PUC-Rio | Departamento de Informática
Data: 2 de maio de 1995 | Período: 1995.1

PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMOS

Primeira lista
Data de entrega: 16 de maio de 1995

---

1. Sejam n cidades que devem comunicar-se entre si. Cada cidade i tem no máximo uma mensagem a enviar para a cidade j. Todas as mensagens têm a mesma duração e são transmitidas através de um satélite, cuja capacidade (número de mensagens sendo transmitidas simultaneamente) é suficientemente grande. Uma cidade pode receber uma mensagem e enviar outra simultaneamente, mas jamais receber ou enviar mais de uma mensagem simultaneamente. Formular este problema como um modelo de otimização em grafos, ilustrando através do exemplo correspondente à matriz de tráfego $T = (t_{ij})_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,n}$ abaixo ($n = 5$), onde $t_{ij} = 1$ se existe uma mensagem a ser enviada da cidade i para a cidade j, $t_{ij} = 0$ caso contrário:

$$T = (t_{ij})_{i=1,\ldots,5;j=1,\ldots,5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Sejam n cidades que devem comunicar-se entre si. Conhece-se a matriz de tráfego $T = (t_{ij})_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,n}$, cujo elemento t_{ij} indica a duração da mensagem a ser enviada da cidade i para a cidade j. As mensagens são transmitidas através de um satélite com n canais. Os canais são síncronos, isto é, podem enviar simultaneamente um lote de até n mensagens cuja transmissão começa no mesmo instante. Nenhuma mensagem pode ter sua transmissão interrompida após ser iniciada. Uma cidade pode receber uma mensagem e enviar outra simultaneamente, mas jamais receber ou enviar mais de uma mensagem simultaneamente. Considere o problema de atribuir as mensagens aos canais e de definir sua ordem de envio, de modo a minimizar o tempo total de transmissão.

   (a) Propor uma heurística para a resolução deste problema e indicar sua complexidade.
   (b) Ilustrar o modelo e a aplicação da heurística através do exemplo correspondente à matriz de tráfego abaixo ($n = 5$):

$$T = (t_{ij})_{i=1,\ldots,5;j=1,\ldots,5} = \begin{bmatrix} - & 12 & 3 & - & 7 \\ 2 & - & 5 & 13 & 8 \\ 1 & 8 & - & 4 & 10 \\ - & 6 & 15 & - & 8 \\ - & 14 & 1 & 10 & - \end{bmatrix}$$

3. Estudar ou propor uma heurística gulosa para o problema de coloração de grafos, discutindo sua complexidade.

4. Proponha um algoritmo recursivo para a solução do problema das torres de Hanói e analise sua complexidade.

5. Problema 2.7 (página 37) de [Wei]: ítens a, b, e.

6. Problema 2.19 (página 39) de [Wei]: ítens a, b, c.

7. Seja um conjunto de n intervalos fechados $X_1 = [I_1, S_1]$, $X_2 = [I_2, S_2]$, $\ldots, X_n = [I_n, S_n]$ definidos sobre os reais. Escrever um algorithmo de complexidade $O(n \log n)$ para indicar os intervalos contidos em pelo menos um dos intervalos do conjunto ($X_j \subset X_k \iff I_k \leq I_j$ e $S_j \leq S_k$).

8. *(Scheduling fixed jobs)* Dadas n tarefas J_j, cada uma com um instante de início s_j e um instante de término $t_j, j = 1, \ldots, n$, deseja-se encontrar um escalonamento destas tarefas em um número mínimo de máquinas. Um escalonamento associa a cada tarefa J_j uma máquina M_i. Um escalonamento é viável se nenhum par de intervalos (s_j, t_j) de tarefas processadas na mesma máquina M_i se superpõem. Escrever um algoritmo eficiente para este problema, analisando sua complexidade.

9. Considere n números satisfazendo $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Escreva um algoritmo do tipo "busca ternária" para, dado x, determinar se existe $i \in \{1, 2, \ldots, n, n-1\}$ tal que $a_i = x$. Compare-o com o algoritmo de busca binária.

10. Seja uma matriz A de elementos inteiros de dimensões $n \times n$. Os elementos de cada linha e de cada coluna estão ordenados em ordem não-decrescente. Dado um valor x, escreva um algoritmo para determinar se existem $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tais que $x = a_{ij}$. Descreva sua complexidade.

11. Proponha um algoritmo não recursivo para a solução do problema das torres de Hanói.

12. Proponha uma estrutura de dados apropriada para representar uma árvore, não necessariamente binária. Em seguida, escreva um programa não-recursivo em Fortran ou Pascal, que percorra os nós de uma árvore (a) em pré-ordem, (b) em ordem simétrica, e (c) em pós-ordem.

13. Uma companhia de petróleo planeja construir um oleoduto na direção leste-oeste através de um campo com n poços de petróleo. Cada poço será conectado ao oleoduto por coletores na direção norte-sul. Conhecidas as coordenadas x e y de cada poço, deseja-se determinar a localização ótima do oleoduto de forma a minimizar o comprimento total dos coletores. Descrever um algoritmo para este problema, analisando sua complexidade.

14. Considere o problema de armazenamento de n arquivos de comprimentos $\ell_1, \cdots, \ell_n$ em uma fita magnética, de modo a minimizar o tempo médio de acesso aos arquivos, conforme discutido em sala de aula. Considere agora que os arquivos devem ser armazenados em M fitas, onde M é um número inteiro conhecido. Proponha um algoritmo exato para este problema, prove sua correção e analise sua complexidade.

15. Considere n jogadores $\{p_1, \ldots, p_n\}$ que participam de um torneio do tipo *round robin*, no qual cada jogador enfrenta todos os outros jogadores, uma única vez. Descrever um algoritmo de complexidade $O(n \log n)$ para determinar uma ordem $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n}$ dos jogadores tal que para todo $1 \leq j < n$, p_{i_j} venceu a partida contra $p_{i_{j+1}}$.

16. Dados números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, o problema da subseqüência crescente mais longa consiste em obter o maior valor de k tal que $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_k}$ e $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Descrever um algoritmo para resolver este problema e analisar sua complexidade.

17. Seja $G = [V, E]$ uma árvore binária. A distância entre dois vértices de G é dada pelo comprimento (número de arestas) do caminho que conecta estes dois vértices. O diâmetro de G é a distância máxima entre todos os pares de vértices. Projetar um algoritmo de complexidade linear para calcular o diâmetro de uma árvore dada.

18. *(Set cover)* Considere uma família S formada por m conjuntos $S_i, i = 1, \ldots, m$. Deseja-se obter um subconjunto $\{T_1, \ldots, T_k\}$ de S de cardinalidade mínima, tal que $\cup_{i=1}^{i=m} S_i = \cup_{j=1}^{j=k} T_j$. Proponha um algoritmo guloso para este problema, discutindo sua complexidade e sua otimalidade.

19. Seja $G = [N, A]$ um grafo não-orientado, onde $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ é o conjunto de nós e A é o conjunto de arestas de G. Deseja-se colorir os nós de G com um número mínimo de cores, de tal forma que nós adjacentes recebam cores diferentes. Proponha um algoritmo guloso para este problema, discutindo sua complexidade e otimalidade.

20. Seja $G = [N, A]$ um grafo orientado, onde $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ é o conjunto de nós e A é o conjunto de arcos de G. Cada arco $(i, j) \in A$ é munido de um comprimento $c_{ij} \geq 0$. Escreva um algoritmo que obtenha os K menores caminhos elementares do nó 1 ao nó n. Analisar sua complexidade.

21. Problema 10.9 (página 408) de [Wei].

22. Seja $G = [N, A]$ um grafo orientado sem ciclos, onde $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ é o conjunto de nós e A é o conjunto de arcos de G.

    (a) Mostrar que existe pelo menos um nó de N cujo grau de entrada é nulo.

    (b) Escrever um algoritmo para renumerar os nós de N de modo que:
    – $\forall\, i \in N, \pi(i) \in \{1, 2, \ldots, n\}$ é o novo índice do nó i.
    – $\forall\, (i, j) \in A, \pi(i) < \pi(j)$.

    (c) Estudar a complexidade do algoritmo acima.

23. Seja um grafo orientado $G = [N, A]$ representado por suas listas de sucessores, tal que $|N| = n$ e $|A| = m$. Escrever um algoritmo de complexidade mínima para converter esta representação para aquela por listas de predecessores. Discutir sua complexidade.

24. *(Coin change)* Seja $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um conjunto de valores diferentes de moedas. Suponha que moedas de cada um destes valores estejam disponíveis em quantidade ilimitada.

    (a) Escreva um algoritmo que, dado um valor x, determine o menor número de moedas que devem ser utilizadas para o troco exato de x. Discuta a complexidade e a otimalidade do algoritmo proposto.

    (b) Escreva um algoritmo que, dado um valor x, determine o número de possibilidades diferentes para trocar x em moedas deste conjunto.

25. Escrever um algoritmo para enumerar todas as permutações dos elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

26. Um grafo de intervalos é um grafo $G = [V, E]$ não orientado tal que cada nó de $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ corresponde a um intervalo fechado sobre os reais e que dois nós estão ligados por uma aresta se e somente se os intervalos correspondentes se interceptam. Descrever um algoritmo eficiente que permita obter um conjunto estável de cardinalidade máxima em G (sugestão: seja $I_1 = [s_1, t_1]$ o intervalo tal que $t_1 =$ mínimo $\{t_i \mid v_i \in V\}$. Mostrar que existe um conjunto estável de cardinalidade máxima que contem v_1).

27. As primeiras n posições de um vetor contem inteiros organizados em ordem crecente. As demais posições deste vetor contem inteiros muito grandes que podem ser considerados como infinito (por exemplo, `maxint` em Pascal). O vetor pode ser arbitrariamente grande (pode ser imaginado como infinito). O valor de n não é conhecido. Escreva um algoritmo de complexidade $O(\log n)$ para, dado um inteiro x, determinar sua posição neste vetor.

28. Uma mensagem confidencial deve circular entre n centros. A mensagem foi originada em um centro qualquer dentre os n. Seja $G = [V, E]$ o grafo não-orientado conexo cujos nós correspondem aos n centros e tal que existe uma aresta (i, j) entre os nós $i, j \in V$ se eles podem se comunicar diretamente. Seja p_{ij} a probabilidade de intercepção de uma mensagem na aresta (i, j). Como devem ser conectados estes centros entre si, de forma tal que esta mensagem possa circular sendo minimizada a probabilidade total de intercepção, com a hipótese de que a intercepção de mensagens em arestas diferentes são variáveis aleatórias independentes? Resolver numericamente o problema com os dados abaixo:

29. Uma empresa de mineração deseja otimizar a exploração de uma jazida estratiforme. Esta jazida é formada por um conjunto de n camadas superpostas, todas com a mesma espessura. O conteúdo de uma camada pode ser processado ou não. O custo de escavação da camada i é c_i, $i = 1, \ldots, n$. Se a camada i é processada, vende-se o minério nela contido por p_i, após incorrer em um custo de processamento igual a d_i. Conhece-se ainda a concentração α_i de minério na camada i, que só pode ser processada se sua concentração de minério for superior a um valor mínimo α_{min} conhecido. Deseja-se determinar quais camadas devem ser escavadas e quais camadas devem ser processadas, de modo a maximizar o lucro da empresa.

    (a) Proponha um algoritmos exato para este problema.

    (b) Formule e resolva o problema com os seguintes dados:
    $n = 6$
    $c = (10, 5, 20, 20, 15, 25)$
    $p = (10, 20, 30, 15, 35, 20)$
    $d = (5, 5, 5, 5, 5, 5)$
    $\alpha = (1, 3, 3, 1, 3, 1)$
    $\alpha_{min} = 1$

30. Descreva o algoritmo guloso para a solução da relaxação contínua do problema da mochila (caso de maximização) em variáveis 0-1 com uma única restrição (do tipo $\leq$) e demonstre formalmente sua otimalidade. Suponha os objetos ordenados em ordem decrescente de densidade valor/peso.