Introdução a Ciência da Computação

Sistemas Numéricos
Conversão entre Bases

PROFESSORA CINTIA CAETANO

Introdução

Sistemas Numéricos

Sistema Decimal

- Concebido pelos hindus cerca de 2000 anos atrás. Posteriormente foi adotado pelos árabes que o introduziram aos europeus.
- Também denominado sistema arábico porque utiliza símbolos arábicos para representar os dez algarismos ou dígitos (dedo em Latim) que a base suporta: (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9).
- Base é a quantidade de símbolos disponíveis para representar os diferentes dígitos do sistema.

Sistema Decimal

- A representação de qualquer número na base decimal é posicional; isto é cada dígito assume um valor ponderado à posição que ocupa.
- Ex: $638 = 6 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 8 \times 10^0$

Representações Numéricas

- Exemplo de sistema numérico não ponderado:
  - Sistema Romano
  - I, V, X, L, C, D, M
  - 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000

  - Exemplos de números romanos;
  - MCMLXXXIX, MCMXCIX, MM, MMI

Outras Bases

- Outras bases ponderadas utilizando os mesmos símbolos arábicos:
- Exemplos:
  - Base 3:
  - 0,1,2,10,11,12,20,21,22,100,101,102,110, 111, 112, …

Outras Bases

- Outras bases ponderadas utilizando os mesmos
- símbolos arábicos:
- Exemplos:
- Base 3:

0,1,2,10,11,12, 20,21,22,100, 101,102,110...(base 3)

0,1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 , 10, 11, 12....(base10)

Outras Bases

- Exemplos outras bases:
- Base 5:

0,1,2,3,4,10,11,12,13,14,20,21,22,23,24,30...

....

0,1,2,3,4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,11,12,13,14,15...

Outras Bases

- Exemplos outras bases:
- Base 7:

0,1,2,3,4,5,6,10,11,12,13,14,15,16,20,21,22,23,24...

....

0,1,2,3,4,5,6, 7, 8, 9, 10,11,12,13,14,15,16,17,18...

Outras Bases

- Exemplos outras bases:
- Base 2:

0,1,10,11,100,101,110,111,1000,1001,1010,1011,...

0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...

Outras Bases

- Exemplos outras bases:
- Base 16:

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A, B, C, D, E, F, 10,11,12,13,...

....

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,...

Concluindo…

- Propriedades dos sistemas numéricos posicionais:
  - O número de dígitos usados em qualquer sistema é sempre igual a base.
  - O maior dígito é igual ao valor da base menos 1.
  - O valor que cada dígito assume na notação posicional é igual ao seu valor absoluto multiplicado pela base elevada à posição relativa do dígito menos 1.
  - O número que corresponde à base é sempre igual a 10 (um-zero).

Notação Posicional: Números Inteiros

- Assim um número inteiro qualquer N de uma dada base b representado por sua notação posicional:

$$N_b = (A_n A_{n-1} \ldots A_2 A_1 A_0)_b \,,$$

- pode ser expresso em termos quantitativos por:

$$N_b = A_n . b^n + A_{n-1} . b^{n-1} + \ldots\ldots + A_2 . b^2 + A_1 . b^1 + A_0 . b^0$$

- (expressão da expansão da notação posicional)

Notação Posicional: Números Inteiros

- Exemplos:

1) $426_{10} = 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 6 \times 10^0 = 426_{10}$
2) $426_7 = 4 \times 7^2 + 2 \times 7^1 + 6 \times 7^0 = 216_{10}$
3) $7777_8 = 7 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 7 \times 8^0 = 4095_{10}$
4) $4303_5 = 4 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 3 = 578_{10}$
5) $4303_{16} = 4 \times 16^3 + 3 \times 16^2 + 3 = 17155_{10}$
6) $21022_3 = 2 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + 2 \times 3 + 2 = 197_{10}$
7) $1011010_2 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2 = 90_{10}$
8) $ABC_{16} = 10 \times 16^2 + 11 \times 16 + 12 = 2748_{10}$

Notação Posicional: Números Reais

- Representação de números reais:
  - Número real em uma dada base b:

$$N_R = (A_n A_{n-1} \ldots A_2 A_1 A_0 \,.\, A_{-1} A_{-2} A_{-3} \ldots A_{-m})$$

Notação Posicional: Números Inteiros

- Exemplos:

1) $426.45_7 = 4 \times 7^2 + 2 \times 7^1 + 6 \times 7^0 + 4 \times 7^{-1} + 5 \times 7^{-2}$

$$= 216 + 4 \times \frac{1}{7} + 5 \times \frac{1}{49}$$

$$= 216 + 0.57 + 0.10 = 216.67_{10}$$

2) $1001.1011_2 = 9 + 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} =$

$$= 9 + 0.5 + 0.125 + 0.0625 = 9.6875_{10}$$

3) $1A.1A_{16} = 26 + 0.0625 + 10 \times 0.0039 = 26.10156_{10}$

Conversão entre Bases

Conversão entre Bases

- **Problema:** Dado um número N_s expresso em uma base s (origem) achar sua representação N_r na base r (destino).
- Dois métodos:
  - Desenvolvimento da notação posicional (polinomial).
  - Divisões sucessivas.

- **Obs:** Embora ambos os métodos possam ser utilizados para conversão direta entre quaisquer bases s e r, é desejável que uma delas seja a 10.

Conversão entre Bases

- **1ª Regra:**

  - Quando $s < r$ e $r = 10 \longrightarrow$ aplicar o método do desenvolvimento da notação posicional do número N_s

- Exemplos:

  - $s = 2$, $N_s = 1110101$, $r = 10$, $N_r = ?$

    $N_r = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 = 117_{10}$

  - $s = 9$, $N_s = 857$, $r = 10$, $N_r = ?$

    $N_r = 8 \times 9^2 + 5 \times 9 + 7 = 700_{10}$

Conversão entre Bases

- **1ª Regra:**
- Exemplos (cont.):

  - $s = 16, \; N_s = BF7, \; r = 10, \; N_r = ?$

    $N_r = (B_{10}) \times 16^2 + (F_{10}) \times 16 + 7$

    $N_r = 11 \times 256 + 15 \times 16 + 7 = 3063_{10}$

Conversão entre Bases

- **1ª Regra para Números Reais**

  - Converter $(1000101.101101)_2$ para a base 10.

    Aqui como s < r, a solução é desenvolver a notação posicional do número:

    $1000101.101101 = 2^6 + 2^2 + 1 + 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-6} =$

    $= 64 + 4 + 1 + 0.5 + 0.125 + 0.0625 + 0.015625 =$

    $= 69.703125_{10}$

Conversão entre Bases

- **2ª Regra:**

- Quando $s > r$ e $s = 10$ ⟶ aplicar o método das divisões sucessivas.

- Exemplos:

  - $s = 10$, $N_s = 70$, $r = 4$, $N_r = ?$

```
70 |_4_
 2   17 |_4_
      1   4 |_4_
          0   1 |_4_
              1   0
```

$70_{10} = 1012_4$

Conversão entre Bases

- **2ª Regra:**
- Exemplos:

- $s = 10$, $N_s = 70$, $r = 6$, $N_r = ?$

```
70 |6
   ----
 4   11 |6
        ----
      5   1 |6
            ----
          1   0
```

$70_{10} = 154_6$

Conversão entre Bases

- **2ª Regra:**
- Exemplos:
  - $s = 10,\ N_s = 69,\ r = 2,\ N_r = ?$

$$
\begin{array}{l}
69 \ \underline{|\ 2\ \ } \\
\ \ 1 \quad 34 \ \underline{|\ 2\ \ } \\
\qquad\quad 0 \quad 17 \ \underline{|\ 2\ \ } \\
\qquad\qquad\qquad 1 \quad 8 \ \underline{|\ 2\ \ } \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \quad 4 \ \underline{|\ 2\ \ } \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \quad 2 \ \underline{|\ 2\ \ } \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \quad 1 \ \underline{|\ 2\ \ } \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \quad 0
\end{array}
$$

$$69_{10} = 1000101_2$$

Conversão entre Bases

- **2ª Regra para Números Reais**
- A parte real deve ser convertida pela fórmula $b.N_F$

Converter 69.71_{10} para a base 2.

N_I = 1000101 de um exemplo anterior.

Para N_F:

$$
\begin{aligned}
2 \times (0.71) &= 1.42 \longrightarrow A\text{-}1 = 1 \\
2 \times (0.42) &= 0.84 \longrightarrow A\text{-}2 = 0 \\
2 \times (0.84) &= 1.68 \longrightarrow A\text{-}3 = 1 \\
2 \times (0.68) &= 1.36 \longrightarrow A\text{-}4 = 1 \\
2 \times (0.36) &= 0.72 \longrightarrow A\text{-}5 = 0 \\
2 \times (0.72) &= 1.44 \longrightarrow A\text{-}6 = 1
\end{aligned}
$$

$$69.71_{10} = (1000101.101101......)_2$$

Conversão entre Bases

- **3ª Regra:**

- Quando $s \neq 10$ e $r \neq 10$ $\longrightarrow$ converter N_s para a base 10 (desenvolvimento posicional) e depois converter para a base <u>r</u> (divisões sucessivas)

- Exemplos:

  - $s = 7$, $N_s = 100$, $r = 2$, $N_r = ?$

    No caso, nem a base origem nem a destino é a 10.

    A solução é transformar primeiramente 100_7 para a base10 e depois desta para a base 2 pelo método das divisões sucessivas a seguir.

Conversão entre Bases

- **3ª Regra:**
- Exemplos:

- $s = 7$, $N_s = 100$, $r = 2$, $N_r = ?$

$N_s = 1 \times 7^2 = 49_{10}$

$$
\begin{array}{lllllll}
49 & \underline{|\,2} & & & & & \\
1 & 24 & \underline{|\,2} & & & & \\
 & 0 & 12 & \underline{|\,2} & & & \\
 & & 0 & 6 & \underline{|\,2} & & \\
 & & & 0 & 3 & \underline{|\,2} & \\
 & & & & 1 & 1 & \underline{|\,2} \\
 & & & & & 1 & 0
\end{array}
$$

$100_7 = 110001_2$

Conversão entre Bases

- **3ª Regra:**
- Exemplos:

  - $s = 9, N_s = 87, r = 4, N_r = ?$

    $N_s = 8 \times 9 + 7 = 79_{10}$

$$
\begin{array}{lllll}
79 & \underline{|4} & & & \\
3 & 19 & \underline{|4} & & \\
 & 3 & 4 & \underline{|4} & \\
 & & 0 & 1 & \underline{|4} \\
 & & & 1 & 0
\end{array}
$$

$87_9 = 1033_4$

Conversão entre Bases

- **3ª Regra:**
- Exemplos:

  - $s = 3,\ N_s = 2120,\ r = 9,\ N_r = ?$

    $N_s = 2 \times 3^3 + 3^2 + 2 \times 3 = 54 + 9 + 6 = 69_{10}$

$$\begin{array}{r|l} 69 & 9 \\ \hline 6 & \begin{array}{r|l} 7 & 9 \\ \hline 7 & 0 \end{array} \end{array}$$

$2120_3 = 76_9$

Resumindo...

- Considerando s (base origem) e r (base destino) temos na prática que:

- Quando $s < r$ e $r = 10$ ⟶ aplicar o método do desenvolvimento da notação posicional do número N_s

- Quando $s > r$ e $s = 10$ ⟶ aplicar o método das divisões sucessivas.

- Quando $s \neq 10$ e $r \neq 10$ ⟶ converter N_s para a base 10 (desenvolvimento posicional) e depois converter para a base r (divisões sucessivas)

Conversão entre Bases

- **Regra da Potência**
- Existe uma forma mais rápida para resolver as conversões entre base. Se atentarmos para o fato de que existe uma representação direta entre bases potências.
- Exemplo: base 9 é potência da base 3.
- $9^1 = 3^2$ ⇨ para cada 1 dígito na base 9 teremos 2 dígitos na base 3.

0,1,2,10,11,12, 20,21,22,100,101,102,110…(base 3)

0,1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 , 11, 12, 13….(base 9)

Conversão entre Bases

- **Regra da Potência**
- Exemplos:

  $- \; s = 2, \; N_s = 1011011, \; r = 4, \; N_r = ?$

  $01 \; 01 \; 10 \; 11 = 1 \; 1 \; 2 \; 3 = 1123_4$

- $2^2 = 4^1$
- Para cada 2 dígitos na base 2 temos um dígito na base 4.

Base 2	Base 4
00	0
01	1
10	2
11	3

Conversão entre Bases

- **Regra da Potência**
- Exemplos:

$$- s = 4, \ N_s = 1123, \ r = 2, \ N_r = ?$$

$$1\ 1\ 2\ 3 = 01\ 01\ 10\ 11 = 1011011_2$$

- $4^1 = 2^2$
- Para cada 1 dígito na base 4 temos 2 dígitos na base 2.

Base 4	Base 2
0	00
1	01
2	10
3	11

Conversão entre Bases

- **Regra da Potência**
- Exemplos:

$$- s = 2,\ N_s = 1011011_2,\ r = 8,\ N_r = ?$$

$$001\ 011\ 011 = 1\ 3\ 3 = 133_8$$

Base 8	Base 2
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

- $2^3 = 8^1$
- Para cada 3 dígitos na base 2 temos 1 dígito na base 8.

Conversão entre Bases

- **Regra da Potência**
- Exemplos:

$$- \; s = 2, \; N_s = 1011011, \; r = 16, \; N_r = ?$$

$$0101 \; 1011 = 5 \; B = 5B_{16}$$

- $2^4 = 16^1$
- Para cada 4 dígitos na base 2 temos 1 dígito na base 16.

Base 16	Base 2
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Conversão entre Bases

- **Regra da Potência para Números Reais**

$- s = 2,\ N_s = 1001011.0110011,\ r = 4,\ N_r = ?$

$01\ 00\ 10\ 11\ .\ 01\ 10\ 01\ 10 = 1\ 0\ 2\ 3\ .\ 1\ 2\ 1\ 2$

$1001011.0110011_2 = 1023.1212_4$

- $4^1 = 2^2$
- Para cada 1 dígito na base 4 temos 2 dígitos na base 2.

Base 4	Base 2
0	00
1	01
2	10
3	11

Conversão entre Bases

- **Regra da Potência para Números Reais**

$- s = 2, N_s = 10101110.10011111, \; r = 8, N_r = ?$

$010 \; 101 \; 110 \; . \; 100 \; 111 \; 110 = 2 \; 5 \; 6 \; . \; 4 \; 7 \; 6$

$10101110.100111110_2 = 256.476_8$

Base 8	Base 2
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

- $2^3 = 8^1$
- Para cada 3 dígitos na base 2 temos 1 dígito na base 8.

Exercícios

1. Faça as mudanças de base abaixo mostrando todos os cálculos efetuados:
   a) $(111011110101.0111)_2 = (?)_{10} = (?)_4$
   b) $(220210110020222.0100102122021)_3 = (?)_9$
   c) $(687805)_9 = (?)_7$
   d) $(776545362.76057)_8 = (?)_{16} = (?)_4$
   e) $(301330023.3120223321)_4 = (?)_2 = (?)_{16}$
   f) $(1100.011)_{10} = (?)_2 = (?)_4$
   g) $(878056677.320187)_9 = (?)_3$
   h) $(677504)_8 = (?)_5$
   i) $(ABADE.CCFF)_{16} = (?)_8 = (?)_4$
   j) $(1011111000110101.0110111010110)_2 = (?)_8 = (?)_{16}$