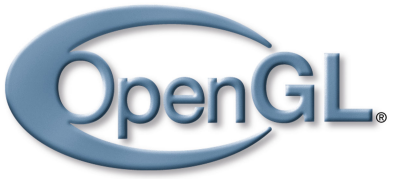
Computação Gráfica

TCC-00291

Assunto: Projeção



Introdução

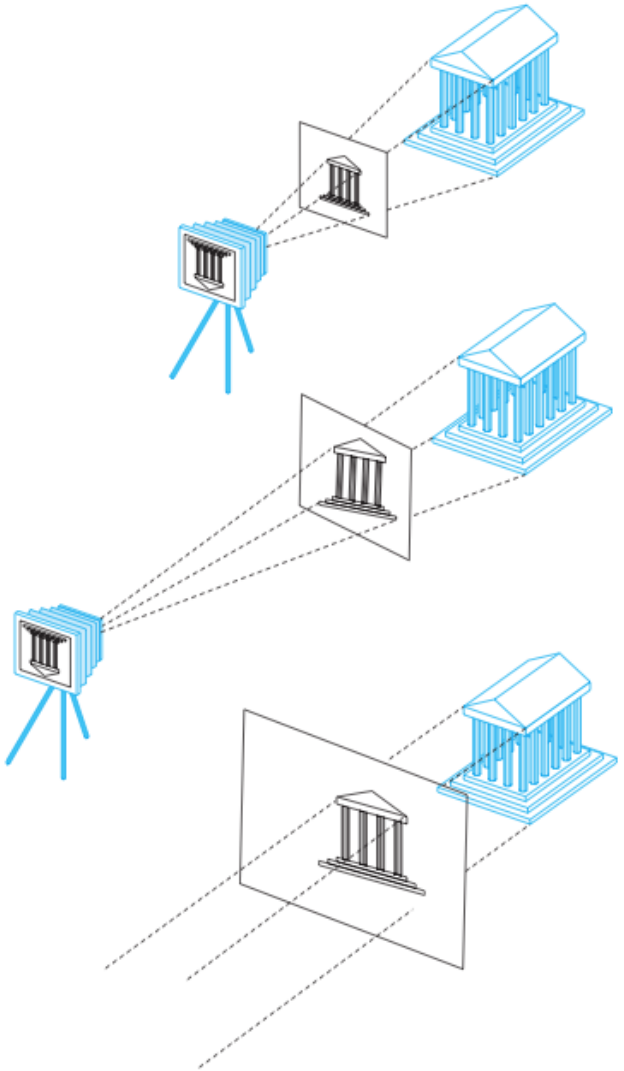
Tipos de projeção

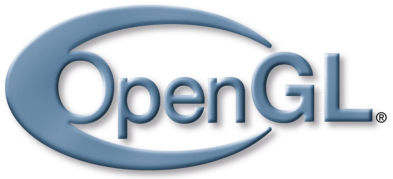
A etapa de Projeção tem papel fundamental na geração de imagens a partir de objetos tridimensionais.

Introdução

Projeção padrão

O tipo de projeção mais simples, padrão da OpenGL, é a Projeção Ortográfica.



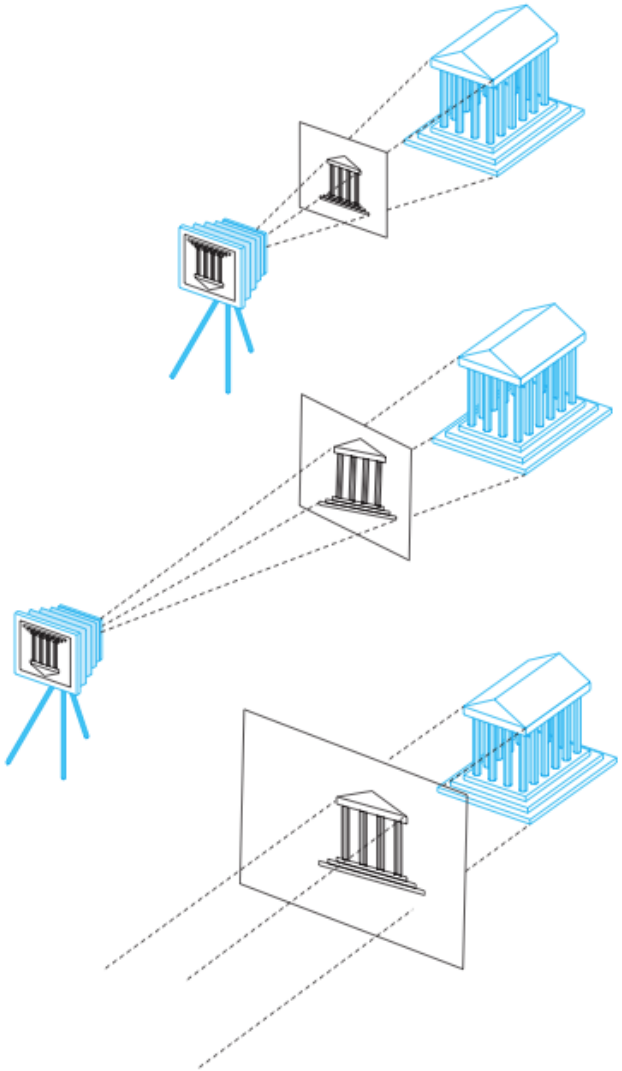


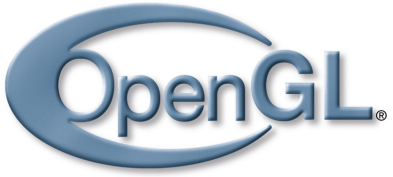
Introdução

Projeção padrão

O tipo de projeção mais simples, padrão da OpenGL, é a Projeção Ortográfica.

Na prática, podemos imaginar que este tipo de projeção é obtido por câmeras virtuais infinitamente distantes do plano de projeção.

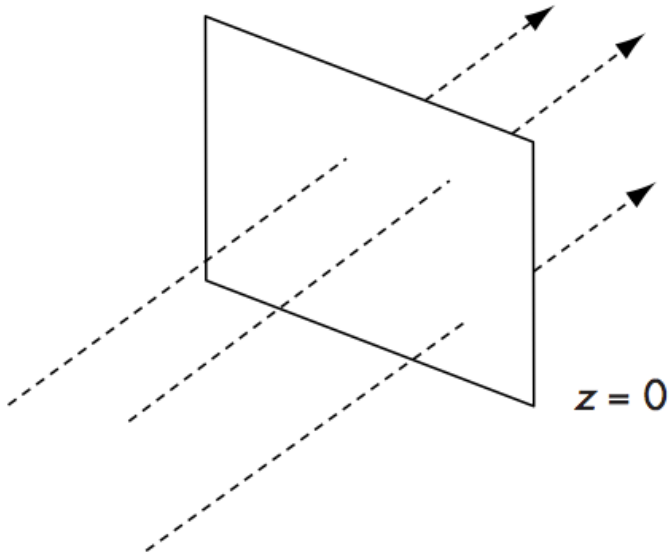




Introdução

Projeção padrão

Suponha que a direção de projeção é paralela ao eixo z e ortogonal ao plano de projeção z=0.

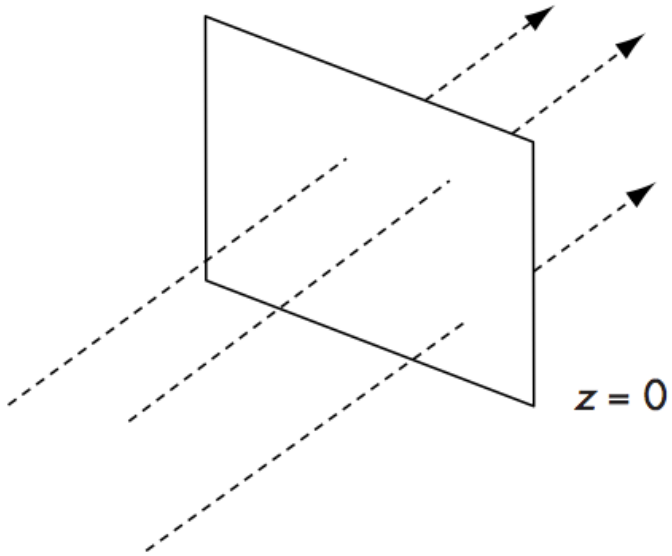


Introdução

Projeção padrão

Suponha que a direção de projeção é paralela ao eixo z e ortogonal ao plano de projeção z=0.

Neste caso, mesmo que a posição do plano de projeção seja modificada a projeção da cena permanece inalterada.

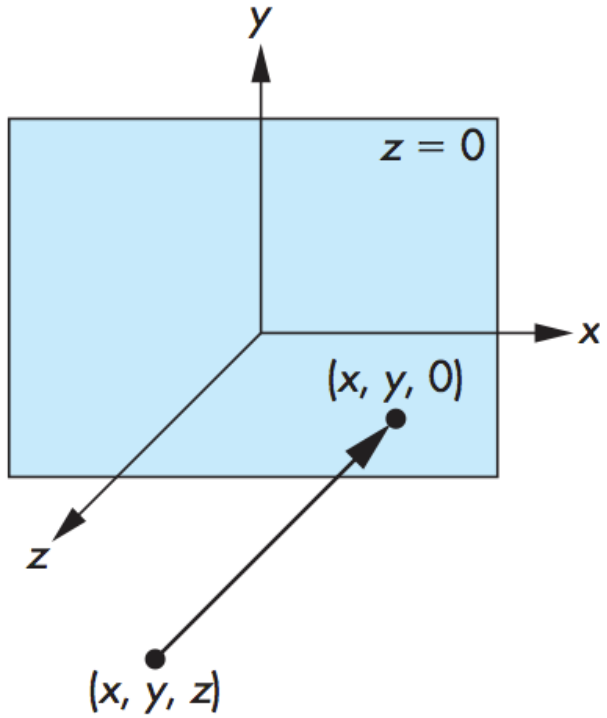


Introdução

Projeção padrão

Suponha que a direção de projeção é paralela ao eixo z e ortogonal ao plano de projeção z=0.

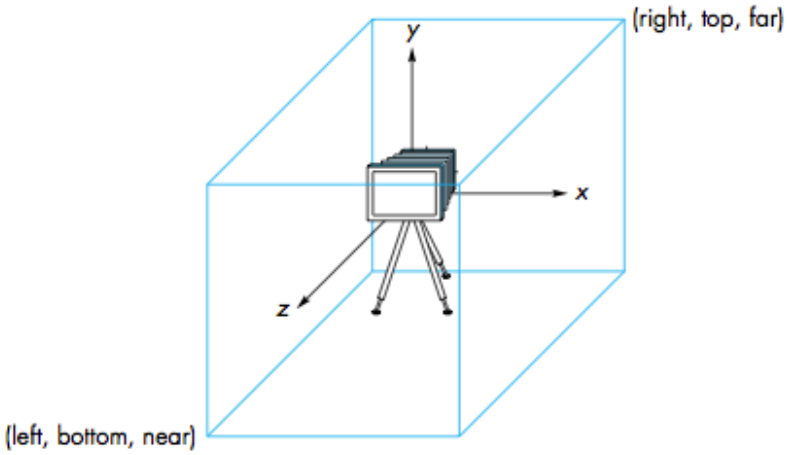
Neste caso, mesmo que a posição do plano de projeção seja modificada a projeção da cena permanece inalterada.



Introdução

Projeção padrão

Podemos então supor que a câmera virtual está orientada de acordo com o sistema de coordenadas do mundo.

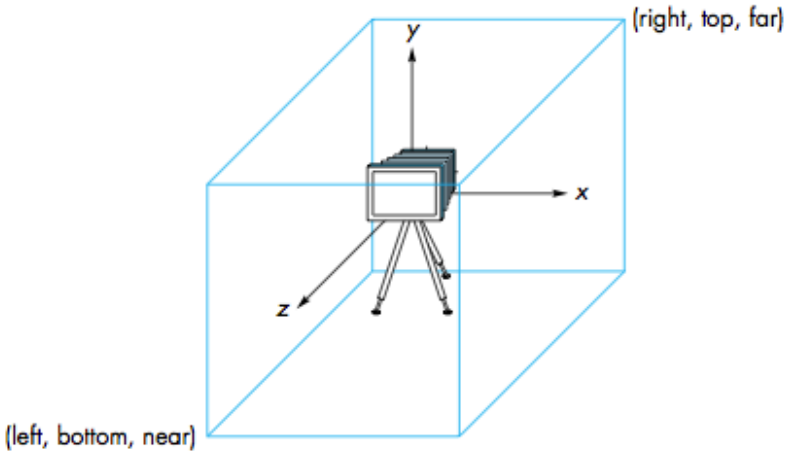


Introdução

Projeção padrão

Podemos então supor que a câmera virtual está orientada de acordo com o sistema de coordenadas do mundo.

Apenas objetos dentro do volume de visão definido pelos planos *left, right, bottom, up, near* e *far* são visíveis.

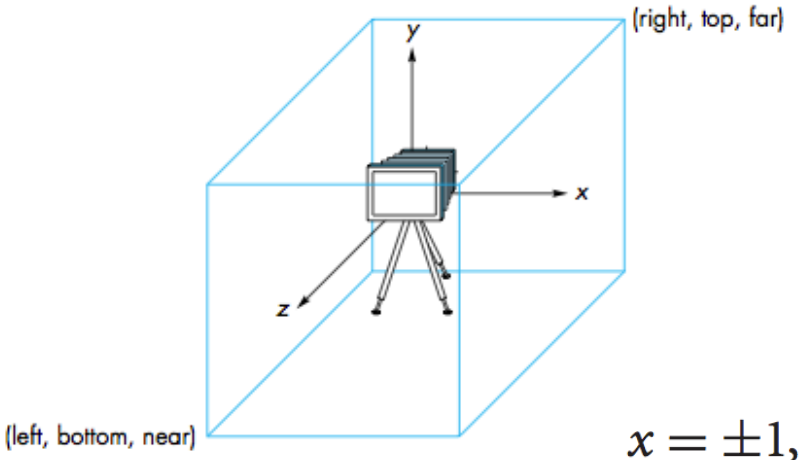


Introdução

Projeção padrão

Podemos então supor que a câmera virtual está orientada de acordo com o sistema de coordenadas do mundo.

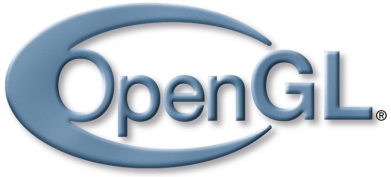
Apenas objetos dentro do volume de visão definido pelos planos *left, right, bottom, up, near* e *far* são visíveis.



$$x = \pm 1,$$

$$y = \pm 1,$$

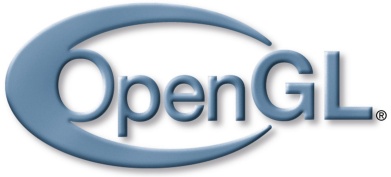
$$z = \pm 1.$$



Projeções

Projeção Ortográfica

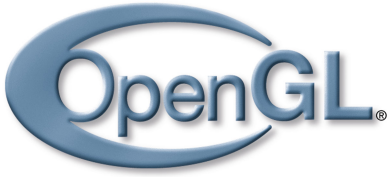
Como modificar a configuração padrão?



Projeções

Projeção Ortográfica

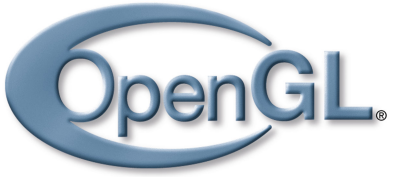
Como modificar a configuração padrão?
Definindo matrizes de projeção!



Projeções

Projeção Ortográfica

Qual matriz representa a projeção padrão?

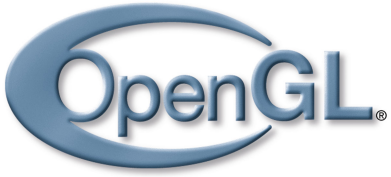


Projeções

Projeção Ortográfica

Qual matriz representa a projeção padrão?

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Projeções

Projeção Ortográfica

Na prática, construiremos uma função:

mat4 glOrtho(float left, float right, float bottom, float up, float near, float far)

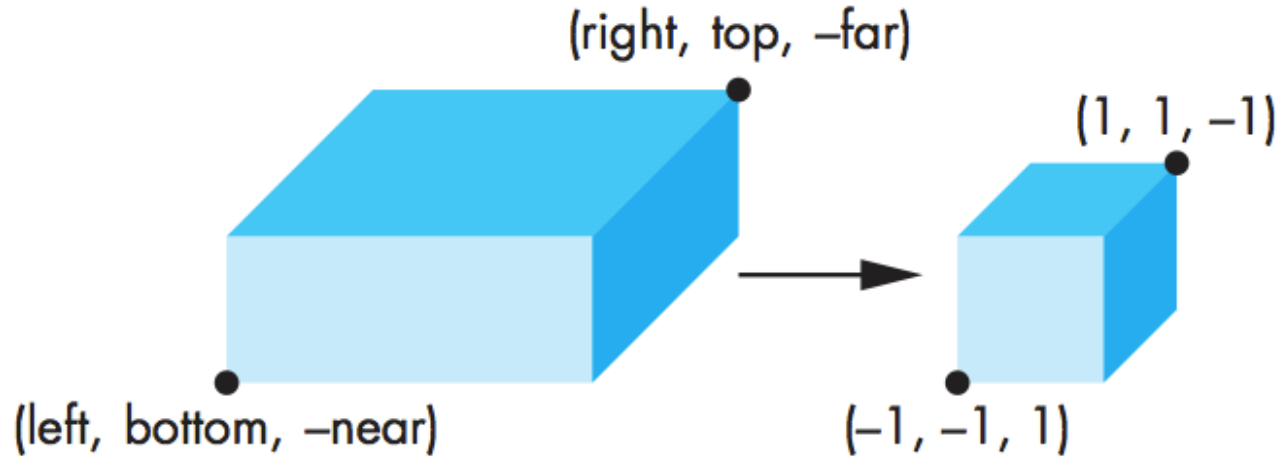
Projeções

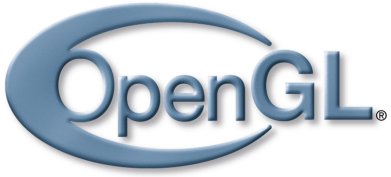
Projeção Ortográfica

Na prática, construiremos uma função:

mat4 glOrtho(float left, float right, float bottom, float up, float near, float far)

Que identifica o volume de visão definido pelo usuário e o volume de visão unitário padrão.





Projeções

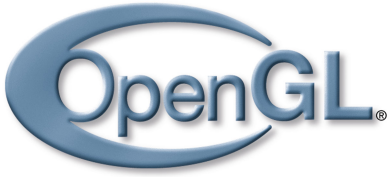
Projeção Ortográfica

Na prática, construiremos uma função:

mat4 glOrtho(float left, float right, float bottom, float up, float near, float far)

Precisamos de uma translação:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(-(right + left)/2, -(top + bottom)/2, +(far + near)/2)$$



Projeções

Projeção Ortográfica

Na prática, construiremos uma função:

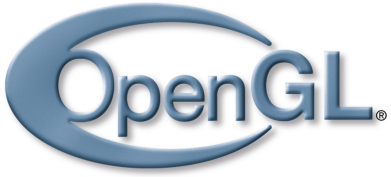
mat4 glOrtho(float left, float right, float bottom, float up, float near, float far)

Precisamos de uma translação:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(-(right + left)/2, -(top + bottom)/2, +(far + near)/2)$$

E também de uma escala:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(2/(right - left), 2/(top - bottom), 2/(near - far)),$$



Projeções

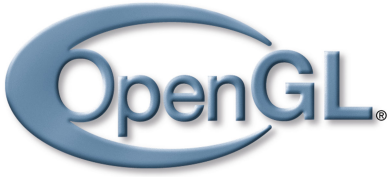
Projeção Ortográfica

Na prática, construiremos uma função:

mat4 glOrtho(float left, float right, float bottom, float up, float near, float far)

Logo a matriz de projeção ortogonal N é dada por:

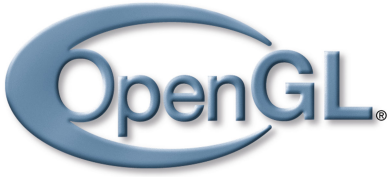
$$\mathbf{N} = \mathbf{ST} = \begin{bmatrix} \frac{2}{right-left} & 0 & 0 & -\frac{left+right}{right-left} \\ 0 & \frac{2}{top-bottom} & 0 & -\frac{top+bottom}{top-bottom} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{far-near} & -\frac{far+near}{far-near} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Projeções

Projeção Perspectiva

Projeções Ortográficas não são boas para prover a sensação de profundidade.

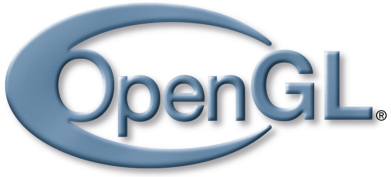


Projeções

Projeção Perspectiva

Projeções Ortográficas não são boas para prover a sensação de profundidade.

Solução: Projeção Perspectiva.

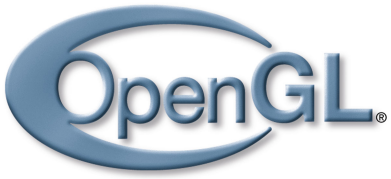


Projeções

Projeção Perspectiva

Projeções Ortográficas não são boas para prover a sensação de profundidade.

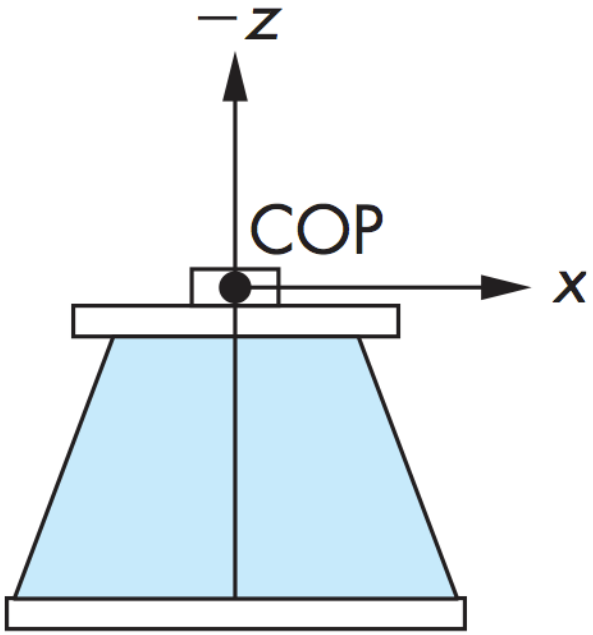
Solução: Projeção Perspectiva.
Neste tipo de projeção, a direção de projeção não é ortogonal ao pano de projeção.



Projeções

Projeção Perspectiva

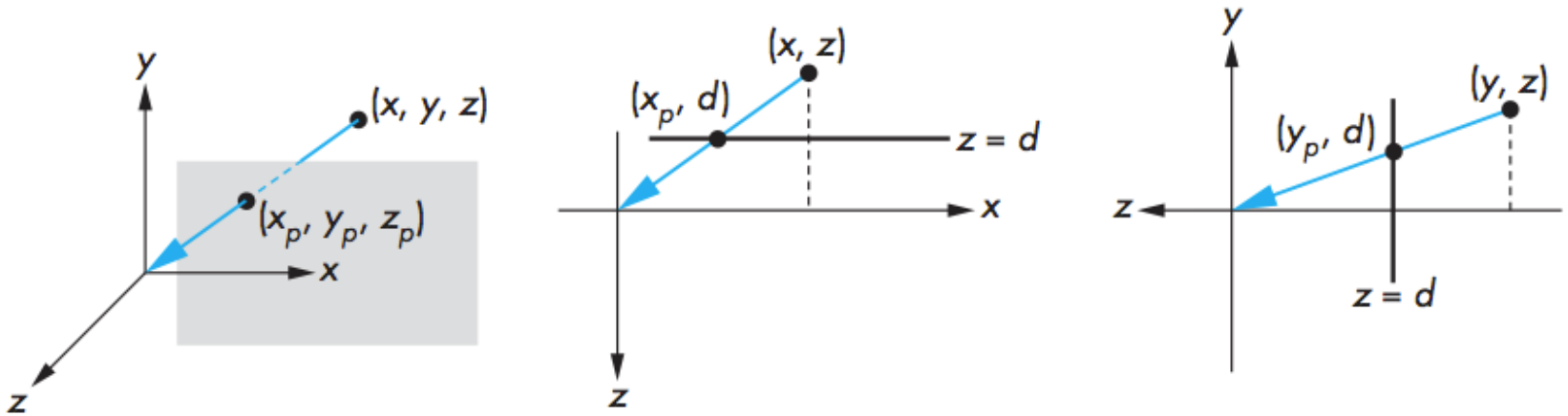
Suponha que o centro de projeção seja a origem do sistema de coordenadas do mundo e que a câmera aponta para a direção negativa do eixo z.



Projeções

Projeção Perspectiva

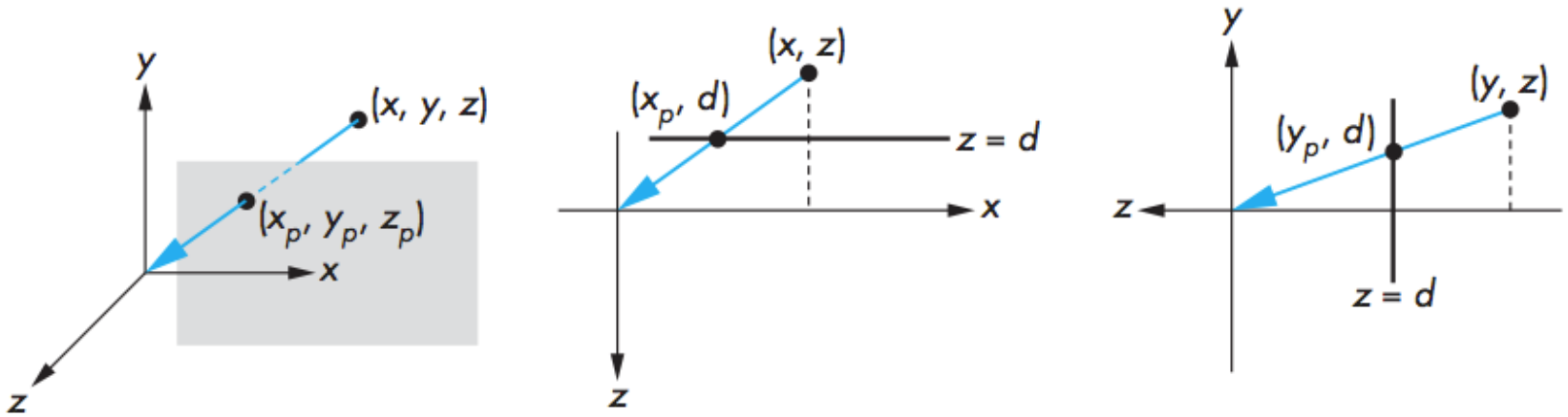
Supondo que o plano de projeção está na posição z = d, temos:



Projeções

Projeção Perspectiva

Supondo que o plano de projeção está na posição z = d, temos:



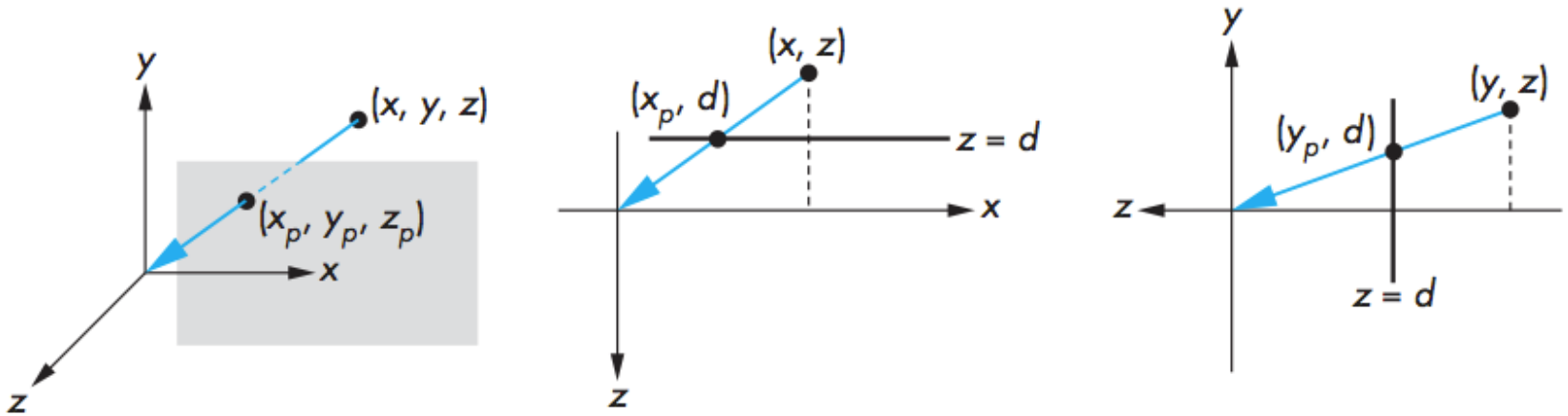
Usando semelhança de triângulos…

$$x_p = \frac{x}{z/d}.$$

Projeções

Projeção Perspectiva

Supondo que o plano de projeção está na posição z = d, temos:



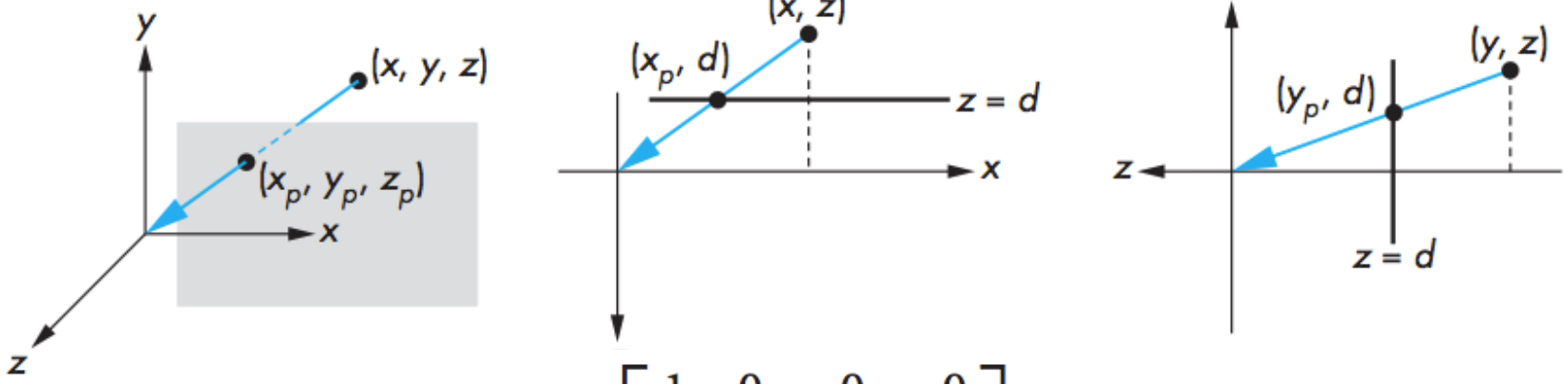
Usando semelhança de triângulos…

$$y_p = \frac{y}{z/d}.$$

Projeções

Projeção Perspectiva

Supondo que o plano de projeção está na posição z = d, temos:

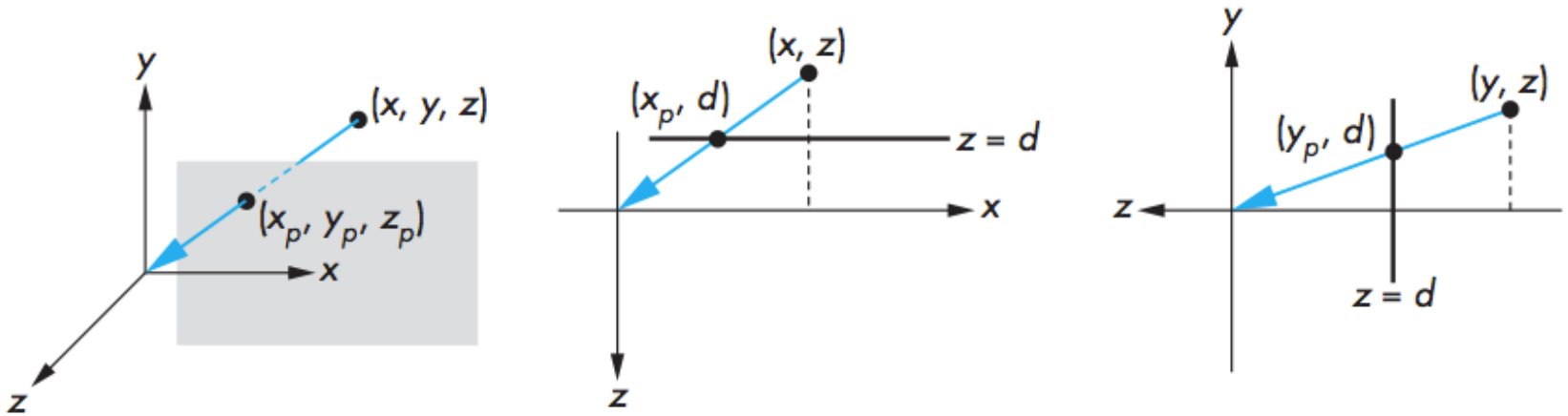


$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix}$$

Projeções

Projeção Perspectiva

Supondo que o plano de projeção está na posição z = d, temos:

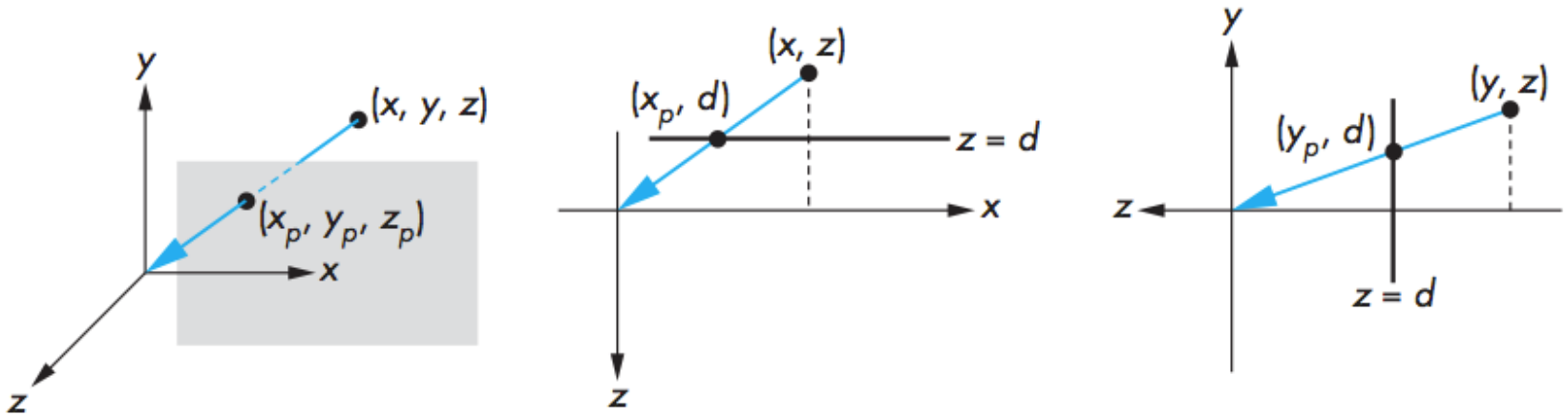


$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ z/d \end{bmatrix}$$

Projeções

Projeção Perspectiva

Supondo que o plano de projeção está na posição z = d, temos:

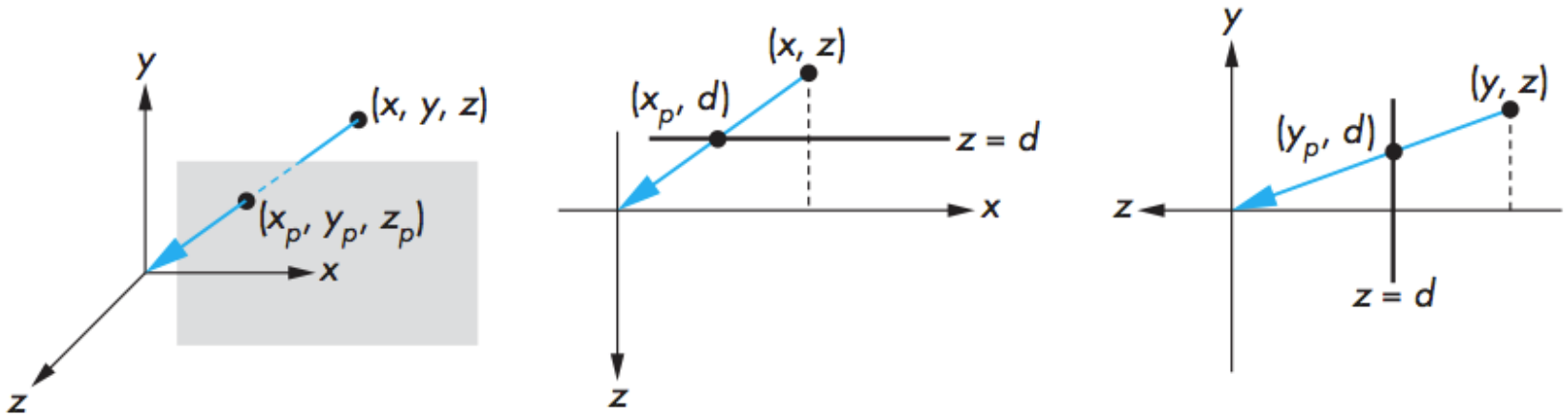


$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ z/d \end{bmatrix} \quad ?$$

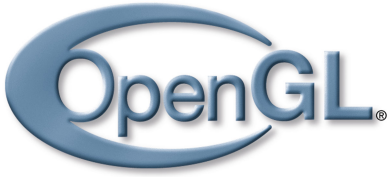
Projeções

Projeção Perspectiva

Supondo que o plano de projeção está na posição z = d, temos:



Esta transformação é irreversível!



Projeções

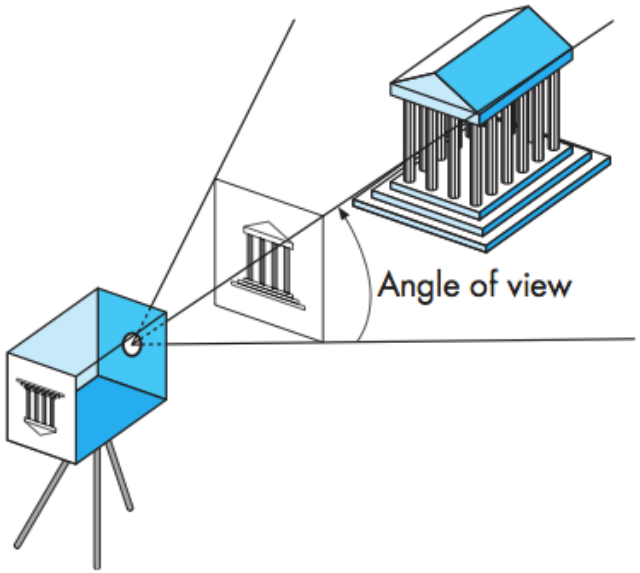
Projeção Perspectiva

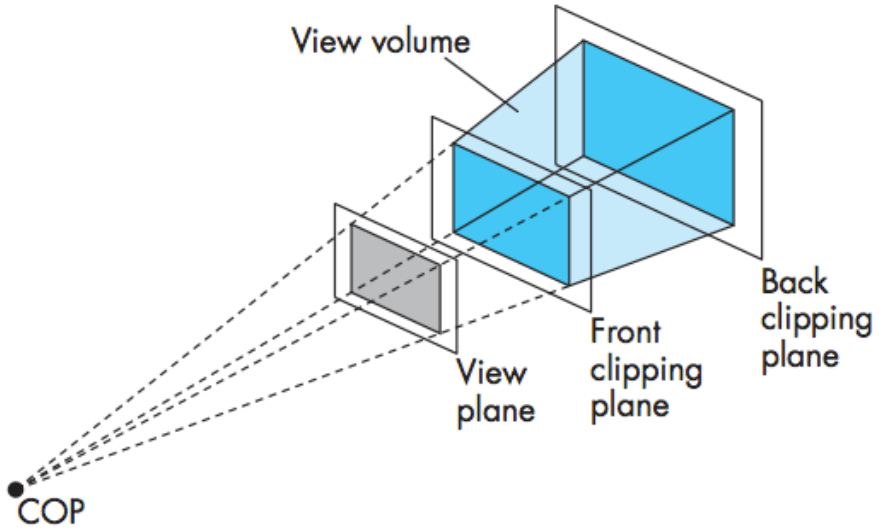
Como definir uma projeção perspectiva geral?

Projeções

Projeção Perspectiva

Como definir uma projeção perspectiva geral?
Definiremos o volume de visão.

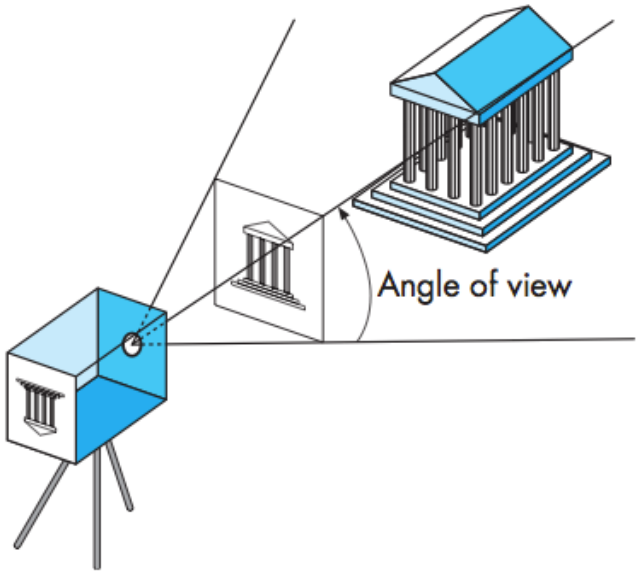


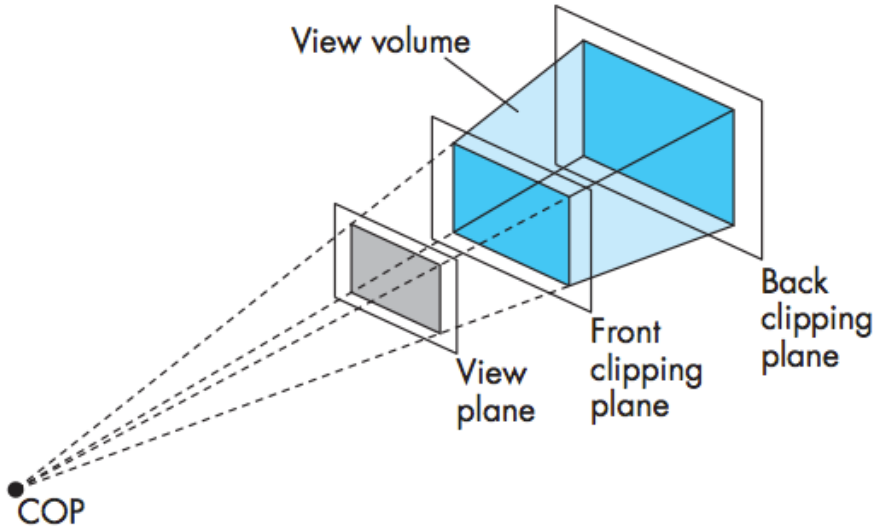


Projeções

Projeção Perspectiva

Como definir uma projeção perspectiva geral?
Definiremos o volume de visão.



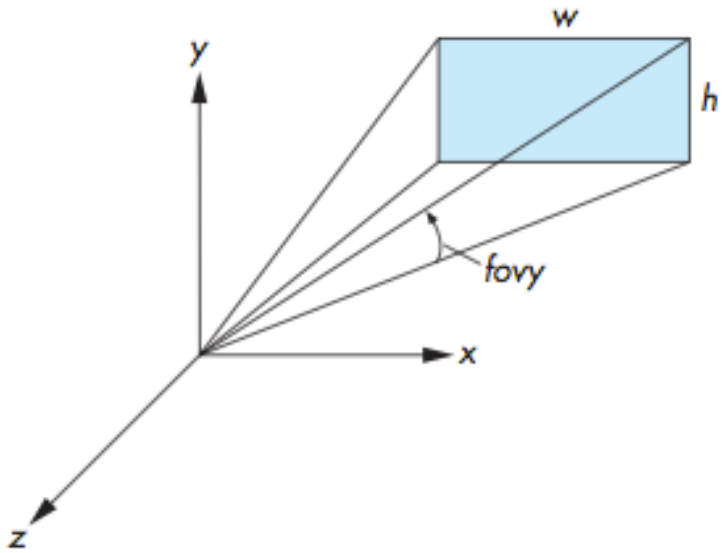


mat4 Perspective(GLfloat fovy, GLfloat aspect, GLfloat near, GLfloat far);

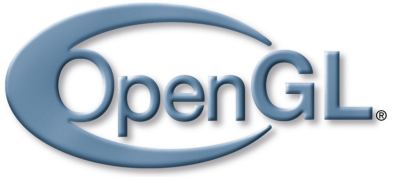
Projeções

Projeção Perspectiva

Como definir uma projeção perspectiva geral?
Definiremos o volume de visão.



mat4 Perspective(GLfloat fovy, GLfloat aspect, GLfloat near, GLfloat far);

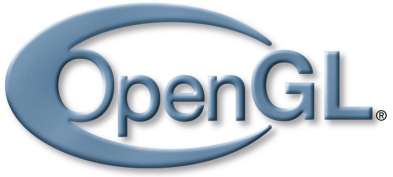


Projeções

Projeção Perspectiva

Suponha que:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



Projeções

Projeção Perspectiva

Então:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= \alpha z + \beta, \\ w' &= -z. \end{aligned}$$

Projeções

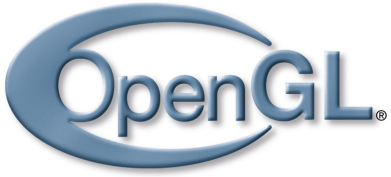
Projeção Perspectiva

Então:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x' = x,$$
$$y' = y,$$
$$z' = \alpha z + \beta,$$
$$w' = -z.$$

$$x'' = -\frac{x}{z},$$
$$y'' = -\frac{y}{z},$$
$$z'' = -\left(\alpha + \frac{\beta}{z}\right).$$



Projeções

Projeção Perspectiva

Aplicando uma projeção ortogonal:

$$\mathbf{M}_{\text{orth}}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{p}' = \mathbf{M}_{\text{orth}}\mathbf{N}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ -z \end{bmatrix}$$

Projeções

Projeção Perspectiva

Aplicando uma projeção ortogonal:

$$\mathbf{M}_{\text{orth}}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{p}' = \mathbf{M}_{\text{orth}}\mathbf{N}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ -z \end{bmatrix}$$

$$x_p = -\frac{x}{z},$$

$$y_p = -\frac{y}{z}.$$

Projeções

Projeção Perspectiva

Aplicando uma projeção ortogonal:

$$\mathbf{M}_{\text{orth}}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{p}' = \mathbf{M}_{\text{orth}}\mathbf{N}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ -z \end{bmatrix}$$

$$x_p = -\frac{x}{z},$$

$$y_p = -\frac{y}{z}.$$

Projeção perspectiva!!!

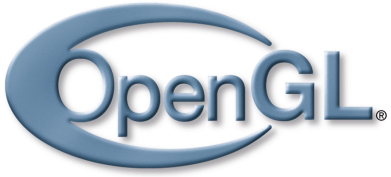
Projeções

Projeção Perspectiva

De fato:

$$x_p = -\frac{x}{z},$$
$$y_p = -\frac{y}{z}.$$

$$\begin{cases} x = \pm z. & x'' = \pm 1. \\ y = \pm z & y'' = \pm 1. \\ z = -near & z'' = -\left(\alpha - \dfrac{\beta}{near}\right) \\ z = -far & z'' = -\left(\alpha - \dfrac{\beta}{far}\right) \end{cases}$$



Projeções

Projeção Perspectiva

Sendo assim:

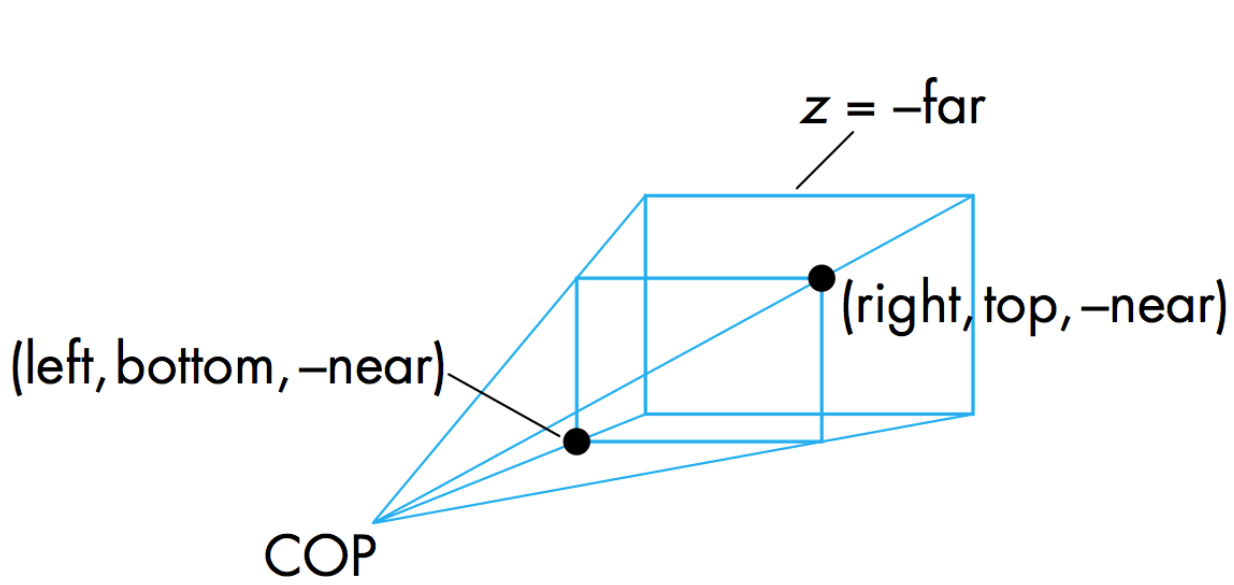
$$\alpha = -\frac{near + far}{near - far},$$

$$\beta = -\frac{2 * near * far}{near - far},$$

Projeções

Projeção Perspectiva

Precisamos transformar o volume de visão.

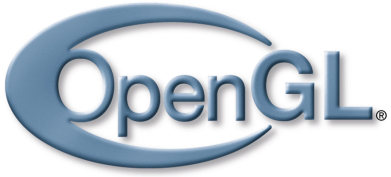


$$x = \pm z.$$

$$y = \pm z$$

$$z = -near$$

$$z = -far$$



Projeções

Projeção Perspectiva

Finalmente, podemos escrever a matriz de projeção geral:

$$\mathbf{P} = \mathbf{NSH} = \begin{bmatrix} \frac{2*near}{right-left} & 0 & \frac{right+left}{right-left} & 0 \\ 0 & \frac{2*near}{top-bottom} & \frac{top+bottom}{top-bottom} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{far+near}{far-near} & \frac{-2far*near}{far-near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Onde: $top = near * \tan(fovy), \quad left = -right,$

$right = top * aspect, \quad bottom = -top,$

Projeções

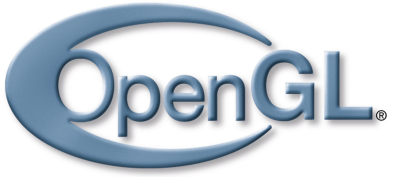
Projeção Perspectiva

Finalmente, podemos escrever a matriz de projeção geral:

$$\mathbf{P} = \mathbf{NSH} = \begin{bmatrix} \frac{2*near}{right-left} & 0 & \frac{right+left}{right-left} & 0 \\ 0 & \frac{2*near}{top-bottom} & \frac{top+bottom}{top-bottom} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{far+near}{far-near} & \frac{-2far*near}{far-near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Onde: $top = near * \tan(fovy)$, $left = -right$,

$right = top * aspect$, $bottom = -top$,



Projeções

Projeção Perspectiva

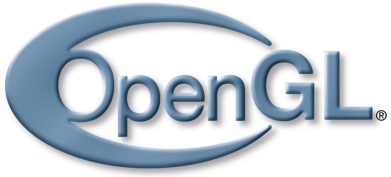
Simplificando e considerando o volume de visão simétrico…

$$\mathbf{P} = \mathbf{NSH} = \begin{bmatrix} \frac{near}{right} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{near}{top} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-far+near}{far-near} & \frac{-2far*near}{far-near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$top = near * \tan(fovy), \qquad left = -right,$$

$$right = top * aspect, \qquad bottom = -top,$$



Projeções

Projeção Perspectiva

Código …

Computação Gráfica

TCC-00291

Assunto: Projeção