?

Considere um $B \in \mathbb{R}$ por exemplo $[-1, 1]$ por definição

$$w_0(B) = [0, 1]$$

$$w_1(B) = \left[\frac{1}{2} + 2, -\frac{1}{2} + 2 \right] = [1.5, 2.5]$$

$$W^{o1}(B) = [0, 1] \cup [1.5, 2.5]$$

$$W^{o2}(B) = W(W^{o1}(B)) = [0, 1] \cup [1.5, 2.5] \cup [2.75, 3.25]$$

$$W^{o3}(B) = W(W^{o2}(B)) = [0, 1] \cup [1.5, 2.5] \cup [2.75, 3.25] \cup [3.375, 3.625]$$

$$W^{o4}(B) = W(W^{o3}(B)) = [0, 1] \cup [1.5, 2.5] \cup [2.75, 3.25] \cup [3.375, 3.625] \cup [3.6875, 3.8125]$$

No limite teremos intervalos retos cada vês menores tendendo para o número 4.

Se $B \in \mathbb{R}$ for $[0, 1]$


$$W^{o1}(B) = [0, 1] \cup [2, 2.5]$$

$$W^{o2}(B) = [0, 1] \cup ([2, 2.5], [3.0, 3.25])$$

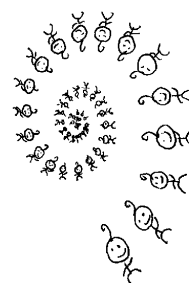
$$W^{o3}(B) = [0, 1] \cup ([2, 2.5], [3.0, 3.25], [3.5, 3.625])$$

$$W^{o4}(B) = etc...$$

também tenderá para o 4.

Se $W_0 =$  e $W_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0,97 \cos 22^\circ & -0,97 \sin 22^\circ \\ 0,93 \sin 22^\circ & 0,97 \cos 22^\circ \end{vmatrix}$

O atrator do IFS: $\{\mathbb{R}^2, W_0, W_1\}$ é a figura ao lado:



3.12 - Fractais com Parâmetros

Fractais podem depender de parâmetros, por exemplo:

$$w(x) = \frac{1}{2}x + p, \text{ tem ponto fixo} = 2p$$

As fractais com parâmetro dependem do parâmetro continuamente. Neste caso o atrator também será uma função de p

Fractais com parâmetros podem ser usados para produzir leves modificações na imagem, simular animação, produzir novos atratores a partir de atrator conhecidos etc ...

Pequenas mudanças no parâmetro produzirão sempre pequenas mudanças no atrator.