Fundamentos de Arquiteturas de Computadores

Cristina Boeres

Instituto de Computação (UFF)

Conversões Entre Bases Numéricas

Conversão de Base k para a Base 10

Relembrando a Definição

- Na última aula vimos que uma base k qualquer possui k algarismos.
  - Símbolos usados para escrever números.
  - Cada um associado a um valor único de 0 a $k-1$.
- Notação posicional
  - Sempre da forma k^i.
  - Onde i é a posição do algarismo no número.
  - Contada a partir do 0 e da direita para a esquerda.
  - No caso de vírgula:
    - Posição zero é imediatamente a esquerda da vírgula.
    - À direita, encontram-se as posições -1, -2, ...

Relembrando a Definição

- Seja um número qualquer a escrito em uma base k:

$$a_{(k)} = \alpha_p \dots \alpha_1 \alpha_0 , \alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots \alpha_q$$

- O valor deste número na base 10 é dado por:

$$\begin{aligned} a_{(10)} &= k^p \cdot val10(\alpha_p) \\ &+ \dots \\ &+ k^1 \cdot val10(\alpha_1) \\ &+ k^0 \cdot val10(\alpha_0) \\ &+ k^{-1} \cdot val10(\alpha_{-1}) \\ &+ k^{-2} \cdot val10(\alpha_{-2}) \\ &+ \dots \\ &+ k^q \cdot val10(\alpha_q) \end{aligned}$$

Definição como Método de Conversão

- A própria definição de uma base numérica qualquer pode ser usada para realizar a conversão de base.
- Para isso, basta conhecermos:
  - A base k.
  - A função $val10()$, que converte um algarismo da base k no seu valor decimal.
- Aplica-se a função a cada algarismo.
- Multiplica-se pela potência de k adequada.
- Soma-se o valor obtido para todos os algarismos.

Pseudo-Código: Converte N na base k para base decimal

```
Dados: Número na base k, valor de k
Saída: Número na base 10
p ← número de algarismos à esquerda da vírgula;
p ← p - 1;
n ← número total de algarismos;
valorDecimal ← 0;
enquanto n > 0 faça
    algarismo ← algarismo da posição p;
    valorDecimal ← valorDecimal + k^p · val10(algarismo);
    n ← n - 1;
    p ← p - 1;
fim
retorna valorDecimal;
```

Definição como Método de Conversão: Exemplos

- Converter $a = 1101001_{(2)}$ para a base 10:

$$\begin{aligned} a &= 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 \\ &+ 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 \\ &+ 1 \cdot 2^0 \\ a &= 64 + 32 + 8 + 1 \\ a &= 105_{(10)} \end{aligned}$$

- Converter $a = 456_{(8)}$ para a base 10:

$$\begin{aligned} a &= 4 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 \\ a &= 256 + 40 + 6 \\ a &= 302_{(10)} \end{aligned}$$

Definição como Método de Conversão: Exemplos

- Converter $a = 2F5_{(16)}$ para a base 10:

$$\begin{aligned} a &= 2 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 \\ a &= 512 + 240 + 5 \\ a &= 757_{(10)} \end{aligned}$$

- Converter $a = 1011{,}101_{(2)}$ para a base 10:

$$\begin{aligned} a &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 \\ &+ 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} \\ &+ 1 \cdot 2^{-3} \\ a &= 8 + 2 + 1 + 0{,}5 + 0{,}125 \\ a &= 11{,}625_{(10)} \end{aligned}$$

Conversão de Base k para Base 10: Exercício

- Realize as seguintes conversões de base:
  - Converter $110110_{(2)}$ para a base 10.
  - Converter $115_{(8)}$ para a base 10.
  - Converter $77F_{(16)}$ para a base 10.
  - Converter $ABAC0_{(16)}$ para a base 10.

Conversão de Base 10 para a Base k

Começando pelos Números Inteiros: Ideia Básica

- Vamos voltar à definição de um número escrito em uma base k qualquer:

$$a_{(k)} = \alpha_p \ldots \alpha_1 \alpha_0$$

- Sabemos que o valor deste número na base 10 é dado por:

$$a_{(10)} = k^p \cdot val10(\alpha_p) + \cdots + k^1 \cdot val10(\alpha_1) + k^0 \cdot val10(\alpha_0)$$

- Note que para qualquer base k, $k^0 = 1$. Logo:

$$a_{(10)} = k^p \cdot val10(\alpha_p) + \cdots + k^1 \cdot val10(\alpha_1) + val10(\alpha_0)$$

- Note que todos os termos da expressão são divisíveis por k, exceto pelo último.
  - Lembre que $0 \leq val10(\alpha_0) \leq k - 1$.

Começando pelos Números Inteiros: Ideia Básica

- Isso significa que se dividirmos o número a por k, o resto da divisão será $val10(\alpha_0)$.
  - Valor correspondente ao primeiro algarismo (da direita para a esquerda) na representação em base k.
- Por outro lado, o resultado da divisão (inteira) será:

$$a'_{(10)} = k^{(p-1)} \cdot val10(\alpha_p) + \cdots + k^1 \cdot val10(\alpha_2) + val10(\alpha_1)$$

  - exemplo: $39 = 3 \times 10^1 + 9 \times 10^0$
  - ao dividir por 10 vai dar 3×10^0 com resto 9

- Novamente, todos os termos são divisíveis por k, exceto pelo último.
  - Se fizermos uma nova divisão por k, o resto será $val10(\alpha_1)$.
  - *i.e.*, o valor do segundo algarismo de $a_{(k)}$.

Começando pelos Números Inteiros

- Partimos do número a ser convertido, a.
- Calculamos a divisão inteira de a por k.
    - O resto da divisão é o valor do algarismo mais à direita.
    - Guardamos resultado da divisão em a'.
- Dividindo a' por k, obtemos o segundo algarismo e um novo valor, a''.
- Continuando assim, obtemos um a um os algarismos (na base k) do número a.
    - Da direita para a esquerda.
- Pergunta: quando devemos parar?
    - Ou seja, quando sabemos que chegamos ao último algarismo?

Começando pelos Números Inteiros

- Para responder, vamos pensar no momento em que acabamos de obter o penúltimo algarismo.
- Neste ponto, depois de sucessivas divisões por k, temos:

$$a'^{\cdots'} = val10(\alpha_p)$$

- Se realizarmos uma nova divisão inteira por k, obtemos:
  - Como resto, $val10(\alpha_p)$ (valor do último algarismo).
  - Como resultado, 0 (porque $val10(\alpha_p) < k$).
- Note que o valor 0 só resulta da obtenção do **último algarismo**.
- Conclusão: processo para quando a divisão inteira resulta em 0.

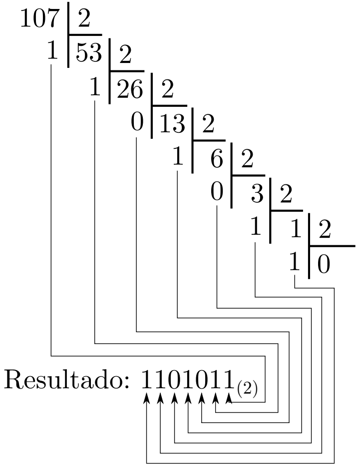
Pseudo-Código: Números Inteiros para base k

Dados: Número a escrito na base 10, valor de k
Saída: Número a escrito na base k

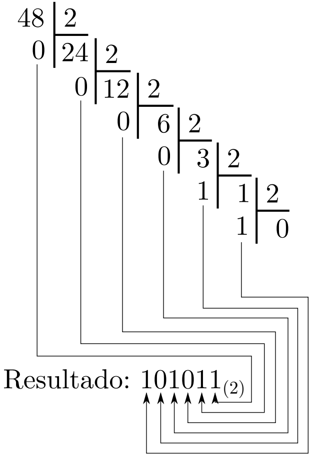
```
saída ← "";
repita
    valorAlgarismo ← resto da divisão de a por k;
    a ← quociente da divisão inteira de a por k;
    saída ← símbolo do algarismo correspondente a valorAlgarismo concatenado com saída;
até a = 0;
retorna saída;
```

Começando pelos Números Inteiros: Exemplos

- Converter $a = 107_{(10)}$ para a base 2:

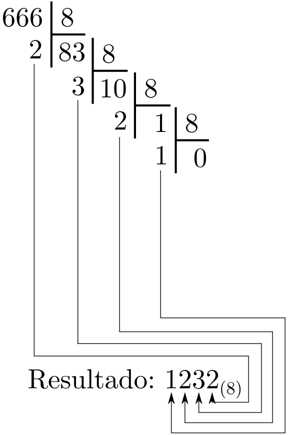


- Converter $a = 48_{(10)}$ para a base 2:

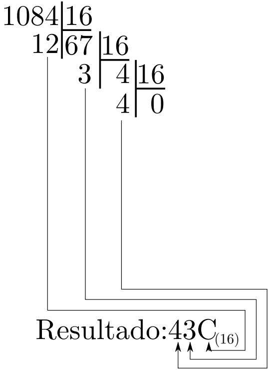


Começando pelos Números Inteiros: Exemplos

- Converter $a = 666_{(10)}$ para a base 8:



- Converter $a = 1084_{(10)}$ para a base 16:



Conversão de Base 10 para Base k: Exercício

- Realize as seguintes conversões de base:
  - Converter $78_{(10)}$ para a base 2.
  - Converter $755_{(10)}$ para a base 2.
  - Converter $61680_{(10)}$ para a base 16.
  - Converter $438_{(10)}$ para a base 8.

Conversão de Números Não-Inteiros: Ideia Básica

- A conversão de números não-inteiros é um pouco mais trabalhosa
- O método que usaremos divide o trabalho em duas partes:
  - A parte inteira
  - A parte **fracionária**

- Exemplos:
  - $14{,}22 = 14 + 0{,}22$
  - $1{,}25 = 1 + 0{,}25$

Conversão de Números Não-Inteiros: Ideia Básica

Observe que:

1. Esta "divisão" pode ser feita em qualquer base
   - *e.g.*, $11001{,}01_{(2)} = 11001_{(2)} + 0{,}01_{(2)}$.
2. Um número que possui parte inteira nula em uma base, também terá a parte inteira nula em qualquer outra base
   - *e.g.*, $0{,}25_{(10)} = 0{,}01_{(2)}$.
3. Um número que possui parte fracionária nula em uma base, também terá a parte fracionária nula em qualquer outra base.
   - *e.g.*, $25_{(10)} = 11001_{(2)}$.

Conversão de Números Não-Inteiros: Ideia Básica

- Em qualquer base, somar um número que tem apenas parte inteira com outro com apenas parte fracionária é equivalente a concatenar estas respectivas partes
  - *e.g.*, $11001_{(2)} + 0{,}01_{(2)} = 11001{,}01_{(2)}$.

Conversão de Números Não-Inteiros: Ideia Básica (III)

- O método para converter os números não-inteiros, portanto, consiste em dividir o problema em quatro etapas:
  - Separar o número original na base 10 em dois: somente a parte inteira e somente a parte fracionária
  - Converter a parte inteira usando o método estudado anteriormente
  - Converter a parte fracionária (será visto a seguir)
  - Concatenar as duas partes convertidas, separando-as por vírgula

Conversão da Parte Fracionária: Teoria

- Considere um número **fracionário puro** $a_{(10)}$ escrito na base 10.
  - Parte inteira é nula.
- Sabemos que ele também é **fracionário puro** em qualquer outra base, em particular na base k:

$$a_{(k)} = 0{,}\alpha_{-1}\alpha_{-2}\ldots\alpha_{q}$$

- Também sabemos que podemos escrever este número alternativamente na base 10 como:

$$\begin{aligned} a_{(10)} &= k^{-1} \cdot val10(\alpha_{-1}) \\ &+ k^{-2} \cdot val10(\alpha_{-2}) \\ &+ \ldots \\ &+ k^{q} \cdot val10(\alpha_{q}) \end{aligned}$$

Conversão da Parte Fracionária: Teoria

- Se multiplicarmos ambos os lados por k, obtemos:

$$
\begin{aligned}
k \cdot a_{(10)} &= val10(\alpha_{-1}) \\
&+ k^{-1} \cdot val10(\alpha_{-2}) \\
&+ \dots \\
&+ k^{q+1} \cdot val10(\alpha_{q})
\end{aligned}
$$

- Repare que o valor resultante possui agora uma parte inteira: $val10(\alpha_{-1})$.
  - Os demais termos somam menos de 1 e compõem a parte fracionária.
- Isolando a parte inteira, obtemos o primeiro algarismo após a vírgula do número original
- Podemos pegar a parte fracionária e repetir o processo obtendo os demais algarismos

Conversão da Parte Fracionária: Resumindo

- Partimos do número a ser convertido, a.
- Múltiplicamos a pela base k.
  - A parte intera corresponde ao valor do primeiro algarismo depois da vírgula.
  - Guardamos a parte inteira como um novo valor a'.
- Multiplicando a' por k, obtemos o segundo algarismo e um novo valor, a''.
- Continuando assim, obtemos um a um os algarismos (na base k) do número a.
  - Da esquerda para a direita depois da vírgula
- Pergunta: quando devemos parar?

Conversão da Parte Fracionária: Resumindo (II)

- Se a parte fracionária se torna 0
  - Continuar o algoritmo só adicionará algarismos nulos ao final do número
  - Logo, podemos usar esta condição como **critério de parada**.
- Mais um detalhe:
  - Um número fracionário com representação finita na base 10 não necessariamente será finito também na base k.
  - Se, em algum ponto, a parte fracionária se repetir, representação é infinita.
  - Algarismos gerados entre as repetições, se repetem indefinidamente.

Conversão da Parte Fracionária: Pseudo-Código

Dados: Número a escrito na base 10 (fracionário puro), valor de k
Saída: Número a escrito na base k
saída $\leftarrow$ "0,";
repita
    valorAlgarismo $\leftarrow$ parte inteira da multiplicação de a por k;
    a $\leftarrow$ parte fracionária da multiplicação de a por k;
    saída $\leftarrow$ saída concatenada com símbolo do algarismo correspondente a valorAlgarismo;
até $a = 0$;
retorna *saída*;

Conversão da Parte Fracionária: Exemplos

- Converter $a = 0{,}6875_{(10)}$ para a base 2:

$$
\begin{aligned}
& 0{,}6875 \times 2 \\
&= \boxed{1}{,}\boxed{375} \\
& 0{,}375 \times 2 \\
&= \boxed{0}{,}\boxed{750} \\
& 0{,}750 \times 2 \\
&= \boxed{1}{,}\boxed{500} \\
& 0{,}500 \times 2 \\
&= \boxed{1}{,}\boxed{000}
\end{aligned}
$$

Resultado: $0{,}1011_{(2)}$

- Converter $a = 0{,}1_{(10)}$ para a base 2:

$$
\begin{aligned}
& 0{,}1 \times 2 \\
&= \boxed{0}{,}\boxed{200} \\
& 0{,}2 \times 2 \\
&= \boxed{0}{,}\boxed{400} \\
& 0{,}4 \times 2 \\
&= \boxed{0}{,}\boxed{800} \\
& 0{,}8 \times 2 \\
&= \boxed{1}{,}\boxed{600} \\
& 0{,}6 \times 2 \\
&= \boxed{1}{,}\boxed{200}
\end{aligned}
$$

Resultado: $0{,}0\underline{0011}\ldots_{(2)}$

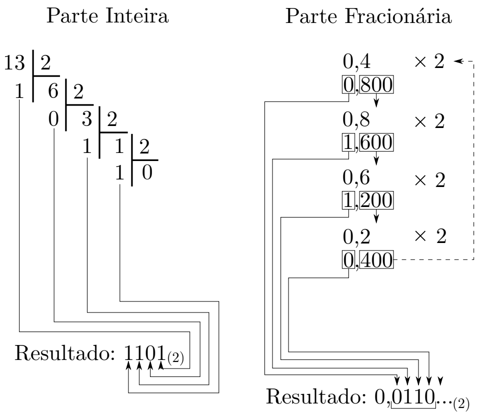
- Converter $a = 0{,}78125_{(10)}$ para a base 16:

$$
\begin{aligned}
& 0{,}78125 \times 16 \\
&= \boxed{12}{,}\boxed{500} \\
& 0{,}5 \times 16 \\
&= \boxed{1}{,}\boxed{000}
\end{aligned}
$$

Resultado: $0{,}C1_{(16)}$

Juntando Tudo: Exemplo

- Converter $13{,}4_{(10)}$ para a base 2:



Resultado Final: $1101{,}0110\ldots_{(2)}$

Conversão de Números Não-Inteiros: Exercício

- Realize as seguintes conversões de base:
  - Converter $14{,}5_{(10)}$ para a base 2.
  - Converter $76{,}25_{(10)}$ para a base 2.
  - Converter $171{,}515625_{(10)}$ para a base 16.
  - Converter $46{,}45_{(10)}$ para a base 8.

Conversões entre Bases Diferentes da 10

Conversões entre Bases Diferentes da 10: Motivação

- Até aqui, todas as conversões vistas passaram pela base 10.
  - Da base 10 para outras.
  - De outras para a base 10.
- Muitas vezes, queremos fazer conversões entre bases diferentes da 10.
- Exemplos:
  - Base 2 para base 16.
  - Base 16 para base 2.
  - Base 8 para base 16.
  - ...
- Como fazer estas conversões?

Conversões entre Bases Diferentes da 10: Métodos

- Basicamente, há três possibilidades:
  - Utilizar a base 10 como intermediária.
  - Utilizar métodos já estudados, mas aritmética na base de origem ou de destino.
  - Utilizar mapeamento entre algarismos de uma base e grupos de algarismos na outra.

Conversões entre Bases Diferentes da 10: Primeiro Método

- Utilizar a base 10 como intermediária.
  - Converte-se o número da base original para a base 10.
  - Converte-se o resultado da base 10 para a base de destino.
- Exemplo: converter $1101101_{(2)}$ para a base 16.
  - $1101101_{(2)} = 64 + 32 + 8 + 4 + 1 = 109_{(10)}$.
  - $109_{(10)} = 6D_{(16)}$.
  - Logo, $1101101_{(2)} = 6D_{(16)}$.
- Método simples, mas trabalhoso.
  - Duas conversões, ao invés de uma.

Conversões entre Bases Diferentes da 10: Segundo Método

- Utilizar métodos já estudados, mas aritmética na base de origem ou de destino.
  - Nos métodos de conversão vistos até aqui, a base 10 pode ser substituída por qualquer base.
- Exemplo: converter $C_{(16)}$ para a base 2.
  - $D_{(16)}$ dividido por 2 dá 6 e sobra 1.
  - $6_{(16)}$ dividido por 2 dá 3 e sobra 0.
  - $3_{(16)}$ dividido por 2 dá 1 e sobra 1.
  - $1_{(16)}$ dividido por 2 dá 0 e sobra 1.
  - Logo, $D_{(16)} = 1101_{(2)}$.
- Só uma conversão é necessária.
- O problema é **realizar as operações aritméticas nestas outras bases**.

Conversões entre Bases Diferentes da 10: Terceiro Método

- Utilizar mapeamento entre algarismos de uma base e grupos de algarismos na outra.
  - Algumas bases são *relacionadas*.
  - É possível fazer um mapeamento direto de um algarismo em uma base de origem para um grupo de algarismos na base de destino.
  - Ou vice-versa.
- Exemplo: equivalências entre as bases 2 e 16.

Base 2	**Base 16**	**Base 2**	**Base 16**	**Base 2**	**Base 16**	**Base 2**	**Base 16**
0000	0	0100	4	1000	8	1100	C
0001	1	0101	5	1001	9	1101	D
0010	2	0110	6	1010	A	1110	E
0011	3	0111	7	1011	B	1111	F

Conversões entre Bases Diferentes da 10: Terceiro Método (II)

- Dadas estas equivalências, podemos facilmente fazer conversões entre estas bases.
  - Da base 16 para a base 2: cada algarismo hexadecimal é substituído pelo grupo de 4 bits correspondente.
  - Da base 2 para a base 16: cada grupo de 4 bits é substituído pelo algarismo hexadecimal correspondente.
    - Da direita para a esquerda.
    - Completar com zeros à esquerda, se necessário.
- Exemplo 1: converter $1E5C_{(16)}$ para a base 2.
  - $1_{(16)} = 0001_{(2)}$, $E_{(16)} = 1110_{(2)}$, $5_{(16)} = 0101_{(2)}$, $C_{(16)} = 1100_{(2)}$.
  - Juntando: $1E5C_{(16)} = 0001111001011100_{(2)}$.
- Exemplo 2: converter $1101100101011_{(2)}$ para a base 16.
  - Da direita para a esquerda, há 4 blocos de 4 bits.
  - $1011_{(2)}$, $0010_{(2)}$, $1011_{(2)}$ e $0001_{(2)}$ (completado com zeros).
  - Blocos são convertidos para: $B_{(16)}$, $2_{(16)}$, $B_{(16)}$ e $1_{(16)}$.
  - Juntando: $1101100101011_{(2)} = 1B2B_{(16)}$

Conversões entre Bases Diferentes da 10: Terceiro Método (III)

- Método é bastante simples e prático.
  - Especialmente se decoramos as equivalências.
- Mas há uma limitação:
  - Nem todos os pares de bases são possuem este tipo de relacionamento.
- Como determinar se este tipo de mapeamento existe entre duas bases k e j quaisquer?
  - Suponha que $k < j$.
  - Neste caso, se j é uma potência de k, então podemos fazer este mapeamento.
  - Exemplos:
    - Bases 2 e 4, 2 e 8, 2 e 16, e 8 e 64 possuem mapeamento.
    - Mas as bases 2 e 10, e 8 e 16, não.

Conversões entre Bases Diferentes da 10: Terceiro Método (IV)

- Novamente, **não é possível usar o método entre bases como 2 e 10**.
- Considere, por exemplo, uma tentativa **errada** de conversão de $367_{(10)}$ para a base 2:
  - $3_{(10)} = 011_{(2)}$.
  - $6_{(10)} = 110_{(2)}$.
  - $7_{(10)} = 111_{(2)}$.
  - Juntando, encontramos $367_{(10)} = 011110111_{(2)}$.
    - Errado! Deveria ser $101101111_{(2)}$.

Conversões entre Bases Diferentes da 10: Terceiro Método (V)

- Podemos ver a razão para a "incompatibilidade" entre as bases 2 e 10 tentando construir uma tabela de equivalências:

Base 2	**Base 10**	**Base 2**	**Base 10**	**Base 2**	**Base 10**	**Base 2**	**Base 10**
0000	0	0100	4	1000	8	1100	–
0001	1	0101	5	1001	9	1101	–
0010	2	0110	6	1010	–	1110	–
0011	3	0111	7	1011	–	1111	–

- Note como alguns grupos de 4 bits não possuem algarismo decimal correspondente.

Conversões entre Bases Diferentes da 10: Terceiro Método (VI)

- Se tentarmos com grupos de 3 bits, o problema ocorre no sentido contrário:

Base 2	**Base 10**	**Base 2**	**Base 10**
000	0	100	4
001	1	101	5
010	2	110	6
011	3	111	7

- Há algarismos decimais (8 e 9) que não possuem grupo correspondente.

Conversões entre Bases Diferentes da 10: Exercício

- Monte uma tabela de equivalências entre as bases 2 e 8.
- Realize as seguintes conversões de base:
  - $1110110100_{(2)}$ para a base 8.
  - $110010001_{(2)}$ para a base 16.
  - $ABBA_{(16)}$ para a base 2.
  - $371_{(8)}$ para a base 2.
  - $762_{(8)}$ para a base 16.