Lógica e Especificação
Lista 8
Prof. Bruno Lopes

1. Construa a tabela verdade da expressão $\Psi = z \wedge (\neg y \to z)$ e responda: Ψ é Satisfatível? Refutável? Tautologia? Insatisfatvél? Justifique em caso de resposta positiva.

2. As proposições: $p \to (q \to r)$, $(p \to q) \to r$ e $\neg p \vee \neg(q \wedge \neg r)$ são equivalentes?

3. Uma proposição pode ser não-satisfatível e não-refutável simultaneamente? Explique sua resposta.

4. Se uma fórmula A é uma tautologia, o que podemos inferir sobre $\neg A$? Justifique sua resposta.

5. Analisando as sentenças seguintes, duas a duas, determine quais pares são logicamente equivalentes e quais não são. Para isso, formalize as mesmas e faça as tabelas verdades.

    1. "Para que as retas r e s sejam paralelas e não coincidentes é necessário que tenham o mesmo coeficiente angular."
    2. "As retas r e s são paralelas e não coincidentes se, e somente se, têm o mesmo coeficiente angular."
    3. "Não é o caso que, as retas r e s sejam paralelas e não coincidentes e não tenham o mesmo coeficiente angular."

6. Formalize o argumento abaixo, em seguida utilizando o método da Tabela Verdade verifique a validade do mesmo.

    Se trabalho não posso estudar.
    Trabalho ou serei aprovado em Lógica.
    Trabalhei.
    Logo fui aprovado em Lógica.

7. Especifique quais letras proposicionais correspondem a quais proposições simples e traduza os argumentos abaixo para a linguagem proposicional. Em seguida utilizando o método da Tableaux Analítico verifique a validade dos mesmos.

    (a) Ela não está em casa ou não está atendendo ao telefone. Mas, se ela não está em casa, então ela foi sequestrada. E se ela não está atendendo ao telefone, ela está correndo algum outro perigo. Portanto, ou ela foi sequestrada ou ela está correndo um outro perigo.

    (b) Se hoje é quinta-feira, então amanhã será sexta-feira. Se amanhã for sexta-feira, então depois de amanhã será sábado. Consequentemente, se hoje for quinta-feira, então depois de amanhã será sábado.

    (c) Se estudo não sou reprovado em lógica. Se não jogo sinuca, então estudo. Fui reprovado em Lógica. Logo, joguei sinuca.

    (d) Se o mordomo ou o jardineiro estão mentindo, o alarme disparou e as luzes acenderam. Se as luzes acenderam ou se alguém gritou, houve roubo. Logo, se o mordomo está mentindo, houve roubo.

    (e) Se eu viajar, vou à Europa ou aos Estados Unidos. Se for à Europa, faço turismo, e, se for aos Estados Unidos faço compras. Se eu for chamado para o emprego não vou viajar. Logo, se eu for chamado para o emprego, não faço compras nem turismo.

    (f) Se eu conseguir o emprego, compro a casa e viajo a negócios. Não consegui o emprego. Logo, se eu comprar a casa, então, se viajar a negócios, compro a casa.

    (g) Se o partido apoiar o candidato ou votar a emenda, ganharemos a eleição. Se ganharmos à eleição, não disputaremos o segundo mandato. Se realizarmos a convenção, o partido apoiará o candidato. Realizaremos a convenção e disputaremos o segundo mandato. Logo, ou o partido não vota a emenda ou não apóia o candidato.

    (h) Se comprar um carro novo ou mando consertar o antigo, irei à Argentina e pararei em Porto alegre. Visitarei meus pais, se eu parar em Porto Alegre. Se visitar meus pais, insistirão para que eu fique com eles uma semana. Se insistirem para que fique com eles uma semana, ficarei até o fim do mês. Mas se ficar até o fim do mês, não irei à Argentina. Logo, não mandarei consertar o carro antigo.

    (i) Ou as exportações e importações aumentam, ou, se os preços subirem, haverá recessão. Logo, se não houver recessão, então, se os preços subirem, as importações aumentam

    (j) Se o preço do petróleo cair, a inflação diminui. Se não aumentarmos os impostos ou se as importações não crescerem, a inflação não diminui. Se o preço do petróleo não cair, então, se aumentarmos os impostos, a inflação diminui. Logo, ou as importações crescem ou não aumentamos os impostos.

(k) Fecharemos o negócio unicamente quando ou não houver dispensas ou o contrato for assinado. Se o contrato for assinado e houver dispensas, não fecharemos o negócio. Se houver dispensas ou o contrato for assinado, então não abriremos processo. Logo, fecharemos o negócio se e somente se não abrirmos processo.

(l) Ou aumentamos as exportações ou a dívida externa cresce ou não reduzimos os juros. Reduziremos os juros unicamente se o déficit não aumentar. Se a dívida externa crescer, então ou aumentamos as exportações ou não reduzimos os juros. As exportações serão aumentadas ou o déficit não será aumentado. Logo, se o petróleo subir, aumentaremos as exportações.

8. Três irmãos, João, Eduardo e Ricardo, jogavam futebol quando, em dado momento, quebraram a vidraça da sala de sua mãe. Foi Ricardo, disse João. Fui eu, disse Eduardo. Foi Eduardo, disse Ricardo. Somente um dos três garotos dizia a verdade, e a mãe sabia que Eduardo estava mentindo.

   Pode-se deduzir que Ricardo, além de mentir, quebrou a vidraça? (é necessário a prova).

9. Escreva sentenças em lógica proposicional que descrevam as condições do problemas abaixo, depois mostre que a solução do problema de fato decorre logicamente das sentenças (fórmulas em lógica proposicional).

   Três irmãs - Ana, Maria e Cláudia - foram a uma festa com vestidos de cores diferentes. Uma vestia azul, a outra branco e a terceira preto. Chegando à festa, o anfitrião perguntou quem era cada uma delas. As respostas foram:

   - A de azul respondeu: "Ana é a que está de branco."
   - A de branco falou: "Eu sou Maria."
   - A de preto disse: "Cláudia é quem está de branco."

   O anfitrião foi capaz de identificar corretamente quem era cada pessoa considerando que:

   - Ana sempre diz a verdade.
   - Maria às vezes diz a verdade.
   - Cláudia nunca diz a verdade.

   Determine a cor do vestido de cada irmã.

10. Surfo ou estudo. Fumo ou não surfo. Velejo ou não estudo. Ora, não velejo. Assim,

    a) estudo e fumo.

    b) não fumo e surfo.

    c) não velejo e não fumo.

    d) estudo e não fumo.

    e) fumo e surfo.

11. Verifique, usando o método dos tableaux analíticos, se:

    (a) $\{(p \wedge q), (p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)\} \vdash \neg(\neg r \wedge \neg s)$

    (b) $\{(p \vee q), (p \vee r) \rightarrow s, \neg s, (q \wedge t) \rightarrow p\} \vdash (t \rightarrow p)$

    (c) $\{r \vee (s \wedge p), \neg u, (r \vee s) \rightarrow (q \vee u), \neg r\} \vdash (p \wedge q)$

    (d) $\{\neg p \vee q, r \vee \neg(p \wedge q)\} \vdash \neg p \vee (q \wedge r)$

    (e) $\{x \vee (y \wedge p), \neg(p \wedge q), (x \vee y) \rightarrow (q \vee s), \neg x\} \vdash s$

12. Determine se as fórmulas abaixo são válidas, satisfatíveis ou insatisfatíveis:

    (a) $\exists y(\forall x P(x) \rightarrow P(y))$

    (b) $\exists y(P(y) \rightarrow \forall x P(x))$

    (c) $(\forall y(\exists x P(x) \rightarrow P(y))) \rightarrow \neg\exists y P(y)$

    (d) $\neg\exists y P(y) \rightarrow (\forall y(\exists x P(x) \rightarrow P(y)))$

    (e) $\exists x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$

    (f) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$

(g) $(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$

(h) $\forall x(P(x) \vee C) \rightarrow (\forall x P(x) \vee C)$

(i) $\forall x(P(x) \wedge C) \rightarrow (\forall x P(x) \wedge C)$

(j) $(\forall x P(x) \rightarrow C) \rightarrow (\forall x P(x) \wedge C)$

(k) $\exists x(P(x) \rightarrow C) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow C)$

(l) $\forall x(C \rightarrow P(x)) \rightarrow (C \rightarrow \forall x P(x))$

13. Formalize as seguintes sentenças na lógica de primeira ordem. Para cada uma delas, declare os elementos sintáticos necessários (constantes, predicados e símbolos de funções) e elabore a formalização das mesmas. Além disso, indentifique o domínio sobre o qual a fórmula deve ser interpretada. (1)

    1. Eu não me preocupo com ninguém, se ninguém se preocupar comigo.

    2. Nenhum médico é açougueiro.

    3. Alguém é feliz. Portanto, é falso que todo mundo seja infeliz.

    4. Qualquer filósofo é mais sábio do que qualquer político. Heidegger é um filósofo e Thatcher uma política. Portanto, Heidegger é mais sábio do que Thatcher.

    5. Alguém é feliz. As pessoas felizes têm sorte. Logo, alguém tem sorte.

    6. Todas as pessoas na sala ao lado estão bebendo ou fumando.

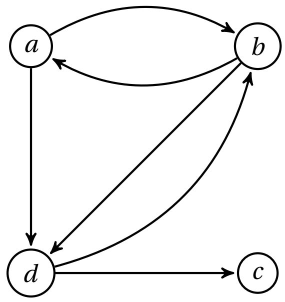
    7. Todas as pessoas são mortais. Todos os mortais têm medo. Logo, todas as pessoas têm medo.

    Obs: Para os exercícios acima, existem outras opções de respostas, igualmente corretas, usando equivalências entre $\exists$ e $\forall$. Vimos nas correções em sala.

14. Marque (V) ou (F) justificando com contra-exemplo, ou prova em Tableaux.

    - $\forall x \exists y(P(y) \wedge Q(x)) \vdash \exists y \forall x(P(y) \wedge Q(x))$
    - $\neg(P(t) \rightarrow \forall x Q(x)) \vdash \exists z(P(z) \wedge \neg Q(z))$
    - $\exists x(\forall y P(y,x) \vee Q(x)) \vdash \forall y(\exists x P(y,x) \vee \exists x Q(x))$
    - $\neg \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists y(\neg P(y) \vee \neg Q(y))$
    - $\exists x \exists y P(x,y) \vdash \exists x P(x,x)$

    Um grafo é uma estrutura $G = \langle V, E\rangle$, tal que V denota um conjunto de vértices e E um conjunto de arestas entre vértices de V. Seja o grafo $G' = \langle \{a,b,c,d\}, \{(a,b),(b,a),(a,d),(b,d),(d,b),(d,c)\}$ representado pela figura abaixo, o predicato $E(x,y)$ que significa "há uma aresta de x para y" e o predicado $=(x,y)$ que significa $x = y$.



15. (2 pontos) Apresente uma fórmula que valha apenas para este grafo e nenhum outro.

16. (1 ponto) Dado que um sumidouro é um vértice que possui apenas arestas chegando, defina um predicado sumidouro ($S(x)$) usando apenas o que já foi definido.

17. ($1\frac{1}{2}$ pontos) Verifique (justificando sucintamente) se $\exists x \exists y (\neg = (x, y) \land S(x) \land S(y))$.

18. ($1\frac{1}{2}$ pontos) Verifique (justificando sucintamente) se $\exists x (S(x) \land \forall y (S(y) \rightarrow = (x, y)))$.

19. (1 ponto) Existe algum grafo em que a fórmula $\exists x \exists y S(x) \land E(x, y)$? Justifique.

20. (1 ponto) O que seria necessário alterar no grafo para que a fórmula $\forall x \forall y E(x, y) \rightarrow \neg E(y, x)$ seja verdade?

21. (1 ponto) O que seria necessário alterar no grafo para que a fórmula $\exists x \exists y \exists z ((E(x, y) \land E(y, z)) \rightarrow \exists w E(x, w))$ seja verdade?

22. (1 ponto) Apresente um grafo com pelo menos 4 vértices que respeite a restrição $\forall x \exists y (E(x, y) \land \exists z E(z, x))$.

23. Considerando a linguagem $L = \langle +^2 \rangle$, escreva fórmulas que definam os seguintes conjuntos e relações sobre números naturais:
    (a) O número zero 0
    (b) Número ímpar
    (c) Relação de “menor que”
    (d) Relação “x é o dobro de y”
    (e) O número 2

24. Escolha **duas** sentenças abaixo e traduza para a linguagem $L = \langle +^2, *^2, <^2 \rangle$.
    (a) O produto de dois números é maior que a sua soma.
    (b) Zero não é o quadrado de nenhum número.
    (c) Existe um número que é menor que o produto de quaisquer dois números.
    (d) Dado um número primo, existem exatamente dois números que o divide.

25. Considere a estrutura $\mathfrak{N}_+ = \langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$ para a linguagem $L = \langle +^2, 0^0 \rangle$. Existe alguma diferença entre + da estrutura e o $+^2$ da linguagem? E entre o 0 da estrutura e o 0^0 da linguagem?

26. Exiba duas fórmulas verdadeiras e duas falsas em $\mathfrak{N}_+$, na linguagem do item acima. Faça isso sem o uso de variáveis livres.

27. Considere a linguagem não lógica $L = \langle P^2, k^0, Q^1, f^1 \rangle$, onde P e Q, de aridades 2 e 1, respectivamente, são símbolos predicativos, f e um símbolo funcional de aridade 1, e, k é uma constante. Note que a informação sobre as aridades já está indicada nos respectivos superescritos. Seja $\mathfrak{A}$ a sequinte estrutura:

$$\begin{aligned} \langle |\mathfrak{A}| &= \{a, b, c, d\}, \\ P^{\mathfrak{A}} &= \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}, \\ Q^{\mathfrak{A}} &= \{c, a\}, \\ f^{\mathfrak{A}} &= \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, d)\}, \\ k^{\mathfrak{A}} &= a \rangle \end{aligned}$$

Seja $\sigma : Vars \to \{a, b, c, d\}$, tal que $\sigma(x) = a$, $\sigma(z) = b$, $\sigma(y) = a$. Claro que σ associa valores para todas as variáveis da linguagem (Vars). Pede-se, considerando-se $\mathfrak{A}$ e σ:

   (a) O elemento de $\{a, b, c, d\}$ denotado por cada um dos seguintes termos: $f(k)$, $f(f(z))$, $f^{1000}(y)$ e $f^{10^{10^3}}(x)$. Onde $f^n(x)$ é uma forma abreviada para $f(f(f \ldots f(x) \ldots))$, isto é, aplicação de f n vezes.
   (b) O valor de verdade de cada uma das seguintes fórmulas, isto é, $\mathfrak{A} \models \alpha[\sigma]$ com α sendo:
      i. $\exists w(f(w) = w)$
      ii. $\forall y \exists z(Q(z) \wedge (P(z, y) \vee P(y, z)))$
      iii. $\exists z(f(z) = y)$
      iv. $\forall z(Q(z) \vee z = f(k) \vee z = f(z))$
      v. $\exists z \forall x(P(z, x) \vee P(x, z))$
      vi. $\forall x(\neg(x = f(x)) \to \exists z P(z, x))$
      vii. $\exists z \forall x(\neg(x = f(x)) \to P(z, x))$
   (c) O que podemos dizer sobre o que é definido a partir de uma fórmula $\alpha(x, y)$, com exatamente duas variáveis livres (x e y)? Exiba uma fórmula que define o conjunto $\{(b, d), (c, a)\}$.

28. Determine o valor verdade para cada uma dessas afirmações, sendo o domínio o conjunto dos números reais. Onde for apropriado, apresente um contra-exemplo.

(a) $\exists x\ x^2 = 2$

(b) $\exists x\ x^2 = -1$

(c) $\forall x\ x^2 \neq x$

29. Na estrutura de primeira ordem $\mathfrak{H} = \langle \text{Seres Humanos}, Pai, Mae \rangle$, defina usando fórmulas:

    (a) irmão

    (b) primo

    (c) avô

    (d) avó

    (e) tio

30. Considere uma linguagem de primeira ordem com o símbolo predicativo R. Pode-se ver as estruturas para esta linguagem como sendo grafos simples dirigidos tal que $R(x,y)$ indica que existe uma aresta de x para y (dirigida). Escolha **dois** itens abaixo, para cada item, desenhe um grafo com pelo menos três vértices que satisfaça a fórmula.

    (a) $\forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x))$.

    (b) $\forall x \exists y R(x,y)$, $\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))$.

    (c) $\exists x \exists y (R(x,y) \wedge R(y,x))$, $\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow \exists z (R(x,z) \wedge R(y,z))$.

31. Considere a linguagem não lógica $\mathscr{L} = \langle P^2 \rangle$, onde P de aridade 2 é um símbolo predicativo. Seja $\mathscr{A}$ a sequinte estrutura:

$$\begin{array}{l} \langle \{a,b,c,d\}, \\ P^{\mathscr{A}} = \{(b,a),(b,c),(b,d),(c,a),(c,d),(d,a)\} \rangle \end{array}$$

    Pede-se:

    (a) Duas sentenças que não sejam equivalentes e que sejam verdadeiras nessa estrutura.

    (b) Uma fórmula que defina o elemento a.