PUC-Rio | Departamento de Informática
Data: 11 de dezembro de 1996 | Período: 1996.2

ESTRUTURAS DISCRETAS

Segunda chamada - G2

---

1. (3 pontos) Considere n famílias que foram convidadas para um jantar. Cada família é formada por p_i pessoas, $i = 1, 2, \ldots, n$. No jantar, todas estas pessoas deverão ser acomodadas em m mesas. Cada mesa pode acomodar no máximo q_j pessoas, $j = 1, 2, \ldots, m$. De modo a induzir o entrosamento entre pessoas de diferentes famílias, os organizadores do jantar desejam determinar como acomodar as pessoas nas mesas, sob a condição de colocar no máximo dois membros de cada família em cada mesa.

   (a) Como este problema pode ser modelado e resolvido como um problema de fluxo em redes? Justifique clara e detalhadamente.

   (b) Aplique o modelo proposto e o algoritmo apropriado resolvendo o problema com $n = 3$, $m = 4$, $p = (5, 3, 4)$ e $q = (5, 6, 5, 3)$. Todos os cálculos devem estar perfeitamente indicados para que possa ser observada a correta aplicação do algoritmo.

2. (3 pontos) Considere o problema da mochila em variáveis 0-1:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j = b \\ & x_j \in \{0, 1\} \; \forall j = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

   onde n, c_j, a_j, b são números inteiros representando, respectivamente, o número de objetos, seus custos, seus pesos e o peso total que pode ser carregado na mochila. Especifique em pseudo-código (não serão aceitos códigos em nenhuma linguagem de programação específica, nem descrições sumárias em português) um algoritmo para a determinação do maior lucro que pode ser obtido pela seleção apropriada dos objetos a serem colocados na mochila. Justifique o algoritmo proposto, defina a notação utilizada e explique os conceitos empregados. Calcule (justificando) a complexidade do algoritmo proposto (isto é uma preparação para as questões 2 e 3, que não poderão ser resolvidas sem esta reflexão inicial, e não vale ponto algum).

   (a) Adapte o algoritmo proposto e especifique um novo algoritmo que, além de calcular o valor máximo do lucro, também calcule o valor de cada variável na solução ótima. Justifique o algoritmo proposto, defina a notação utilizada e explique os conceitos empregados.

   (b) Recalcule (justificando e utilizando a notação O), se necessário, a complexidade do novo algoritmo proposto no item acima.

   (c) Calcule (justificando e utilizando a notação O) a quantidade de memória utilizada por este algoritmo.

3. (4 pontos) Considere novamente o problema da mochila, descrito e estudado no item anterior:

   (a) Formule este problema como um problema de fluxo em redes, descrevendo claramente a caracterização dos nós do grafo, de seus arcos (quais arcos ligam quais nós) e dos parâmetros associados a cada nó ou arco. Qual é o tipo de problema resultante?

   (b) Qual é o algoritmo indicado para sua resolução como um problema de fluxo em redes?

   (c) Quantos nós e arcos tem o grafo proposto?

   (d) Calcule (justificando e utilizando a notação O) a complexidade do algoritmo proposto acima para a resolução deste problema, em termos do número de nós e do número de arcos do modelo (item c acima).

   (e) O que é um algoritmo polinomial? O algoritmo proposto nesta questão é polinomial, considerando-se os dados de entrada do problema? E considerando-se o número de nós e o número de arcos? Considerando e comparando as respostas aos itens anteriores, o algoritmo proposto é polinomial? Explique e justifique.

   (f) Resolva o problema através do algoritmo proposto e utilizando os seguintes dados, deixando claramente indicados todos os cálculos efetuados, que permitam verificar a correta aplicação do algoritmo apropriado:
   $n = 5$
   $a = (2, 3, 1, 3, 4)$
   $c = (3, 2, 3, 1, 4)$
   $b = 6$

Observações:

- Prova sem consulta de qualquer espécie.
- Os algoritmos devem ser justificados e especificados em pseudo-linguagem, não podendo ser utilizadas linguagens de programação específicas.
- Justifique todos seus cálculos e afirmações.