Maximização de quebras em torneios *Round Robin* simples

Sebastián Urrutia, André Cardoso de Souza, Pedro Stancioli
Departamento de Ciência da Computação - Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha - Belo Horizonte - MG CEP 31270-901
surrutia, hawks, olmo @dcc.ufmg.br

Celso C. Ribeiro
Instituto de Computação - Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria 156, Niterói-RJ, CEP 24210-240
celso@inf.puc-rio.br

RESUMO

A programação de tabelas é a principal área de aplicação dos métodos de Pesquisa Operacional em esportes. As ligas esportivas precisam de tabelas que satisfaçam diferentes tipos de restrições e que otimizem objetivos tais como a distância viajada pelas equipes durante o torneio. Neste trabalho um método para programação de tabelas, comumente usado na literatura, chamado de método do polígono, é apresentado e sua corretude é provada por dois métodos independentes. Mostra-se também como construir tabelas para torneios *round robin simples* equilibrados com o número máximo de quebras.

PALAVRAS CHAVE. Programação de tabelas esportivas. Quebras. Teoria dos grafos.

ABSTRACT

Sport scheduling is the main application area of Operational Research methods to sports. Sport leagues need for schedules satisfiyng different kind of constraints and optimizing objectives such as the distance travelled by teams during the tournament. In this work a commonly used method for creating sport schedules is presented and its correctness is shown by two independent methods. A procedure to costruct schedules with maximum number of breaks for equilibrated single round robin tournaments is also shown.

KEYWORDS. Sport scheduling. Breaks. Graph Theory.

1. Introdução

O gerenciamento de atividades esportivas é uma área promissora e pouco explorada para aplicações de Pesquisa Operacional. As competições esportivas envolvem muitos aspectos econômicos e logísticos, incluindo avaliação de atletas, avaliação de equipes, planejamento de torneios, gerenciamento de clubes, políticas de *marketing*, segurança, transporte e o estabelecimento de regras justas. No financiamento destas atividades a televisão desempenha um papel muito importante, sendo a principal fonte de investimentos no esporte.

Os problemas nesta área são em geral de formulação simples e alcançam grande difusão nos meios de comunicação. Embora sua formulação seja simples, em geral estes problemas são difíceis de serem resolvidos em termos computacionais. Isto motiva o estudo de vários problemas relacionados com o gerenciamento de atividades esportivas. Os resultados de muitos trabalhos acadêmicos nesta área têm sido aceitos como soluções para problemas reais e várias soluções vêm sendo implementadas na prática.

A programação de tabelas é a principal área de aplicação dos métodos de Pesquisa Operacional em esportes. As ligas esportivas precisam de tabelas que satisfaçam diferentes tipos de restrições e que otimizem objetivos tais como a distância viajada pelas equipes durante o torneio. A programação de tabelas para competições esportivas é uma tarefa difícil, na qual diversas técnicas de otimização combinatória têm sido aplicadas.

O problema de programação de tabelas consiste em determinar quando e onde os jogos de um determinado campeonato serão realizados. Esta tarefa é apenas uma parte do planejamento de uma competição esportiva, já que a programação da tabela não determina nem o formato nem as regras da competição.

Vários autores em diferentes contextos (ver por exemplo Ball e Webster (1997); Costa (1995); Nemhauser e Trick (1998); Russel e Leung (1994); Schreuder (1992); Thompson (1999); Yang et al. (2002)) têm tratado o problema da programação de tabelas para diferentes ligas e esportes, tais como futebol, basquete, hóquei, beisebol, rúgbi, críquete e futebol americano, usando diferentes técnicas como programação inteira, programação por restrições, busca tabu, algoritmos genéticos e *simulated annealing*. Em Easton et al. (2004) pode-se encontrar um *survey* deste tipo de trabalhos.

Em um torneio *round robin* simples (SRR, do inglês *single round robin*), todas as equipes têm que se enfrentar uma única vez em um determinado número de rodadas. Numerosos torneios são organizados desta forma e existem várias questões teóricas a resolver com respeito à estrutura deste tipo de torneio.

Considera-se que os jogos de um torneio são sempre disputados na sede de uma das duas equipes que se enfrentam. Diz-se, nesse caso, que a equipe que joga em sua sede joga em casa e a outra fora de casa, em outras palavras, diz-se que as suas condições de jogo são, respectivamente, casa e fora. Quando uma equipe têm dois jogos consecutivos em casa ou dois jogos consecutivos fora de casa, diz-se que essa equipe tem uma *quebra*. Problemas de minimização de quebras com diversas restrições têm sido estudados por vários autores.Werra (1980, 1981, 1982, 1985, 1988) mostrou como programar tabelas com número mínimo de quebras e provou outras propriedades dos problemas de programação de tabelas usando teoria dos grafos. Elf et al. (2003) consideraram o problema de minimizar quebras quando a seqüência dos jogos já está definida, faltando apenas determinar a sede de cada um desses jogos. Miyashiro et al. (2003) caracterizaram completamente as tabelas com mínima quantidade de quebras para torneios SRR com até 26 equipes.

Considera-se, neste trabalho, um torneio *round robin* simples no qual participam n

equipes (onde n é um número par maior que dois), com o menor número de rodadas possíveis, isto é, $n-1$ rodadas nas quais toda equipe joga.

Em Urrutia e Ribeiro (2006), estabelece-se uma conexão entre os problemas de minimização de distância e de maximização do número de quebras. Neste trabalho, um método para programação de tabelas comumente usado na literatura, chamado de método do polígono, é apresentado e sua corretude é provada por dois métodos independentes. Mostra-se também como construir tabelas para torneios SRR equilibrados com o número máximo de quebras.

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma. Na seção 2 são introduzidos alguns conceitos preliminares. Na seção 3 o método do polígono é apresentado e a sua validade é demonstrada na seção 4. Na seção 5 é apresentado um método para obter tabelas equilibradas com o máximo número de quebras em torneios *round robin* simples. Na última seção, algumas considerações finais são apresentadas.

2. Preliminares

Dada uma tabela de um torneio, o *padrão casa-fora* (HAP, do inglês *home-away pattern*) de uma equipe é um vetor de $n-1$ posições preenchidas com letras C ou F. Um C (resp. F) na posição r significa que esta equipe tem um jogo em casa (resp. fora de casa) na rodada r ou, em outras palavras, sua condição de jogo é mandante (resp. visitante). Um *conjunto HAP* associado com um torneio é uma coleção de n HAPs, cada um associado a uma equipe diferente, como exemplificado na Figura 1.

Equipe 1:	F	C	F	F	F
Equipe 2:	C	F	C	C	C
Equipe 3:	F	C	C	C	F
Equipe 4:	C	C	F	C	C
Equipe 5:	C	F	F	F	C
Equipe 6:	F	F	C	F	F

Figura 1: Conjunto HAP para um torneio SRR com seis equipes.

Uma equipe tem uma *quebra* na rodada r se ela tem dois jogos consecutivos em casa (quebra em casa) ou dois jogos consecutivos fora (quebra fora) nas rodadas $r-1$ e r. Dada uma tabela T, o número total de quebras $Q(T)$ é definido como a soma do número de quebras de todas as equipes na tabela. Dado que todo par de equipes tem que se enfrentar em alguma rodada, não podem existir dois HAPs iguais em um conjunto HAP. Quando uma equipe tem um HAP completamente alternado, ela não tem quebras, por outro lado, quando ela tem um padrão constante (todos os jogos em casa ou todos os jogos fora de casa), ela tem o máximo número de quebras possíveis, que é igual a $n-2$ (quebras em todas as rodadas desde a 2 até a $n-1$).

Dada uma tabela T, a distância total viajada $D(T)$ é definida como a soma das distâncias viajadas por todas as equipes durante o torneio.

Em Urrutia e Ribeiro (2006), estabelece-se uma conexão entre os problemas de minimização de distância e de maximização do número de quebras. Definem-se novas instâncias para problemas de minimização de distância, onde a distância entre todo par de equipes é igual a um, e mostra-se que para essas instâncias a minimização da distância viajada é equivalente à maximização do número de quebras. Esta relação motiva o estudo do problema de programação de tabelas com número máximo de quebras. Este problema foi previamente considerado por Russel e Leung (1994) em um contexto onde as equipes não podem jogar mais de dois jogos consecutivos em casa nem mais de dois jogos consecutivos fora. Os autores mostraram que, nesse contexto, $n \cdot (n/2-1)$ é um limite superior para o número de quebras e desenvolveram um método para programar tabelas com $n \cdot (n/2-1)-(n-4)$ quebras.

3. O método do polígono

O método do polígono é um processo que gera tabelas de jogos para as n equipes de um campeonato SRR.

Modela-se o problema mediante um grafo completo de n vértices em que cada equipe participante do campeonato é representado por um vértice e a aresta unindo dois vértices representa o jogo a ser disputado entre as equipes representadas pelos vértices. O problema consiste então em obter uma coloração própria das arestas do grafo usando exatamente $n-1$ cores.

Para definir as cores a serem atribuídas a cada aresta e, por conseguinte, as rodadas, um polígono que possui $n-1$ vértices é construído. As equipes $1, \ldots, n-1$, são inicialmente colocados em vértices numerados consecutivamente no sentido horário do polígono construído: equipe 1 no vértice 1, equipe 2 no vértice 2 e assim por diante. As partidas são definidas pelas arestas entre as equipes localizadas nos vértices de índices $1+k, k \in \left\{1, \ldots, \frac{n-1}{2}\right\}$ e pelas equipes localizadas nos vértices de índices $n+1-k$. A equipe n é colocada fora do polígono e conectado ao vértice de índice 1 por meio de uma aresta.

A definição das próximas rodadas é feita através de $n-1$ rotações, no sentido horário, de cada equipe colocada no polígono. Em cada rotação a equipe colocada no vértice de índice $i, i \in \{1, \ldots, n-2\}$ se move para o vértice de índice $i+1$, já a equipe colocada no vértice $n-1$ se move para o vértice 1.

Cada rotação gera uma nova rodada e define uma nova cor para colorir as arestas do grafo completo original. A figura 2 ilustra a aplicação do método do polígono para um torneio com $n=6$ equipes.

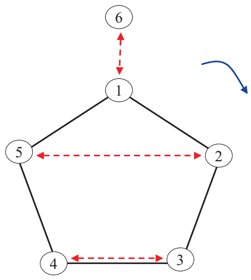


Figura 2: Método do polígono para $n=6$ (primeira rodada).

4. Validade do método do polígono

O método do polígono é bastante utilizado na comunidade de escalonamento de atividades esportivas, como em Ribeiro e Urrutia (2007); Miyashiro e Matsui (2006); Werra (1981). Apesar disso, uma prova da validade do método não foi encontrada na literatura.

Uma tabela é válida quando tem exatamente $n-1$ rodadas, cada equipe joga exatamente uma vez por rodada e todas as equipes jogam entre si. Como cada equipe tem que enfrentar as $n-1$ equipes restantes e a tabela tem $n-1$ rodadas, nenhum jogo será repetido. O método do polígono gera uma tabela de jogos válida para um torneio SRR para qualquer número de equipes n par maior ou igual a 2.

Como definido, o método do polígono gera $n-1$ rodadas já que as equipes rodam $n-1$ vezes. Já que as arestas definidas incidem em apenas um vértice do polígono e na equipe n que está fora do polígono, cada equipe jogará uma vez por rodada.

Deve-se mostrar por último que não se repetem jogos em nenhum par de rodadas. Isto é fácil de mostrar para os jogos da equipe n pois nos $n-1$ passos do método do polígono uma equipe diferente ocupará o vértice de índice 1 do polígono garantindo que a equipe enfrentará todas as outras.

Nas duas seguintes subseções prova-se, de forma independente, que os jogos das equipes 1 até $n-1$ também não se repetem na tabela.

4.1. Prova numérica

A eleição das arestas que unem os vértices do polígono garante que cada equipe e_1 quando colocada em um vértice de índice $k, k \in \{1,\ldots,n-1\}$ jogará com uma equipe e_2 em que $(e_1 - e_2 + n - 1) \bmod (n-1) = \delta_k$, onde δ_k é uma constante cujo valor depende do vértice do polígono onde a equipe se encontra. Valores de δ_k diferentes para uma mesma equipe e_1 indicam partidas diferentes dessa equipe e_1. Se nas $n-1$ rotações do polígono essa equipe e_1 for colocada em vértices que possuem valores de δ_k distintos entre si, significa que a equipe e_1 jogará partidas com adversários diferentes entre si. O método do polígono vai gerar uma tabela válida para as n equipes se os valores de δ_k forem diferentes para cada vértice do poligono.

A prova de que os valores de δ_k são diferentes para cada vértice pode ser feita pela análise dos índices dos vértices localizados em cada lado do polígono, sendo o lado direito definido pelos vértices localizados à direita do vértice de índice 1, e o lado esquerdo definido pelos vértices localizados à esquerda. Os vértices do lado direito do polígono são aqueles que estão no conjunto $D = \{1+k \mid k \in N, 1 \le k \le \frac{n-2}{2}\}$ e os vértices do lado esquerdo são aqueles que estão no conjunto $E = \{(n-1)-k \mid k \in N, 1 \le k \le \frac{n-2}{2}\}$. O valor de δ_k para os vértices localizados no lado direito do grafo é:

$$\begin{aligned}
\delta_k &= ((1+k)-(n-k)+n-1) \bmod (n-1) \\
&= 2k \bmod (n-1)
\end{aligned}$$

Como k varia de 1 a $\frac{n-2}{2}$, então o valor de δ_k para cada vértice localizado no lado direito do grafo varia de 2 a $n-2$, que são os valores pares entre 1 e $n-1$. O valor de δ_k para os vértices localizados no lado esquerdo do grafo, por sua vez, é:

$$\begin{aligned}
\delta_k &= ((n-k)-(1+k)+n-1) \bmod (n-1) \\
&= 2(n-1-k) \bmod (n-1) \\
&= (2(n-1)-2k) \bmod (n-1) \\
&= ((n-1)-2k) \bmod (n-1)
\end{aligned}$$

E, uma vez que $n-1$ é ímpar, então $(n-1)-2k$ é ímpar para todo $k \in \{N, 1 \le k \le \frac{n-2}{2}\}$. Assim, os valores de δ_k para os vértices localizados no lado esquerdo do polígono são os números ímpares entre 1 e $n-3$. A partir disso, conclui-se que o valor de δ_k é diferente para cada vértice do polígono, sendo par para os vértices do lado direito e ímpar para os vértices do lado esquerdo do polígono. A figura 3 ilustra os valores de δ_k para cada vértice do polígono quando n é igual a 6.

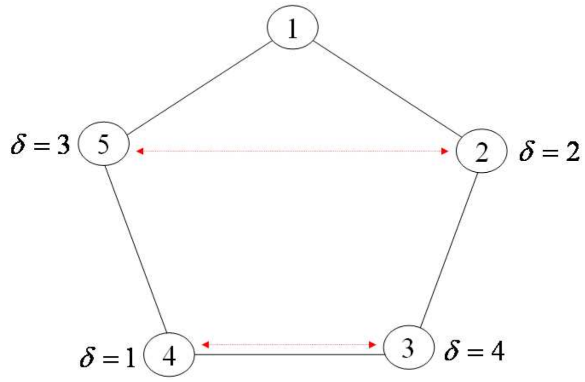


Figura 3: Valores de δ_k para os vértices do grafo quando n é igual a 6.

Uma vez que o valor de δ_k é diferente para cada vértice do polígono, as $n-1$ rotações das equipes pelos vértices definidas pelo método do polígono vão gerar partidas diferentes em cada vértice do grafo para cada equipe. Então, o método do polígono, vai gerar $n-1$ partidas diferentes para cada equipe após as $n-1$ rotações.

4.2. Prova gráfica

No método do polígono, duas equipes que se enfrentam em uma rodada se encontram em nós adjacentes no grafo da Figura 4, que mostra o emparelhamento definido pelas arestas definidas pelo método.

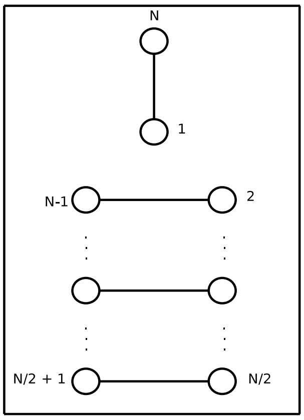
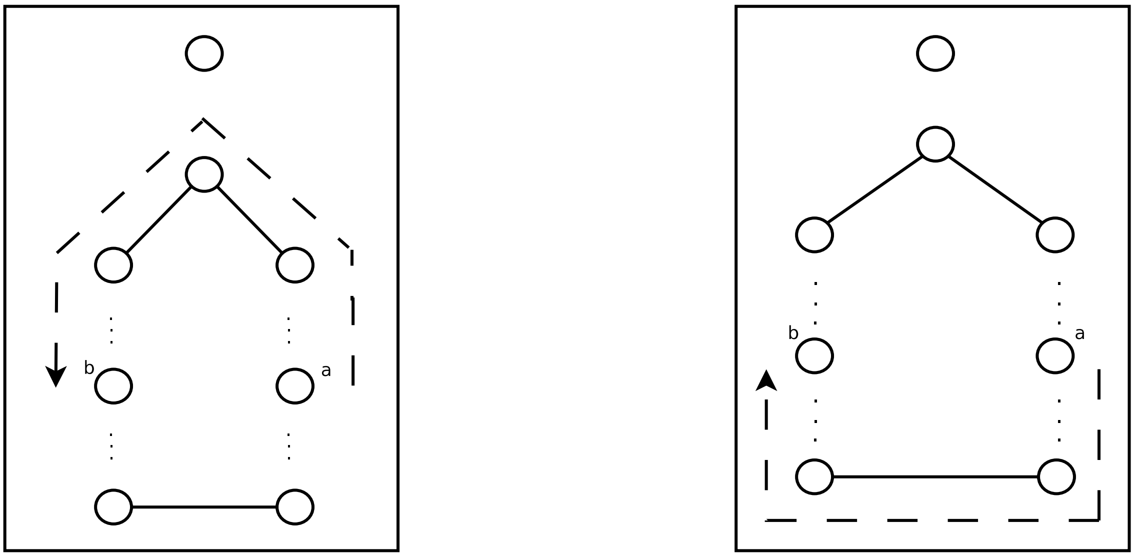


Figura 4: Emparelhamento de equipes que se enfrentam numa rodada

Observa-se que, para os vértices $\{2,\ldots,n-1\}$, existem dois caminhos pelas arestas do polígono (ver Figura 5) que conectam dois vértices adjacentes no grafo da Figura 4. Estes serão chamados de **caminho abaixo** e **caminho acima**. Uma vez que o polígono tem um número ímpar de vértices, o caminho abaixo entre duas equipes que se enfrentam possui tamanho ímpar e o caminho acima, por sua vez, possui tamanho par.

Definem-se ainda dois conjuntos de vértices: o conjunto de vértices à direita, que possui os vértices cujas posições no polígono estão no intervalo $[2, \frac{n}{2}]$, e o conjunto de vértices à esquerda, cujos elementos estão em posições dentro do intervalo $[\frac{n}{2}+1, n-1]$. Como não há arestas entre vértices localizados em um mesmo lado do polígono, duas equipes só podem se enfrentar se estiverem em lados opostos. Além disso, uma equipe localizada em determinado lado do polígono não pode voltar a enfrentar uma equipe que já enfrentou



(a) Caminho acima (b) Caminho abaixo

Figura 5: Caminhos acima e abaixo entre dois vértices

enquanto não se move para o outro lado do polígono, pois este sempre roda no mesmo sentido.

Assim, para uma determinada equipe enfrentar duas vezes o mesmo adversário, ela precisa enfrentá-lo uma vez quando está no lado esquerdo do polígono e outra quando está no lado direito do polígono. Dessa maneira, é suposto uma equipe do lado esquerdo do polígono que, ao percorrer o polígono e ocupar alguma posição do lado direito, volte a enfrentar certa equipe. Assim sendo, o *caminho abaixo* que conectava os vértices na primeira situação passa a ser um *caminho acima* na segunda situação (veja Figura 5). Como sabe-se que caminhos abaixo possuem tamanho ímpar e caminhos acima possuem tamanho par, a suposição descrita é impossível. Assim, duas equipes só podem voltar a se enfrentar se retornarem às mesmas posições que ocuparam no primeiro confronto, o que só ocorre a partir da n-ésima rodada.

Assim, prova-se que duas equipes não voltam a se enfrentar.

5. Programação de tabelas equilibradas com máximo número de quebras

Consideram-se torneios SRR *equilibrados* (ESRR, do inglês, *equilibrated single round robin*) nos quais cada equipe joga $n/2-1$ ou $n/2$ jogos em casa. Isto é equivalente a dizer que cada equipe tem que jogar pelo menos $n/2-1$ jogos em casa e pelo menos $n/2-1$ jogos fora. Em conseqüência, nenhuma equipe pode ter $n-2$ quebras já que todas devem mudar sua condição de jogo pelo menos uma vez (deve haver uma seqüência Casa-Fora ou Fora-Casa no HAP de cada equipe). Já que duas equipes não podem ter associado o mesmo HAP, só quatro equipes podem ter $n-3$ quebras: uma jogando os primeiros $n/2$ jogos em casa e os seguintes $n/2-1$ jogos fora, a segunda jogando os primeiros $n/2-1$ jogos em casa e os seguintes $n/2$ jogos fora, a terceira jogando os primeiros $n/2$ jogos fora e os seguintes $n/2-1$ em casa, e a quarta jogando os primeiros $n/2-1$ jogos fora e os seguintes $n/2$ em casa. Portanto, as restantes $n-4$ equipes podem ter no máximo $n-4$ quebras. Então,

$$LS_{ESRR} = 4(n-3)+(n-4)(n-4) = n^2-4n+4 = (n-2)^2$$

é um limite superior para o número de quebras de uma tabela para um torneio SRR equilibrado.

Para gerar uma tabela com exatamente LS_{ESRR} quebras é utilizada a versão orientada do método do polígono. Consideram-se as arestas definidas por este método. Na extensão do método atribui-se uma orientação a cada uma dessas arestas. A aresta conectando os nós 1 e n é orientada de 1 para n ou de n para 1 em cada rodada. Para cada $k = 2,\ldots,n/2$, a aresta conectando os nós k e $n+1-k$ é orientada do nó par para o nó ímpar ou do nó ímpar para o nó par em cada uma das rodadas. A equipe apontada por um arco da coloração orientada gerada por este método é considerada como a que joga em casa.

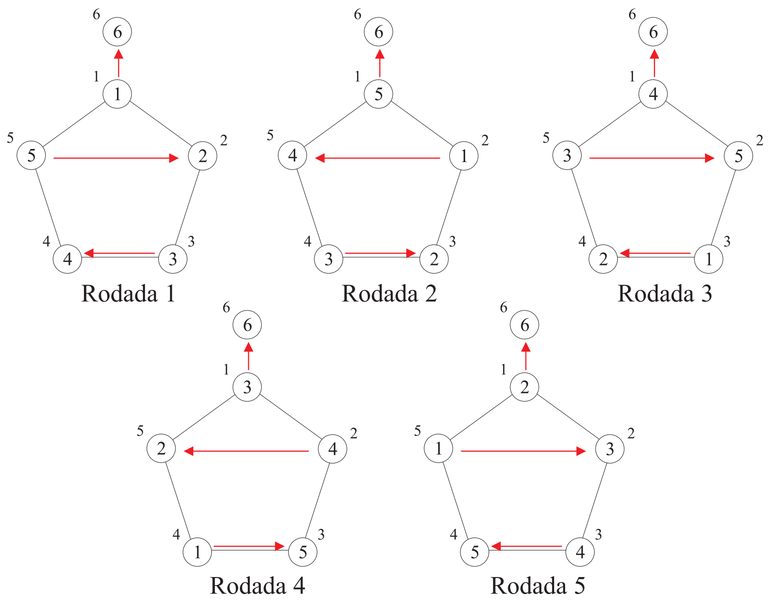


Figura 6: Método do polígono para maximizar o número de quebras em um torneio SRR para $n = 6$.

A Figura 6 ilustra este procedimento para $n = 6$. Em Urrutia e Ribeiro (2006) é mostrado que o método do polígono com as orientações mostradas na Figura 6 gera uma tabela para um torneio SRR com número máximo de quebras. A seguir mostra-se como orientar as arestas do método do polígono para obter um torneio SRR equilibrado com número máximo de quebras.

A aresta que une os nós 1 e n é orientada do nó 1 para o nó n nas primeiras $n/2-1$ rodadas e do nó n ao 1 nas últimas $n/2$ rodadas. Para cada $k = 2,\ldots,n/2$, a aresta que conecta os nós k e $n+1-k$ é orientada do nó k ao nó $n+1-k$ em todas as rodadas. A Figura 7 ilustra este método para $n = 6$ equipes. Todas as equipes de 1 a $n-1$ jogam fora de casa desde que entram no nó 2 e até que chegam ao nó $n/2$, tendo quebras quando se movem do nó i ao nó $i+1$, para $2 \leq i \leq n/2-1$. Estas equipes jogam em casa desde que entram no nó $n/2+1$ e até que chegam ao nó $n-1$, tendo quebras quando se movem do nó i ao nó $i+1$, para $n/2+1 \leq i \leq n-2$. Sempre que um equipe vai sucessivamente do nó $n-1$ ao 1 e, em seguida, do nó 1 ao 2, tem-se uma quebra ou bem quando entra no nó 1 (se joga em casa no nó 1) ou bem quando entra no nó 2 (se joga fora no nó 1). Portanto, todas as equipes de 1 a $n-1$ só podem ter duas rodadas sem quebra além da primeira: a primeira quando passam do nó $n/2$ ao $n/2+1$ e a segunda quando passam do nó $n-1$ ao 1 ou do nó 1 ao 2. Em conseqüência, todas as equipes de 1 a $n-1$ tem pelo menos $n-4$

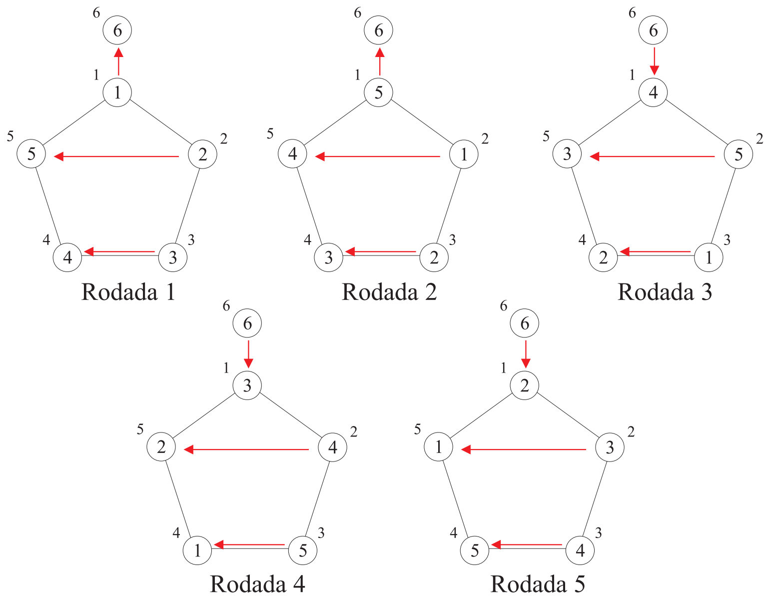


Figura 7: Método do polígono para maximizar o número de quebras em um torneio ESRR para $n = 6$.

quebras.

Entretanto, a equipe 1 nunca passa do nó $n-1$ ao 1 e joga fora na primeira e na segunda rodadas quando está nos nós 1 e 2, respectivamente. Então, ela muda sua condição de jogo só uma vez (quando passa do nó $n/2$ ao $n/2+1$) e tem $n-3$ quebras. De forma similar, a equipe 2 nunca passa do nó 1 ao 2 e joga em casa quando está nos nós $n-1$ e 1. Portanto, também muda sua condição de jogo só uma vez (quando passa do nó $n/2$ ao nó $n/2+1$) e também tem $n-3$ quebras. A equipe $n/2+1$ nunca passa do nó $n/2$ ao nó $n/2+1$, então muda sua condição de jogo só uma vez e também tem $n-3$ quebras. Finalmente, note-se que a equipe n também tem $n-3$ quebras dado que só na rodada $n/2$ muda sua condição de jogo.

Portanto, dado que só quatro equipes têm $n-3$ quebras e nenhuma das outras pode ter menos de $n-4$ quebras, o total de quebras na tabela é exatamente $4(n-3)+(n-4)(n-4) = n^2-4n+4 = LS_{ESRR}$.

6. Considerações Finais

O método do polígono é comumente usado para se gerar soluções iniciais para problemas de programação de tabelas para campeonatos esportivos. Embora seja muito utilizado uma prova formal de seu correto funcionamento não foi encontrada na literatura. Neste trabalho provou-se com duas provas independentes a sua corretude.

Uma extensão do método do polígono foi utilizada para resolver de forma exata o problema de maximização de quebras para torneios SRR equilibrados. Este tipo de problema é importante devido a sua relação com os problemas de minimização de distância como provado em Urrutia e Ribeiro (2006).

As provas da corretude do método do polígono permitem analisar quais são as propriedades de um método para geração de tabelas (ou, equivalentemente, colorações próprias das arestas de um grafo completo com exatamente $n-1$ cores). Como trabalho futuro existe a possibilidade de criar novos métodos de geração de tabelas não isomorfas às tabelas geradas pelo método do polígono.

Referências

B.C. Ball e D.B. Webster, Optimal schedules for even-numbered team athletic conferences, *AIIE Transactions*, 9:161–169, 1997.

D. Costa, An evolutionary tabu search algorithm and the NHL scheduling problem, *INFOR*, 33:161–178, 1995.

K. Easton, G.L. Nemhauser, e M. Trick, Sports scheduling, J.T. Leung, editor, *Handbook of Scheduling: Algorithms, Models and Performance Analysis*, páginas 52.1–52.19, CRC Press, 2004.

M. Elf, M. Jünger, e G. Rinaldi, Minimizing breaks by maximizing cuts, *Operations Research Letters*, 31:343–349, 2003.

R. Miyashiro e T. Matsui, Minimizing the carry-over effects value in a round-robin tournament, *E. Burke and H. Rudova (eds.), PATAT 2006*, páginas 402–405, 2006.

R. Miyashiro, H. Iwasaki, e T. Matsui, Characterizing feasible pattern sets with a minimum number of breaks, E. Burke e M. Carter, editors, *Practice and Theory of Automated Timetabling IV: Selected Papers from the 4th International Conference for the Practice and Theory of Automated Timetabling*, volume 2740 of *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 78–99, Springer, 2003.

G.L. Nemhauser e M.A. Trick, Scheduling a major college basketball conference, *Operations Research*, 46:1–8, 1998.

Celso C. Ribeiro e Sebastián Urrutia, Heuristics for the mirrored traveling tournament problem., *European Journal of Operational Research*, 179(3):775–787, 2007.

R. A. Russel e J.M.Y. Leung, Devising a cost effective schedule for a baseball league, *Operations Research*, 42:614–625, 1994.

J.A.M. Schreuder, Combinatorial aspects of construction of competition Dutch professional football leagues, *Discrete Applied Mathematics*, 35:301–312, 1992.

J.M. Thompson, Kicking timetabling problems into touch, *OR Insight*, 12:7–15, 1999.

S. Urrutia e C.C. Ribeiro, Maximizing breaks and bounding solutions to the traveling tournament problem, *Discrete Applied Mathematics*, 154:1932–1938, 2006.

D. De Werra, Geography, games and graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 2:327–337, 1980.

D. De Werra, Scheduling in sports, P. Hansen, editor, *Studies on Graphs and Discrete Programming*, volume 11 of *Annals of Discrete Mathematics*, páginas 381–395, North-Holland, 1981.

D. De Werra, Minimizing irregularities in sports scheduling using graph theory, *Discrete Applied Mathematics*, 4:217–226, 1982.

D. De Werra, On the multiplication of divisions: The use of graphs for sports scheduling, *Networks*, 15:125–136, 1985.

D. De Werra, Some models of graphs for scheduling sports competitions, *Discrete Applied Mathematics*, 21:47–65, 1988.

J.T. Yang, H.D. Huang, e J.T. Horng, Devising a cost effective basketball scheduling by evolutionary algorithms, *Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation*, páginas 1660–1665, Honolulu, 2002.