FUNDAMENTOS DE ARQUITETURAS DE COMPUTADORES

REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA

Cristina Boeres

Sistema de Numeração

- Sistema de escrita para expressão de números
  - Notação matemática
- Composto por símbolos
  - Símbolos tem significados ou valores diferentes
  - Suas posições (absolutas ou relativas a outros símbolos) também podem alterar seu significado
- Exemplos:
  - Sistema de numeração arábico: 7, 16, 154
  - Sistema de numeração romano: VII, XVI, CLIV

Base e conversões

- Notação posicional
  - mesmo símbolo representa valores diferentes dependendo da sua posição
  - essa posição de cada algarismo ou dígito determina o valor

- Algarismos, componentes de um número, assumem valores diferentes
  - dependendo da posição relativa no número. O valor total é a soma dos valores relativos.

Base e conversões

- Base
  - quantidade de algarismos disponíveis em um dado sistema de numeração.
    - base 10
    - base 2
    - base 8
    - base 16

Base Numérica

- Sistema utilizado no dia a dia (na maior parte do mundo) é o sistema decimal ou de base 10
  - Há dez símbolos (algarismos) diferentes disponíveis
  - 0, 1, 2, . . . , 9
  - Possivelmente motivado pela quantidade de dedos nas mãos
- É um sistema posicional
  - símbolo ‘1’ pode ter valor um, dez, mil (ou outros) dependendo da sua posição
- Leitura de um número
  - Cada algarismo é multiplicado pela potência de 10 correspondendo à sua posição
    - Da direita para a esquerda, 10^0, 10^1, 10^2, . . .
  - Os valores são somados

Base Numérica

- Alguns computadores antigos representavam informação em base 10
  - Sua memória e processador manipulavam dados compostos por unidades de informação que podiam assumir 9 estados diferentes
- No entanto, atualmente, a unidade básica de informação de um computador é o bit
  - Pode assumir dois estados: 0 ou 1
- Por isso, é mais eficiente representar dados em base 2
  - Base binária
  - Cada bit representa um algarismo na base 2
  - Um conjunto ordenado de bits representa um número

Base Numérica - outras bases

- Além da base binária, outras bases numéricas
  - Base 8 (octal)
  - Base 16 (hexadecimal)
- Embora a base binária seja a mais importante, as bases octal e hexadecimal também são muito usadas para entendimento
  - “Agrupam” bits
  - Provêem representação mais compacta
  - Aparecem comumente em programação

Base Numérica

- Então, na base 10, um exemplo: número 2.313
  - Cada algarismo possui um valor correspondente dependendo da posição:

$$
\begin{aligned}
3 &= 3 \times 10^0 \\
10 &= 1 \times 10^1 \\
300 &= 3 \times 10^2 \\
2000 &= 2 \times 10^3
\end{aligned}
$$

$2.000+300+10+3= 2.313$

Base Numérica

- O sistema arábico é um sistema de base 10 (decimal)
  - Há 10 algarismos
  - A cada posição, corresponde um multiplicador que é uma potência de 10
- Mas generalizando para outra base qualquer, por exemplo uma base b
  - b símbolos possíveis para cada algarismo
  - Cada símbolo corresponde a um valor de 0 a $b-1$
  - Cada posição corresponde a um multiplicador que é uma potência de b
  - Para ler um número, multiplica-se o valor do símbolo pelo seu multiplicador posicional e soma-se para todos os algarismos

Base e conversões

- $N = (d_{n-1}d_{n-2}d_{n-3}...d_1d_0)_b$
  - d = algarismo do número
  - n-1, n-2, n-3, ..., 1, 0
    - posição de cada algarismo
  - b = base
  - n = número de dígitos

$$N = d_{n-1} \times b^{n-1} + d_{n-2} \times b^{n-2} + ... + d_1 \times b^1 + d_0 \times b^0$$

Base e conversões

- N=5642 na base 10
  - n=4
    - $d_{n-1} = d_3 = 5$;
    - $d_2 = 6$
    - $d_1 = 4$
    - $d_0 = 2$

$$N = 5 \times 10^{3} + 6 \times 10^{2} + 4 \times 10^{1} + 2 \times 10^{0}$$

$$= 5000 + 600 + 40 + 2 = 5642_{10}$$

Base binária

Base binária

- A base binária possui dois algarismos (bits)
  - 0 e 1
- Assim como em qualquer outra base numérica, números são escritos dispondo-se algarismos em posições sucessivas
  - Da direita para a esquerda
- Cada posição corresponde a um multiplicador posicional
  - Potências de 2
    - $2^0 = 1$, para o algarismo mais à direita
    - $2^1 = 2$, para o algarismo seguinte
    - $2^2 = 4$, para o algarismo seguinte
    - . . .

Número binário

- Com 5 algarismos

Número	1	0	1	0	0
Posição	4	3	2	1	0
Multiplicador	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Valor	16	8	4	2	1
Total = 1x16 + 0x8 + 1x4 + 0x2 + 0x1 = 20					

Número binário

- Com 7 algarismos

Número	1	0	1	0	0	1	1
Posição	6	5	4	3	2	1	0
Multiplicador	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Valor	64	32	16	8	4	2	1
Total = 1x64 + 1x16 + 1x2 + 1x1= 83							

Base 2 e potência de 2

- É útil ter em mente as potência de 2, para auxiliar na conversão de valores binários para seus correspondentes decimais

Potência	Valor	Potência	Valor
2^0	1	2^7	128
2^1	2	2^8	256
2^2	4	2^9	512
2^3	8	2^{10}	1024
2^4	16	2^{11}	2048
2^5	32	2^{12}	4096
2^6	64	2^{13}	8192

Números e suas bases

- se escrevemos o número 1010? Ele está em base 2 ou em base 10?
  - Os algarismos 0 e 1 existem tanto em uma base, quanto em outra
- A compreensão de um número escrito depende do conhecimento da base utilizada
  - A notação comum é a informar a base como um sub-escrito entre parênteses, após o número
    - $17_{(10)} = 10001_{(2)}$
    - $23_{(10)} = 10111_{(2)}$
    - $54_{(10)} = 110110_{(2)}$
    - $1010_{(2)} = 10_{(10)}$
    - $101_{(2)} = 5_{(10)}$

Números não inteiros

- Até este ponto, discutimos apenas números inteiros
  - Números sem vírgula
- Números não-inteiros também são importantes
- Além disso, bases diferentes da 10 também são capazes de representar números não-inteiros
  - Podendo existir certas limitações de representação em algumas bases

Números não inteiros

- Em base 10, números não-inteiros são representados com a adição de algarismos após a vírgula
  - 145,36
  - 12,7865
  - 0,678
- A existência de uma parte fracionária não altera o funcionamento da notação posicional
  - Continuamos entendendo cada posição como uma potência da base (no caso, 10)
  - A chave é o fato de que as potências à direita da vírgula são negativas

Número não inteiros

- Com 4 algarismos, sendo 1 após a vírgula (base 10)

Número	3	1	7	,	7
Posição	2	1	0	,	-1
Multiplicador	10^2	10^1	10^0	,	10^{-1}
Valor	300	10	7	,	0,7
Total = 300+10+7+0,7 = 317,7					

Número não inteiros

- Com 6 algarismos, sendo 2 após a vírgula (base 10)

Número	4	8	7	1	,	2	5
Posição	3	2	1	0	,	-1	-2
Multiplicador	10^3	10^2	10^1	10^0	,	10^{-1}	10^{-2}
Valor	4000	800	70	1	,	0,2	0,05
Total = 4000+800+70+1+0,2+0,05 = 4871,25							

Números não inteiros

- A mesma idéia se aplica à base 2
- Utilizamos a vírgula como um separador
- A posição imediatamente à esquerda da vírgula é a 0
- A imediatamente à direita é a -1
- Posições são incrementadas andando para a esquerda e decrementadas andando para a direita
- Cada posição corresponde a uma potência da base (no caso, 2)

Números não inteiros

- Com 4 algarismos e um após a vírgula (binário)

Número	1	0	1	,	1
Posição	2	1	0	,	-1
Multiplicador	2^2	2^1	2^0	,	2^{-1}
Valor	4	0	1	,	0,5
Total = 4+1+0,5 = 5,5					

Números não inteiros

- Com 6 algarismos e dois após a vírgula (binário)

Número	1	0	1	1	,	1	1
Posição	3	2	1	0	,	-1	-2
Multiplicador	2^3	2^2	2^1	2^0	,	2^{-1}	2^{-2}
Valor	8	0	2	1	,	0,5	0,25
Total = 8+2+1+0,5+0,25 = 11,75							

Potência (negativas) de 2

- De forma análoga às potências positivas, conhecer potências negativas auxilia a entender rapidamente números não-inteiros em base 2

Potência	Valor
2^{-1}	0,5
2^{-2}	0,25
2^{-3}	0,125
2^{-4}	0,0625
2^{-5}	0,03125

Propriedades de números na base 2

- Multiplicação rápida por 2
  - Dado um número escrito em base 10, adicionar um 0 à direita significa multiplicar por 10
    - 30 → 300 = 30 X 10
  - De forma análoga, em base 2, adicionar um zero à direita significa multiplicar por 2
    - $11_{(2)} \rightarrow 110_{(2)}$ corresponde a 3 passa para 6

Propriedades de números na base 2

- Divisão por 2
  - Análoga à propriedade anterior
  - Remoção de algarismos à direita divide por 2
    - 46(10) = 101110(2) e 23(10) = 10111(2)
    - 100(10) = 1100100(2) e 50(10) = 110010(2)
    - 47(10) = 101111(2) e 23(10) = 10111(2) (divisão inteira)
- No caso de números ímpares, o tratamento é diferente se for considerado números não-inteiros.

Propriedades de números na base 2

- Números pares e ímpares:
  - Todo número par em base 2 tem o bit mais à direita igual a 0
  - Todo número ímpar em base 2 tem o bit mais à direita igual a 1
    - $86_{(10)} = 1010110_{(2)}$ é par
    - $75_{(10)} = 1001011_{(2)}$ é ímpar
    - $19_{(10)} = 10011_{(2)}$ é ímpar
    - $200_{(10)} = 11001000_{(2)}$ é par
  - Números pares divididos por 2 resultam em inteiro
  - Números ímpares divididos por 2 resultam em números terminados em ,5(10) ou ,1(2).
    - $19_{(10)} = 10011_{(2)}$ e $9{,}5_{(10)} = 1001{,}1_{(2)}$
    - $47_{(10)} = 101111_{(2)}$ e 23,5(10) = $10111{,}1_{(2)}$
    - $201_{(10)} = 11001001_{(2)}$ e $100{,}5_{(10)} = 1100100{,}1_{(2)}$

Número de algarismos e limites

- Um byte tem 8 bits
- Qual o maior valor inteiro que podemos representar em um byte?
  - Em qualquer base, o maior número representável com uma determinada quantidade de algarismos contém o maior algarismo disponível em todas as posições.
  - Na base 2, com 8 algarismos: 11111111(2)
    - Em decimal, corresponde a: 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 255
  - Generalizando: com n bits, o maior número que podemos escrever é:

$$2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^{0} = 2^{n} - 1$$

Número de algarismos e limites

- E quantos números diferentes podemos representar?
  - Cada bit tem pode ter dois valores: 0 e 1

Número de algarismos e limites

.....	2	1	0
	0	0	0
	1		
	0		
	1		
	0	1	
	1		
	0		
	1		
	0	0	1
	1		
	0		
	1	1	
	0		
	1		

Número de algarismos e limites

- Como são 8 bits, a quantidade de valores é

  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256.$

- Generalizando: com n bits, podemos representar 2^n valores