Laboratório de Programação com Games

Professor:

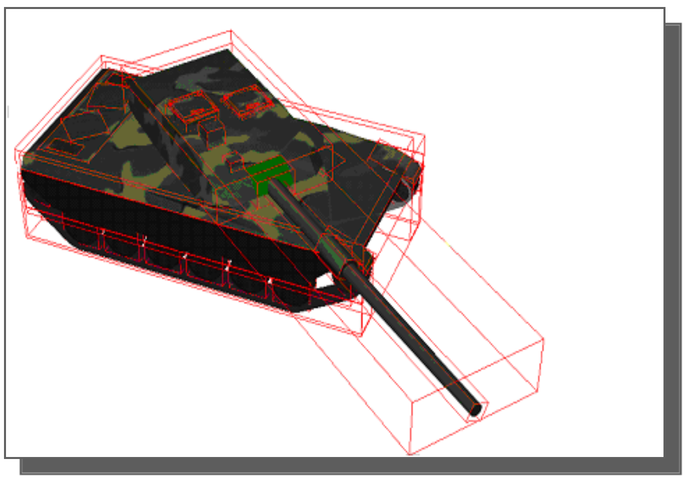
Anselmo Montenegro
www.ic.uff.br/~anselmo

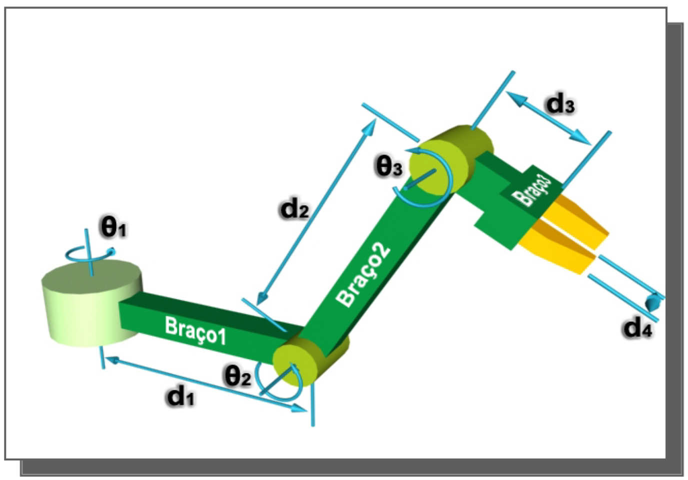
Conteúdo:

- Transformações no plano

Transformações geométricas: *Introdução*

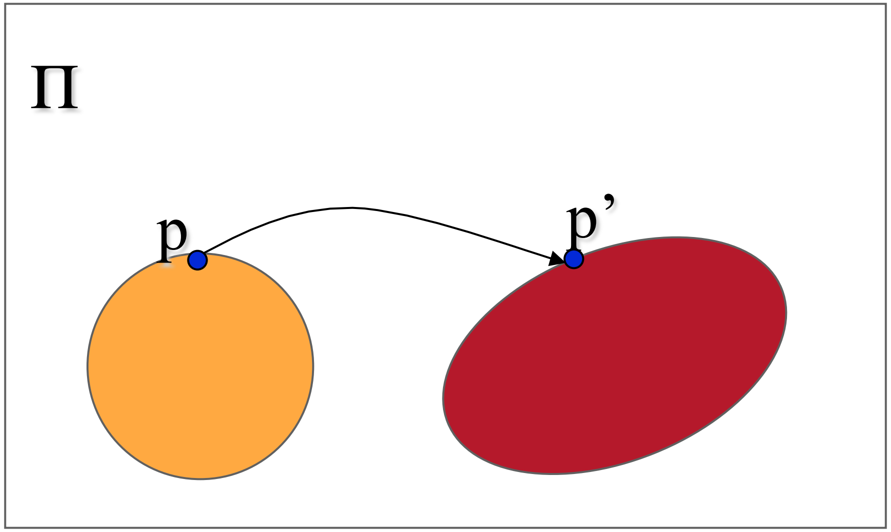
- Na Computação Gráfica é essencial poder *movimentar* e *deformar* objetos.
- Casos particulares: *transformações geométricas*.





Transformações geométricas: *Introdução*

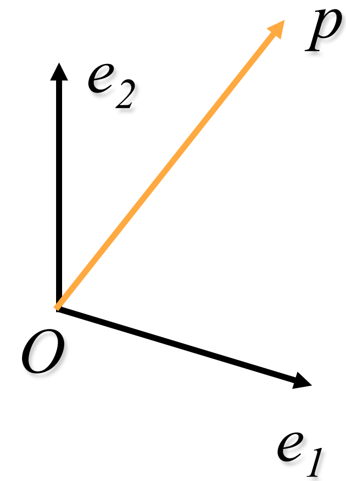
- Uma transformação T no plano é uma função que associa a cada ponto p do plano euclidiano Π um ponto p' em Π.



- Conveniente introduzir um *sistema de coordenadas*.

Transformações geométricas: *transformações no plano (2D)*

- Referencial no plano
  - (O, e_1, e_2), onde O é um ponto escolhido como *origem* e (e_1, e_2) forma uma *base* do R^2.
  - $OP = xe_1 + ye_2$
  - x e y são as coordenadas de p no referencial (O, e_1, e_2).
  - Coordenadas da origem O: $(0,0)$.



<u>Transformações geométricas</u>: *transformações no plano (2D)*

- Um referencial estabelece uma *correspondência entre o plano euclidiano Π e $R^2 = \{(x,y) \mid x, y \in R\}$*.

- Permite estudar transformações do plano a partir de transformações em R^2.

- Ponto de partida: *estrutura de espaço vetorial do R^2* (logo, do plano).

<u>Transformações geométricas</u>: *transformações lineares*

- Uma transformação $L: R^2 \rightarrow R^2$ é dita linear quando

$$L(\alpha p_1 + \beta p_2) = \alpha L(p_1) + \beta L(p_2),$$

onde $p_1, p_2 \in R^2$ e $a, b \in R$.

- Obs: $L(0, 0) = (0, 0)$ (ou seja, *a origem O do referencial é mantida fixa por uma transformação linear*).

Transformações geométricas: *transformações lineares*

- Uma transformação linear $L:R^2 \rightarrow R^2$ fica completamente determinada quando se conhecem $L(e_1)$ e $L(e_2)$, onde (e_1, e_2) formam uma base do R^2.

$$L(e_1) = ae_1 + be_2,\ L(e_2) = ce_1 + de_2$$

$$p = xe_1 + ye_2 \Rightarrow L(p) = xL(e_1) + yL(e_2) =$$

$$= x(ae_1 + be_2) + y(ce_1 + de_2) = (ax+cy)e_1 + (bx+dy)e_2$$

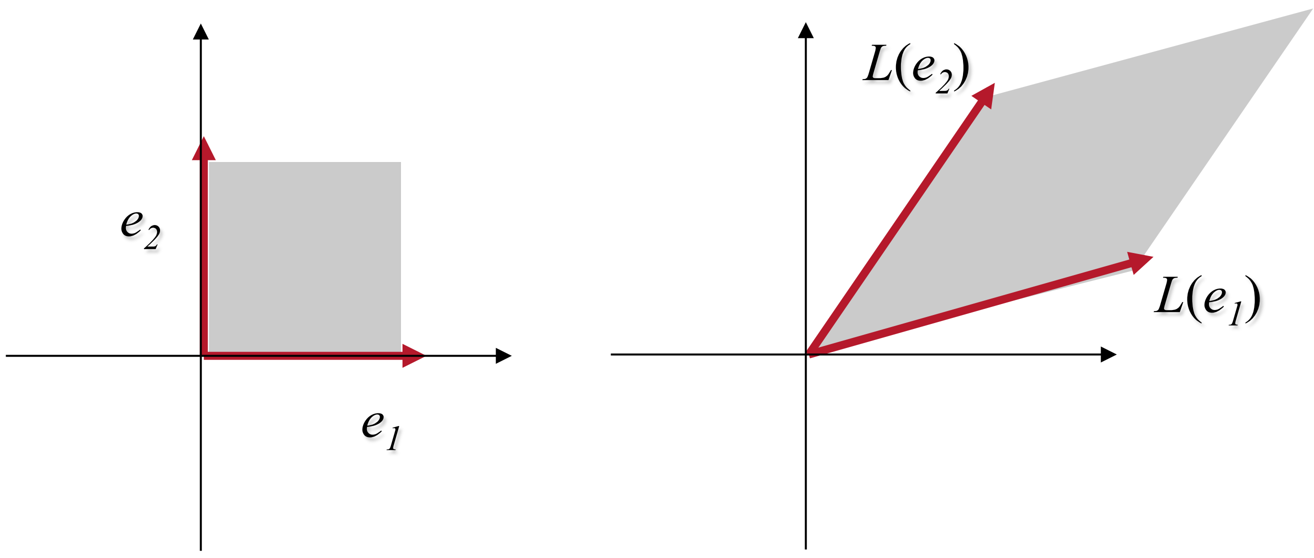
Matriz da transformação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} c \\ d \end{matrix}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$L(e_1)$ $L(e_2)$

Transformações geométricas: *transformações lineares*

- O mais comum é representar uma transformação linear com respeito à base canônica do R^2: $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0,1)$.

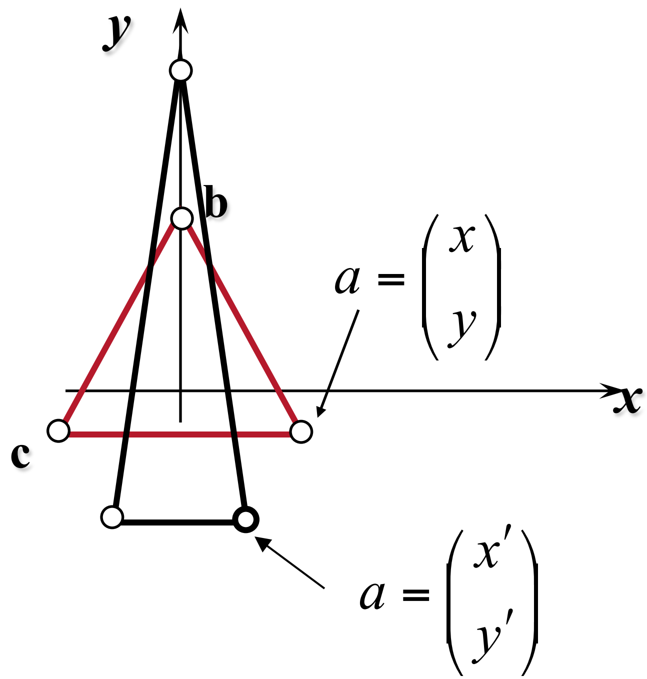


- Transformações lineares *preservam elementos lineares* (retas, planos, etc)

Transformações geométricas: *transformações lineares*

- Algumas transformações lineares correspondem a *transformações geométricas* importantes.
  - Escalas.
  - Reflexões.
  - Rotações.
  - Cisalhamento.

Transformações geométricas: *transformações lineares*

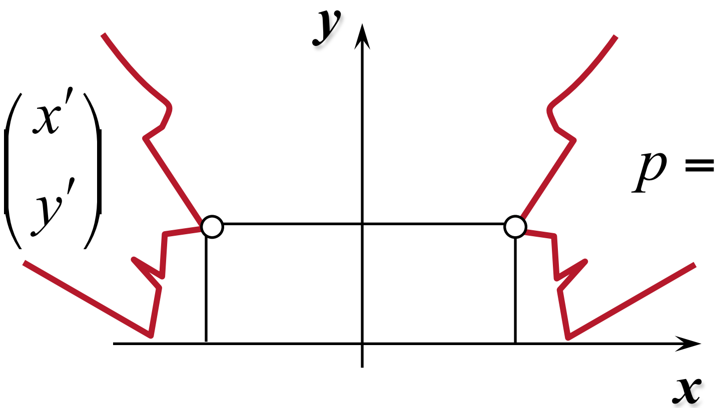


Redução $(0 < s_x < 1)$,
Aumento $(s_y > 1)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformações geométricas: *transformações lineares*

$$p' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$



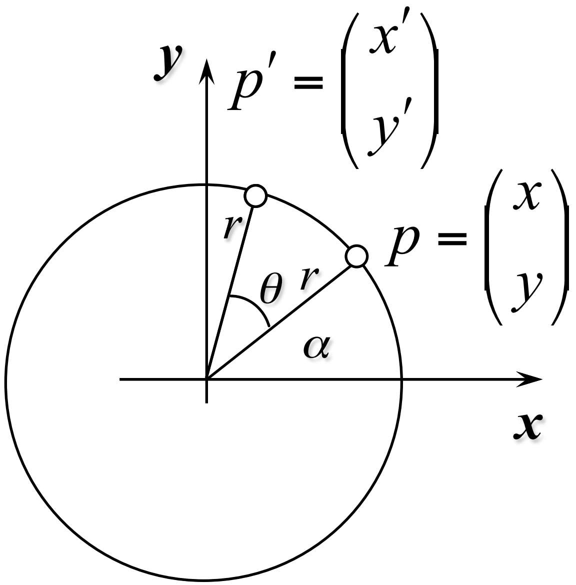
$$p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

x′ = -1.x
y′ =   y

Espelhamento em relação ao eixo y

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformações geométricas: *transformações lineares*



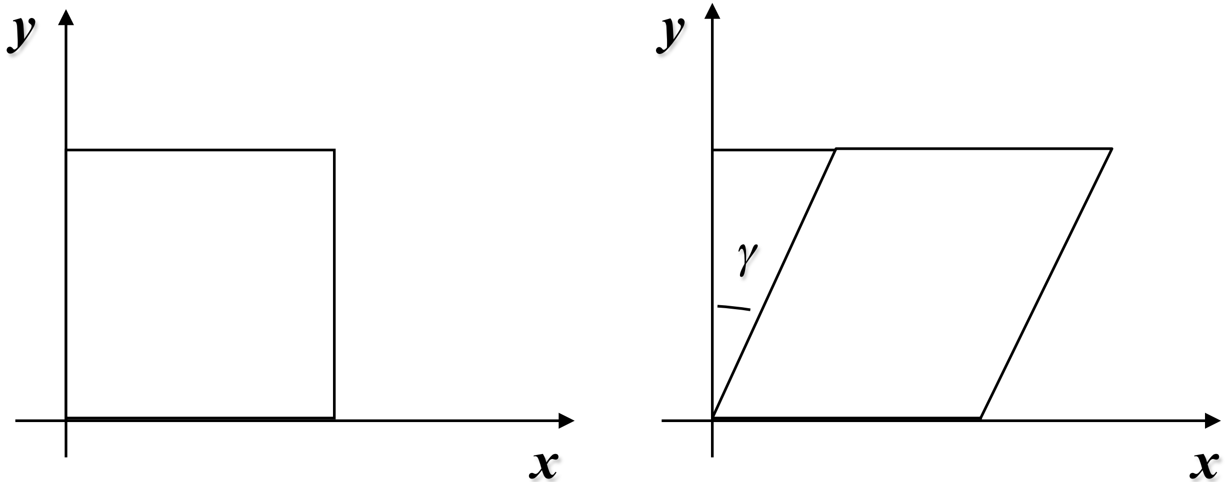
$$x = r\cos\alpha$$

$$y = r\sin\alpha$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cdot\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ r\sin\alpha\cdot\cos\theta + r\cos\alpha\cdot\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

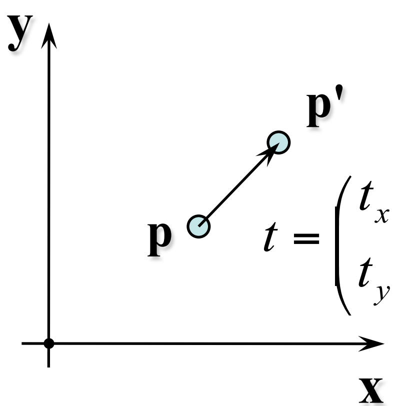
Transformações geométricas: *transformações lineares*



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y\tan\gamma \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformações geométricas: *transformações lineares*

- Não: mantêm a origem invariante. Logo, não podem representar translações.



$$t = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

$$p' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

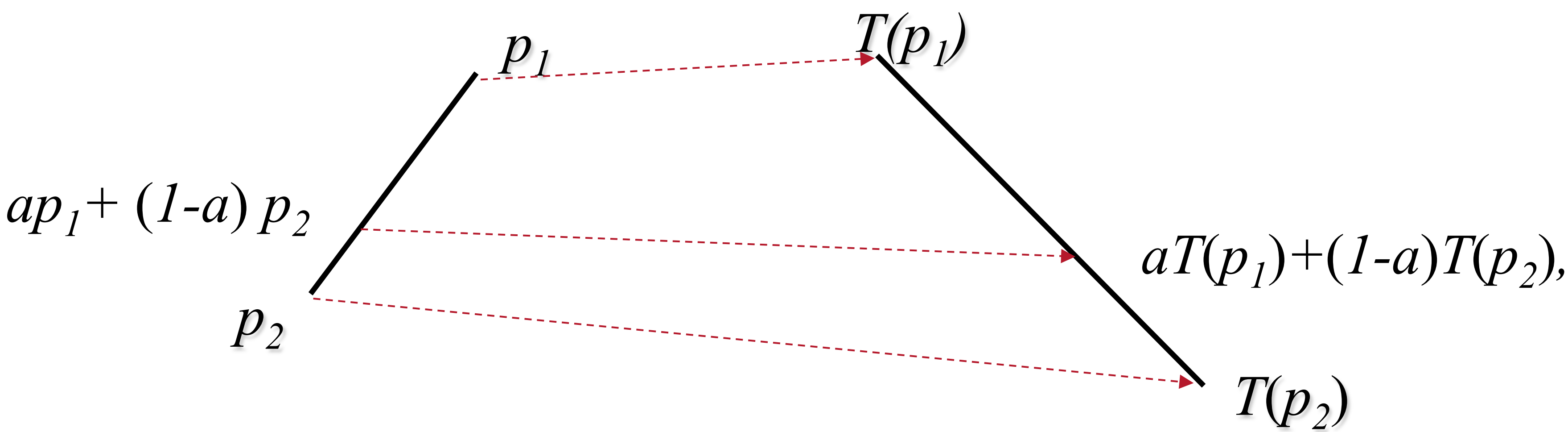
- Considerar uma classe mais ampla: *transformações afins*.

Transformações geométricas: *transformações afins*

- Uma transformação $T{:}R^2 \rightarrow R^2$ é dita afim quando

$$T(ap_1 + (1-a)\,p_2) = aT(p_1) + (1-a)T(p_2),$$

onde $p_1, p_2 \in R^2$ e $a \in R$.



Transformações geométricas: *transformações afins*

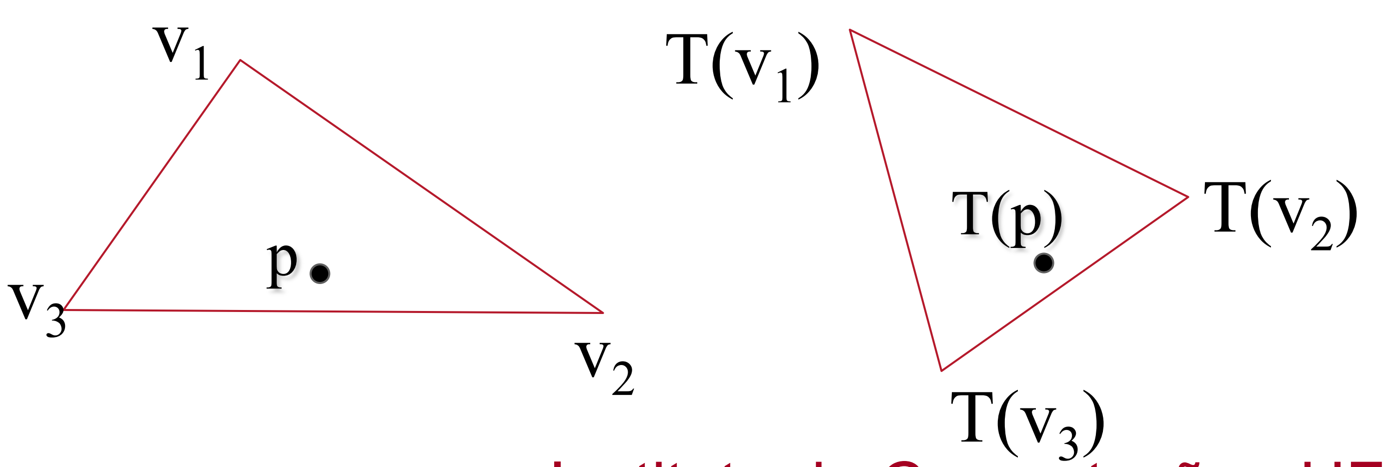
- Uma transformação T é afim se e somente se é da forma $T(p) = L(p) + t$, onde L é linear.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Transformações geométricas: *transformações afins*

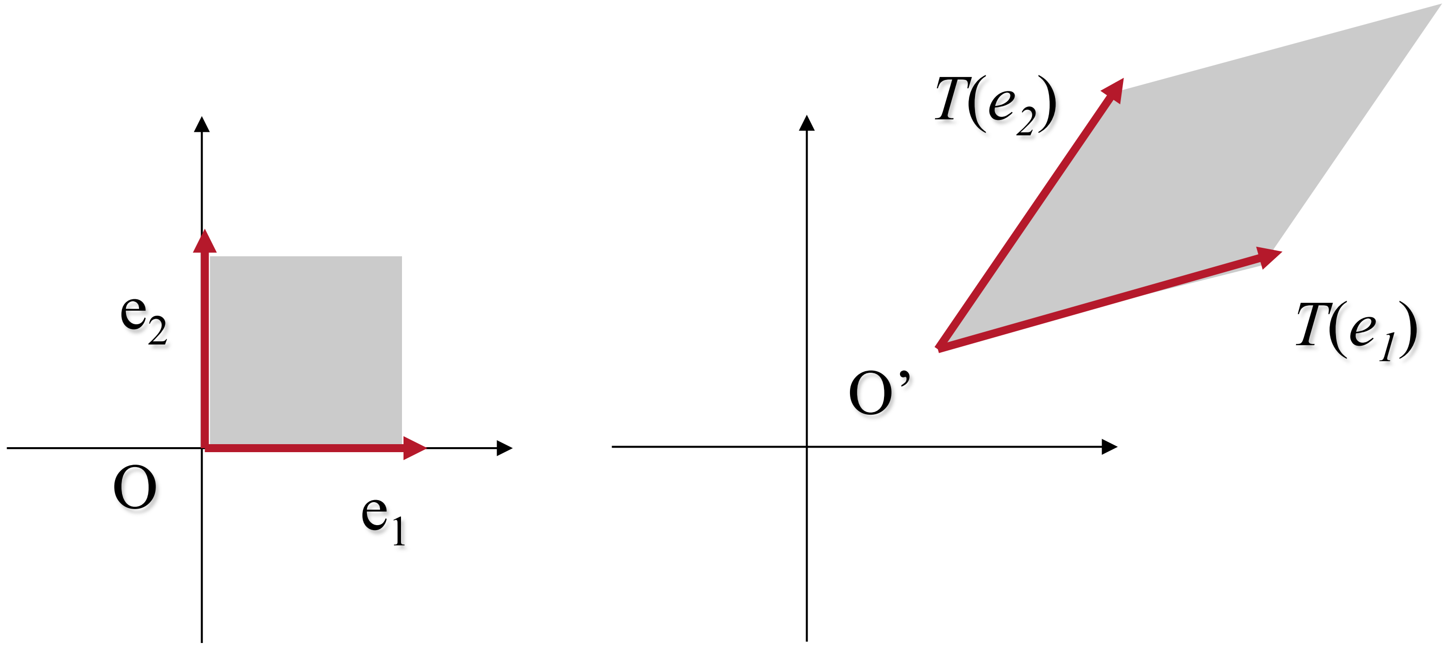
- Preservam retas, razão de seção e coordenadas baricêntricas.

  Se $p = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, com $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, então $T(p) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \lambda_3 T(v_3)$.



Transformações geométricas: *transformações afins*

- Uma transformação afim fica determinada quando se conhece $T(v_1)$, $T(v_2)$ e $T(v_3)$, onde v_1, v_2, v_3 formam um triângulo.
- Caso particular: referencial (O, e_1, e_2)



Transformações geométricas: *Coordenadas Homogêneas*

- Podemos tratar todas as transformações de forma unificada se representarmos os pontos do espaço em *coordenadas homogêneas*.

- Em coordenadas homogêneas, um ponto do plano é representado por uma tripla $[x,y,w]$ ao invés de um par (x,y).

- Duas coordenadas homogêneas $[x,y,w]$ e $[x',y',w']$ representam o mesmo ponto se uma é um *múltiplo da outra*.

<u>Transformações geométricas</u>: *Coordenadas Homogêneas*

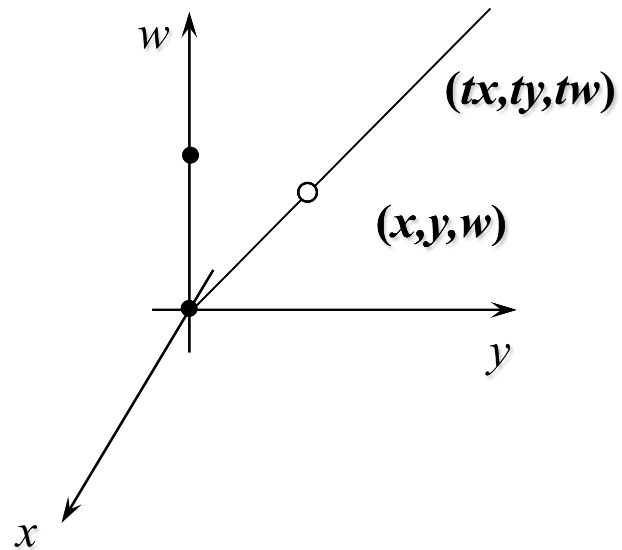
- Se $w \neq 0$ podemos *dividir as coordenadas homogêneas por* w.

  (x,y,w) representa o mesmo ponto que $(x/w,y/w,1)$.

- Se $w=0$, então (x,y,w) é um ponto no infinito e representa uma direção do plano (mais sobre isto depois...)

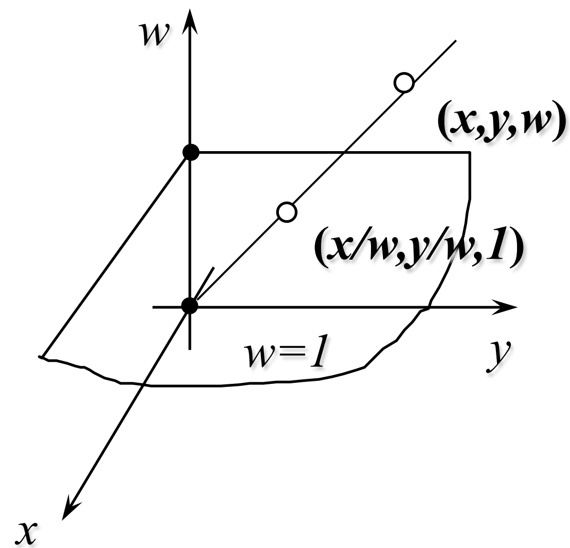
Transformações geométricas: *Coordenadas Homogêneas*

- O uso de coordenadas homogêneas consiste em *representar um espaço 2D imerso em um espaço 3D*.
- Se tomarmos todas as triplas (tx, ty, tw), $w \neq 0$, que representam um mesmo ponto, temos uma reta no espaço 3D.



Transformações geométricas: *Coordenadas Homogêneas*

- Os pontos da forma $[x, y, 1]$ formam um plano com coordenadas $w=1$ no espaço (x,y,w).



Transformações geométricas: *Coordenadas Homogêneas*

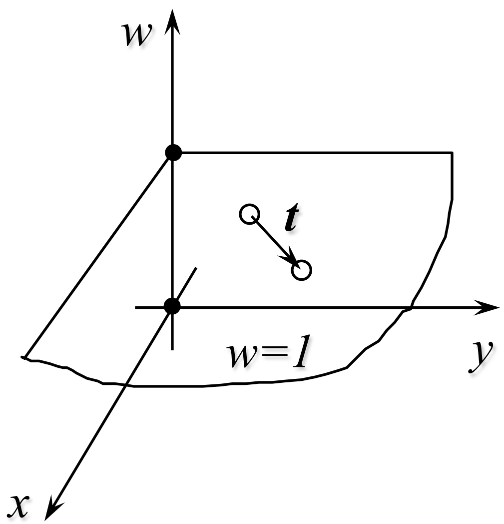
- Pontos são representados em coordenadas homogêneas por vetores de 3 componentes.
- Logo, as matrizes de transformação devem ser representadas por matrizes 3x3.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>Transformações geométricas</u>: *translações em coordenadas homogêneas*



$$p = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformações geométricas: *matrizes de transformação em coordenadas homogêneas*

Escala

$$S.x = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

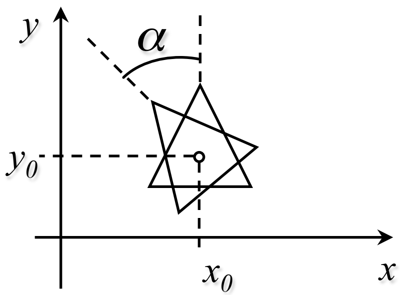
Rotação

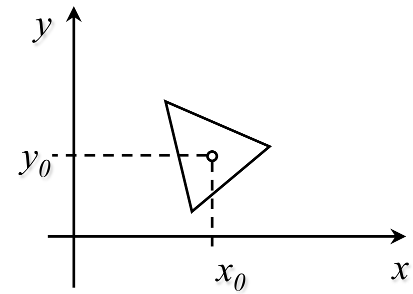
$$R_\theta.x = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cisalhamento

$$C.x = \begin{pmatrix} 1 & \tan\gamma & 0 \\ \tan\psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

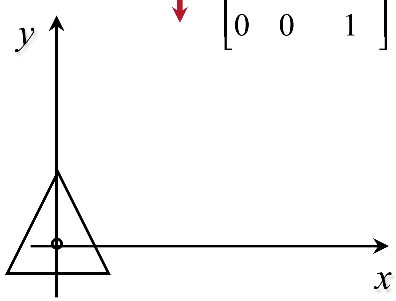
Transformações geométricas: *Composição de transformações 2D*



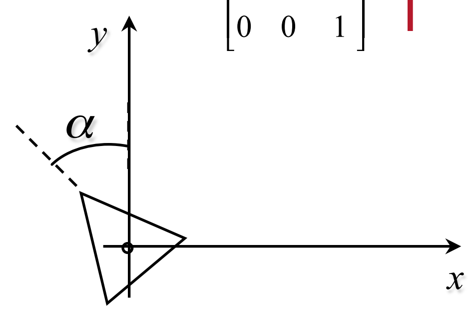


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}$$

<u>Transformações geométricas</u>: *transformações de tela*

- A exibição de objetos gráficos é uma aplicação importante de mudança de sistema de coordenadas.
- Os dispositivos gráficos de saída possuem uma superfície planar onde a representação de objetos gráficos é materializada.
- Denominamos esta superfície de superfície de suporte.

Transformações geométricas: *transformações de tela*

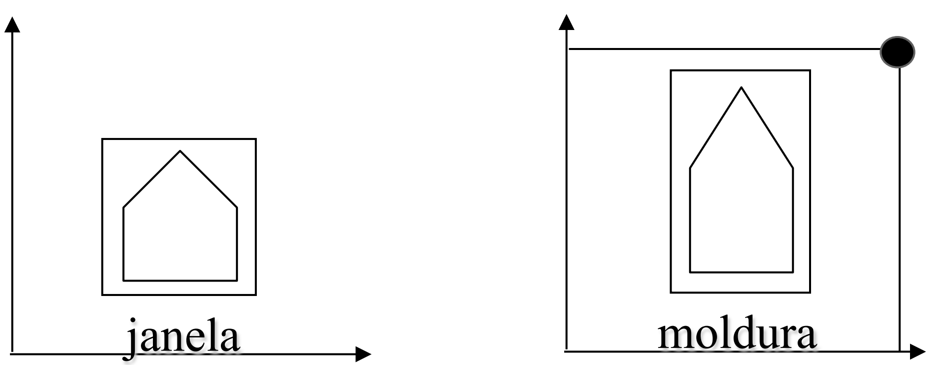
- A superfície de suporte possui um sistema de coordenadas denominado sistema de coordenadas do dispositivo.
- Exemplo: monitor
  – A tela do monitor é a materialização de uma superfície retangular com um sistema de coordenadas ortogonais com origem em algum ponto da tela.

<u>Transformações geométricas</u>: *transformações de tela*

- Um objeto gráfico possui um sistema de coordenadas no qual as coordenadas dos seus pontos são especificadas.
- Esse sistema de coordenadas é denominado sistema de coordenadas do objeto.
- Para exibirmos um objeto gráfico precisamos fazer uma mudança de sistema de coordenadas do objeto para o sistema do dispositivo.

<u>Transformações geométricas</u>: *transformações de tela*

- Na transformação de tela é feita através do mapeamento entre dois retângulos.
  - A janela (*window*), definida no sistema de coordenadas do objeto, e a moldura (*viewport*), é definida no sistema de coordenadas do dispositivo.



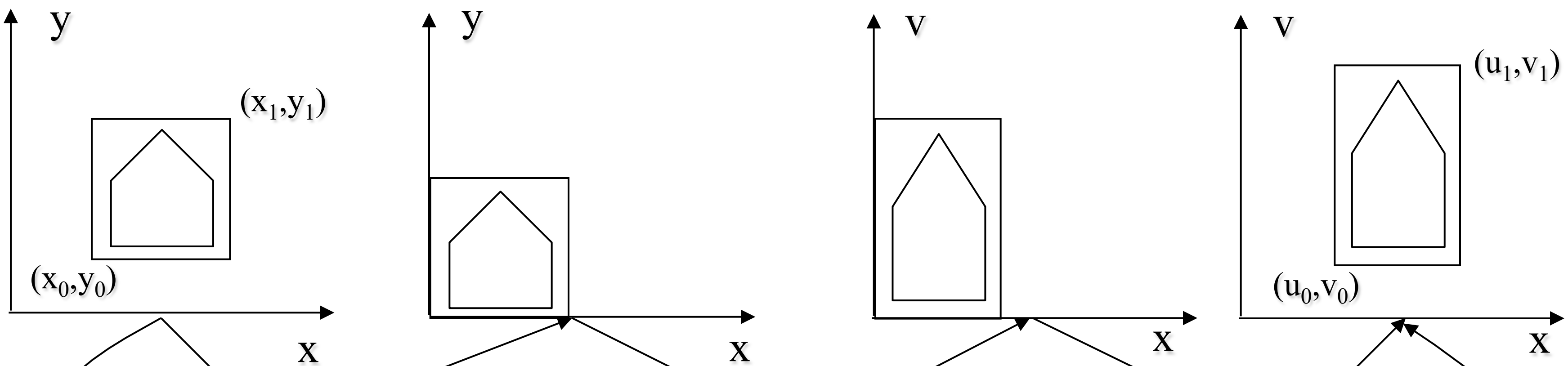
Sistema de coordenadas do objeto

Sistema de coordenadas da janela

<u>Transformações geométricas</u>: *transformações de tela*

- A janela é especificada através de um par de pontos (x_0,y_0) e (x_1,y_1) e a viewport por um outro par (u_0,v_0) e (u_1,v_1) .
- As mudanças de coordenadas são realizadas através da seguinte sequência de transformações:
  1. Translada-se o ponto (x_0,y_0) para a origem do sistema de coordenadas do mundo.
  2. Aplica-se uma mudança de escala para transformar o novo retângulo da janela num retângulo congruente ao retângulo da moldura.
  3. Translada-se o ponto da origem do sistema do dispositivo para o ponto (u_0,v_0) da moldura.

<u>Transformações geométricas</u>: *transformações de tela*



$$T(-x_0,-y_0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -x_0\\ 0 & 1 & -y_0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1

$$S\left(\frac{u_1-u_0}{x_1-x_0},\frac{v_1-v_0}{y_1-y_0}\right)=\begin{pmatrix}\frac{u_1-u_0}{x_1-x_0} & 0 & 0\\ 0 & \frac{v_1-v_0}{y_1-y_0} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2

$$T(u_0,v_0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & u_0\\ 0 & 1 & v_0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

3

$$M_{wv}=T(u_0,v_0)\circ S\left(\frac{u_1-u_0}{x_1-x_0},\frac{v_1-v_0}{y_1-y_0}\right)\circ T(-x_0,-y_0)$$

Algoritmos para rastreio: *introdução*

- Rastreio: processo através do qual primitivas geométricas como, por exemplo, linhas e polígonos, são transformadas em imagens digitais.
- Composto de duas etapas:
  - Determinar quais células da imagem são ocupadas pela primitiva.
  - Atribuir os respectivos atributos(cor, profundidade, etc.) a cada uma dos elementos ocupados.

Referências

Apostila de Computação Gráfica. Prof. Marcelo Gattass. PUC-Rio.

http://www.tecgraf.puc-rio.br/~mgattass/cg/pdf/04_GeoAlg.pdf

Jonas Gomes e Luiz Velho. *Fundamentos de Computação Gráfica*. Impa.