

Aritmética em Bases Não Decimais

Cristina Boeres

Instituto de Computação (UFF)

Fundamentos de Arquiteturas de Computadores

Motivação

- Dados dois números em base não decimal, poderíamos simplesmente convertê-los para a base 10 para realizar alguma aritmética
 - ▶ Realizamos a operação em base 10
 - ▶ Convertemos o resultado de novo para a base original
- Por que, então, estudar aritmética em outras bases?
- Dois motivos básicos:
 - ▶ Converter os números apenas para realizar uma operação é geralmente ineficiente
 - ▶ Computadores modernos operam (diretamente) sobre números em base 2
 - ★ Para implementar estas operações é preciso saber como elas são feitas em binário

A Operação de Soma

Soma na Base 10

- Das 4 operações aritméticas básicas, a soma é a mais simples.
- Basicamente, alinhamos as parcelas a serem somas e executamos a adição algarismo a algarismo.
 - ▶ Da direita para a esquerda.
- O detalhe está no “vai-um”:
 - ▶ Se a soma de dois algarismos alinhados dá um valor maior que $10_{(10)}$, pegamos apenas o algarismo menos significativo
 - ▶ O mais significativo é “carregado” para a esquerda e somado com os próximos algarismos
- Exemplo:

$$\begin{array}{r} \\ \\ + \\ \hline 6 \end{array}$$

A Soma em Outras Bases

- Este algoritmo de soma pode ser generalizado para outras bases.
- Para uma base k qualquer:
 - ▶ Alinham-se as parcelas
 - ▶ Somam-se os algarismos, um a um, da direita para a esquerda
 - ▶ Se a soma de dois algarismos alinhados resulta em valor com um único algarismo (na base k), este é colocado no resultado
 - ★ Alinhado aos algarismos somados
 - ▶ Caso contrário, coloca-se o algarismo **menos significativo** no resultado e **vai um**
 - ▶ Caso a soma de dois algarismos resulte em vai-um, este deverá ser somado aos próximos algarismos

A Soma em Outras Bases: Exemplos

- Base 2:

$$\begin{array}{rcccccc} & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 \\ + & & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & 1 \\ \hline 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 \end{array}$$

- Base 8:

$$\begin{array}{rcccccc} & & & 1 & & & 1 & & & & \\ & & 1 & & 2 & & 5 & & 3 & & 5 \\ + & & 3 & & 3 & & 6 & & 1 & & 4 \\ \hline & & 4 & & 6 & & 3 & & 5 & & 1 \end{array}$$

- Base 16:

$$\begin{array}{rcccccc} & & & 1 & & & & & & & \\ & & B & & 2 & & A & & 4 & & 7 \\ + & & 3 & & F & & 0 & & 6 & & 1 \\ \hline & & F & & 1 & & A & & A & & 8 \end{array}$$

A Soma em Outras Bases: Dicas

- O algoritmo de soma é muito simples
- Mas é preciso ter cuidado para não confundirmos a soma de algarismos na base k com a soma decimal
- Exemplo:
 - ▶ Na base 10, $4 + 6$ dá 0 e vai um
 - ▶ Na base 16, $4 + 6$ dá **A sem vai-um**.
- Como saber o resultado da soma de dois algarismos (e o vai um)?
- Alguns métodos:
 - ▶ Converter algarismos para a base 10, somar e converter de volta
 - ▶ Ter possíveis valores decorado
 - ▶ Comparar à base e subtrair

A Soma em Outras Bases: Dicas (II)

- O segundo método é o que a maioria das pessoas usa na soma decimal.
- Podemos construir tabelas com todas as somas.
 - ▶ Exemplo para a base 16:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

A Soma em Outras Bases: Dicas (III)

- Para as bases 2 e 8:

Base 2		
	0	1
0	0	1
1	1	10

Base 8								
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

A Soma em Outras Bases: Dicas (IV)

- Em bases k , com $k < 10$, uma forma rápida de fazer a soma de dois algarismos é:
 - ▶ Some os dois algarismos como se estivessem em base 10.
 - ★ Vamos chamar este resultado de a .
 - ▶ Verifique se $a < k$.
 - ★ Se for, não há “vai um” e o resultado da soma é a .
 - ★ Caso contrário, resultado é $a - k$ e vai um.
- Exemplo: calcular $56_{(8)} + 16_{(8)}$.
 - ▶ Primeiro somamos $6 + 6 = 12 > 8$. Colocamos no resultado $12 - 8 = 4$, e vai um.
 - ▶ Em seguida, somamos $5 + 1 + 1 = 7 < 8$. Colocamos 7 na saída.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 5 \ 6 \\ + \ 1 \ 6 \\ \hline 7 \ 4 \end{array}$$

A Soma em Outras Bases: Números Não-Inteiros

- A soma funciona de maneira idêntica para os números não-inteiros.
 - ▶ Basta alinhar os números de forma que as vírgulas coincidam.
 - ▶ No resultado, a vírgula permanecerá no mesmo lugar.
- Exemplos em base 2:

$$\begin{array}{r} \\ 1 1 \\ + 0 1 \\ \hline 1 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ + 0 \\ \hline 1 \end{array}$$

A Soma em Outras Bases: Exercícios

- Realize as seguintes somas:

- ▶ $1011_{(2)} + 110_{(2)}$.
- ▶ $1101,01_{(2)} + 1001,1_{(2)}$.
- ▶ $ABC_{(16)} + BCD_{(16)}$.
- ▶ $462_{(8)} + 111_{(8)}$.

A Subtração em Outras Bases

A Subtração na Base 10

- A subtração é um pouco mais complicada na base 10.
- A ideia básica é análoga à da soma:
 - ▶ Alinhar minuendo e subtraendo.
 - ▶ Percorrer algarismos da direita para a esquerda.
 - ▶ Para cada casa, efetuamos a subtração dos algarismos.
- Quando todos os algarismos do minuendo são maiores ou iguais aos respectivos algarismos do subtraendo, operação é simples:

$$\begin{array}{r} 9 \ 4 \ 3 \ 6 \\ - \ 5 \ 4 \ 1 \ 2 \\ \hline 4 \ 0 \ 2 \ 4 \end{array}$$

A Subtração na Base 10

- Mas quando, para alguma casa, o subtraendo é maior que o minuendo, o algoritmo se complica.
 - ▶ É preciso fazer um “empréstimo” do primeiro algarismo não nulo à esquerda.
 - ▶ O algarismo que empresta é decrementado de uma unidade.
 - ▶ Demais algarismos nulos “no caminho” viram 9.
- Exemplos:

$$\begin{array}{r} 26 \\ 7371 \\ - 3285 \\ \hline 4086 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 799 \\ 8003 \\ - 4567 \\ \hline 3436 \end{array}$$

A Subtração em Outras Bases

- Assim como no caso da soma, o algoritmo de subtração se aplica a qualquer base.
- Novamente, a diferença está nos detalhes:
 - ▶ O valor da subtração dos pares de algarismos.
 - ★ e.g., $A - 9 = 1$, na base 16.
 - ★ e.g., $10 - 7 = 1$, na base 8.
 - ★ e.g., $10 - 1 = 1$, na base 2.

A Subtração em Outras Bases

- Casos bases na subtração binária dígito a dígito:

- ▶ $0 - 0 = 0$
- ▶ $1 - 1 = 0$
- ▶ $1 - 0 = 1$
- ▶ $0 - 1 = ?$

★ Faz um empréstimo do algarismo a esquerda, propagando para a esquerda

- ▶ Deste modo, $0 - 1 = 1$, mas tem que pegar emprestado

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ 1 \quad 1 \quad \quad 1 \quad \quad \\ - \quad \quad \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ 1 \quad \quad \quad 1 \quad 1 \quad \quad \quad \quad \\ - \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

A Subtração em Outras Bases: Método do Complemento a $k - 1$

- Além do algoritmo comum de subtração, há outro método menos conhecido.
 - ▶ Mas particularmente importante para os computadores, como será visto nas próximas aulas.
- Para entender este método alternativo, considere um exemplo de subtração na base 10.
 - ▶ Queremos calcular $25_{(10)} - 13_{(10)}$.
 - ▶ Ao invés de realizar o algoritmo normal de subtração, podemos transformar um pouco a expressão:

$$\begin{aligned} & 25 - 13 \\ = & 25 - 13 + 100 - 100 \\ = & 25 - 13 + 99 + 1 - 100 \\ = & 25 + (99 - 13) - 100 + 1 \end{aligned}$$

A Subtração em Outras Bases: Método do Complemento a $k - 1$ (II)

- A primeira vista, as alterações feitas parecem ter complicado a operação.

$$25 + (99 - 13) - 100 + 1$$

- Mas vamos olhar com mais atenção para o termo $(99 - 13)$.
 - ▶ Calcular $99 - 13$ é fácil: basta usar o **complemento a 9** de cada algarismo.
 - ★ Complemento a 9 de 1 é 8.
 - ★ Complemento a 9 de 3 é 6.
- Uma vez calculado o complemento a 9 de 13, a expressão vira:

$$25 + 86 - 100 + 1$$

- Temos duas somas (operações fáceis) e uma subtração de 100.

A Subtração em Outras Bases: Método do Complemento a $k - 1$ (III)

- Se efetuarmos apenas as somas $(25 + 86 + 1)$, obtemos 112.
- Note que os **dois últimos algarismos** deste resultado formam **o resultado da subtração original** $(25 - 13)$.
- Isto não é por acaso.
 - ▶ O algarismo 1 na casa das centenas está lá justamente porque a última operação é uma subtração por 100.
 - ▶ Isto é, após a subtração, este algarismo sumiria e sobriam os dois algarismos menos significativos.

A Subtração em Outras Bases: Método do Complemento a $k - 1$ (IV)

- Este raciocínio pode ser estendido e usado para qualquer outra subtração.
- Resumindo os passos:
 - ▶ Sejam a o minuendo e b o subtraendo (**com $a \geq b$**).
 - ▶ Calcule b' como sendo o complemento a 9 de b (**com o número de algarismos em a**).
 - ▶ Some $a + b' + 1$.
 - ▶ Remova o algarismo mais significativo do resultado.
- Exemplos:
- Calcular $731_{(10)} - 64_{(10)}$.
 - ▶ Complemento a 9 de 64 (com 3 algarismos) é 935.
 - ▶ $731 + 935 + 1 = 1667$.
 - ▶ Ignorando o primeiro algarismo: 667.
- Calcular $74631_{(10)} - 55321_{(10)}$.
 - ▶ Complemento a 9 de 55321 (com 5 algarismos) é 44678.
 - ▶ $74631 + 44678 + 1 = 119310$.
 - ▶ Ignorando o primeiro algarismo: 19310.

A Subtração em Outras Bases: Método do Complemento a $k - 1$ (V)

- O método do complemento a 9 pode parecer inútil.
 - ▶ Dificulta algo simples, como uma subtração.
- Mas ele tem uma grande vantagem:
 - ▶ Efetivamente **elimina a necessidade de subtrações**.
 - ▶ As duas subtrações que são realizadas são triviais.
 - ★ Cálculo do complemento pode ser decorado.
 - ★ Última subtração é feita ignorando o algarismo mais significativo.
- Especialmente quando trabalhamos com bases diferentes da 10, pode ser menos trabalhoso que calcular os “empréstimos” da subtração comum.

A Subtração em Outras Bases: Método do Complemento a $k - 1$ (VI)

- Como aplicar o método a outras bases?
- Simples: para uma base k qualquer, basta usar o complemento a $k - 1$.
 - ▶ Ao invés do complemento a 9.
- Todos os outros passos ficam idênticos.

- Exemplo na base 2:

$$\begin{array}{rcccccc} & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ - & & & & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & & & & 1 & & \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ + & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ + & & & & & & 1 \\ \hline \cancel{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

A Subtração em Outras Bases: Método do Complemento a $k - 1$ (VI)

- No caso da base 2: complemento a 1
- Uma simplificação:
 - ▶ subtrair 1..1 de qualquer número, é inverter os bits

- Exemplo na base 2:

$$\begin{array}{r} 10010 \\ - 101 \\ \hline 1 1 \\ 10010 \\ + 11010 \\ \hline 1001100 \\ + 1 \\ \hline \cancel{1}001101 \end{array}$$

A Subtração em Outras Bases: Método do Complemento a $k - 1$ (VI)

- No caso da base 2: complemento a 1
- Uma simplificação:
 - ▶ subtrair 1..1 de qualquer número, é inverter os bits

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ -\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

- Exemplo na base 2:

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ -\quad\quad\quad 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\quad\quad\quad 1 \\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ +\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ +\quad\quad\quad\quad\quad 1 \\ \hline \cancel{1}\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \end{array}$$

A Subtração em Outras Bases: Números Não-Inteiros

- Assim como a para a soma, o tratamento dos números não-inteiros é idêntico na subtração.
 - ▶ Mesmo no método de complemento.
- Basicamente, alinhamos os números de forma que as vírgulas coincidam.
- Depois, podemos “esquecer” da vírgula e realizar a subtração como nos inteiros.
- Ao final, devemos lembrar de colocar a vírgula no resultado.

A Subtração em Outras Bases: Exercícios

- Calcule as seguintes subtrações:

- ▶ $11011_{(2)} - 1110_{(2)}$.
- ▶ $101101,01_{(2)} - 10001,1_{(2)}$.
- ▶ $456_{(8)} - 113_{(8)}$.
- ▶ $20AF_{(16)} - CB_{(16)}$.

Multiplicação e Divisão

Multiplicação e Divisão: Introdução

- Analogamente à adição e a subtração, os mesmos algoritmos utilizados na base 10 para multiplicação e divisão podem ser usados em qualquer outra base.
- No entanto, como estas duas operações são mais trabalhosas, iremos nos focar na base 2.
 - ▶ Na base 2, estas operações ficam até mais simples que na base 10.

Multiplicação na Base 10

- O algoritmo tradicional de multiplicação na base 10 é a **multiplicação longa**.
 - ▶ Começa-se como na soma, posicionando os operandos um sobre o outro com seus algarismos alinhados.
 - ▶ Em seguida, percorrem-se os algarismos do segundo operando, da direita para a esquerda.
 - ▶ Para cada algarismo, multiplica-se este pelo primeiro operando.
 - ★ O resultado é anotado alinhando-se o algarismo menos significativo com o algarismo atual do segundo operando.
 - ▶ Ao final, as multiplicações de algarismos individuais são somadas.

- Exemplo:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 6 4 \\ \times 5 7 \\ \hline 4 4 8 \\ + 3 2 0 \\ \hline 3 6 4 8 \end{array}$$

Multiplicação na Base 2

- Na base 2, também podemos usar o algoritmo de multiplicação longa.
- Os passos são idênticos, mas o processo é simplificado.
 - ▶ Como só há dois algarismos, 0 e 1, multiplicar um algarismo por um número **resulta ou em 0 ou no próprio número**.
- Alguns exemplos:

$$\begin{array}{r} 1011 \\ \times 110 \\ \hline 0000 \\ 1011 \leftarrow \\ + 1011 \leftarrow \\ \hline 1000010 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10010 \\ \times 101 \\ \hline 10010 \leftarrow \\ 00000 \\ + 10010 \leftarrow \\ \hline 1011010 \end{array}$$

Divisão na Base 10

- O algoritmo de divisão na base 10 é provavelmente o mais complicado dentre as 4 operações básicas.
- Inicia-se o processo trabalhando sobre os n algarismos mais significativos do dividendo.
 - ▶ Onde n é tal que o valor resultante é menor que o divisor.
 - ▶ E n é mínimo.
- Calcula-se, então, a divisão **inteira** do número formado por estes n algarismos pelo divisor.
- O resultado é o algarismo mais significativo do quociente.
- O resto é escrito abaixo do dividendo, alinhado com este.
- Pega-se o $n + 1$ -ésimo algarismo do dividendo, e concatena-se à direita do resto.
- Realiza-se uma nova divisão inteira pelo divisor e repete-se o processo.
 - ▶ Até que todos os algarismos do dividendo tenham sido usados.

Divisão na Base 10 (II)

- Exemplos:

$$\begin{array}{r} 18492 \overline{) 36} \\ 184 \overline{) 513} \\ 49 \\ 132 \\ 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8492 \overline{) 45} \\ 84 \overline{) 188} \\ 399 \\ 392 \\ 32 \end{array}$$

Divisão na Base 2

- O mesmo algoritmo de divisão pode ser usado na base 2.
- Assim como na multiplicação, o fato da base 2 só possuir dois algarismos simplifica alguns passos.
 - ▶ A cada tentativa de divisão, basta verificarmos se o valor a ser dividido é maior que o divisor.
 - ▶ Se for, adiciona-se um '1' ao quociente e subtrai-se o divisor do valor para obter o resto.
 - ▶ Caso contrário, adiciona-se '0' ao quociente e concatena-se o próximo algarismo do dividendo ao valor.
- Exemplos:

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \mid 10 \\ 1 \ 1 \mid 1100 \\ \hline 1 \ 0 \\ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 1 \ 1 \mid 11 \\ 1 \ 0 \ 1 \mid 11 \\ \hline 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 0 \end{array}$$

Divisão e Multiplicação Não-Inteiras

- Pode-se usar o algoritmo da multiplicação longa com números não-inteiros.
- O procedimento é idêntico ao usado na base 10:
 - ▶ Multiplicação é realizada como se a vírgula não existisse.
 - ▶ Ao final, coloca-se a vírgula no resultado.
 - ▶ A localização será dada, da direita para a esquerda, pela soma do número de algarismos depois da vírgula nos operandos.
- No caso da divisão, mesmo utilizando números inteiros, pode-se obter números não-inteiros.
 - ▶ Se o dividendo não for divisível pelo divisor.
 - ▶ Neste caso, ao invés de parar a divisão e reportar o resto podemos prosseguir e obter um resultado não-inteiro.
 - ▶ Algoritmo é o mesmo usado na base 10:
 - ★ Quando não houver mais algarismos no dividendo, podemos acrescentar uma vírgula ao quociente e um 0 ao resto.
 - ★ A partir daí, acrescentamos zeros ao resto a cada nova iteração.

Divisão e Multiplicação Não-Inteiras: Exemplos

$$\begin{array}{r}
 \times \qquad \qquad \qquad 1 \quad 1 \quad 0, \quad 1 \quad 1 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 1 \quad 0 \quad 1, \quad 1 \\
 \hline
 1 \quad 1 \quad 1 \quad 10 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\
 \hline
 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1, \quad 0 \quad 0 \quad 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \bigg| \quad 100 \\
 1 \quad 0 \quad 1 \quad \bigg| \quad 10,11 \\
 \hline
 \qquad \qquad 1 \quad 1 \\
 \qquad \qquad 1 \quad 1 \quad 0 \\
 \qquad \qquad \qquad 1 \quad 0 \quad 0 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad 0
 \end{array}$$

Divisão e Multiplicação: Exercícios

- Efetue as seguintes operações:

- ▶ $1001_{(2)} \times 0110_{(2)}$.
- ▶ $101.01_{(2)} \times 11011_{(2)}$.
- ▶ $10110011_{(2)} / 1010_{(2)}$ (divisão inteira).
- ▶ $111010001_{(2)} / 101000_{(2)}$ (divisão não-inteira).