OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA

Primeira lista de exercícios
Data de entrega: 19 de outubro

---

1. Uma companhia deve entregar água em três locais S, D e P. A companhia tem estações fornecedoras em duas localidades A e B. No máximo 600 e 200 unidades podem ser fornecidas por cada uma destas estações, respectivamente. A estação A está conectada com os locais S e D por aquadutos de 10 e 15 quilômetros, respectivamente. A estação B está conectada com os locais P e D por aquadutos de 15 e 5 quilômetros, respectivamente. Além disso, os locais P e D estão conectados por uma estrada, que permite o transporte de água por caminhões. Os locais S, D e P têm demandas de 200, 350 e 150 unidades, respectivamente. O custo de transporte a partir das estações A e B é de \$ 0.01 e \$ 0.012 por unidade e por quilômetro, respectivamente. Além disso, o custo de transporte entre os locais P e D é de \$ 0.015 por unidade e por quilômetro. Formular como um problema de fluxo em redes e resolver numericamente utilizando um algoritmo estudado o problema de determinar a estratégia ótima de fornecimento de água.

2. Considere o seguinte problema de produção-transporte-estocagem. Uma empresa produz um mesmo produto em duas fábricas em cada um de dois períodos. Os custos unitários e os limites de produção variam de um período a outro e são fornecidos na tabela abaixo:

	Custo unitário		Limite	
	Período		Período	
Fábrica	1	2	1	2
1	\$ 25	\$ 35	6	2
2	\$ 30	\$ 42	10	9

O produto será encaminhado instantaneamente a duas localidades, para satisfazer suas demandas em cada período, conforme especificado a seguir:

	Período	
Localidade	1	2
A	3	1
B	5	4

Os custos unitários de transporte são os seguintes:

	Período 1		Período 2	
	Localidade		Localidade	
Fábrica	A	B	A	B
1	\$ 50	\$ 60	\$ 60	\$ 80
2	\$ 40	\$ 70	\$ 70	\$ 90

Finalmente, o produto pode ser estocado nas fábricas ou nas localidades, para satisfazer necessidades futuras de produção. Os custos unitários e as capacidades de estocagem são os seguintes:

	Fábrica		Localidade	
	1	2	A	B
Custo	\$ 1	\$ 2	\$ 3	\$ 4
Capacidade	2	3	1	3

Formular um modelo de fluxo em redes que permita resolver o problema de minimizar o custo total necessário para atender a demanda ao longo dos dois períodos.

3. Uma empresa de alimentação precisa de toalhas por um período de n dias. O número de toalhas necessários no dia j é $d_j, j = 1, \ldots, n$. Para atender esta demanda, esta empresa pode comprar toalhas novas (por a unidades monetárias cada um), ou usar toalhas utilizadas nos dias anteriores após terem sido lavados em uma lavanderia. A lavanderia oferece dois níveis de serviço. No serviço rápido, toalhas são retornadas q dias depois, a um custo unitário de b unidades monetárias. No serviço lento, toalhas são retornadas p dias depois, a um custo unitário de c unidades monetárias. Naturalmente, $p > q$ e $a > b > c$. O estoque inicial de toalhas é nulo. Formule como um modelo de fluxo em redes o problema de encontrar a estratégia ótima desta empresa para compra e lavagem de toalhas, satisfazendo a demanda e minimizando os custos com toalhas. A título de exemplo, exemplifique utilizando $n = 7$, $d = (100, 60, 50, 80, 100, 70, 80)$, $a = 20$, $b = 8$, $c = 4$, $p = 4$ e $q = 2$. Reformule o modelo considerando a possibilidade adicional de estocar toalhas sujas, adiando seu envio para a lavanderia.

4. Uma empresa aérea realiza um vôo que origina-se na cidade 1 e termina na cidade n, fazendo escalas nas cidades $2, 3, \ldots, n-2$ e $n-1$, nesta ordem. O número de assentos na aeronave que realiza este vôo é d. Para cada trecho $(i, j), i = 1, \ldots, n-1; j = i+1, \ldots, n$, são conhecidas a demanda b_{ij} por assentos e o preço c_{ij} da passagem. Formule como um modelo de fluxo em redes o problema de encontrar o número ótimo de passagens a serem vendidas para cada trecho, de modo a maximizar a receita da empresa.

5. Durante os próximos 5 meses, uma empresa tem uma demanda de 22, 28, 25, 35 e 18 unidades de um certo produto. O custo de produção é de \$ 7 por cada unidade produzida em horário normal e de \$ 10 por cada unidade produzida em horário extraordinário. O custo mensal de estocagem é de \$ 1 por unidade produzida em horário normal e de \$ 2 por unidade produzida em horário extraordinário. No máximo 20 unidades podem ser produzidas em horário normal e 8 unidades em horário extraordinário. Formule um modelo de fluxo em redes que permita determinar a quantidade ótima a ser produzida em cada mês, satisfazendo a demanda e minimizando o custo total.

6. Seja $S = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma seqüência de n números inteiros, da qual deseja-se extrair uma subseqüência $S' = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p})$ $(n \geq p \geq q > r \geq 1 \Rightarrow i_q > i_r)$ crescente $x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \ldots \leq x_{i_p}$ de peso $x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_p}$ máximo. Formule como um problema de fluxo em redes e resolva-o numericamente considerando $S = (50, 40, 30, 35, 38, 25, 28, 31, 15, 27, 41, 29, 37)$ e $n = 13$.

7. Considere um projeto composto por n atividades indexadas de 1 a n. Conhece-se o tempo de realização t_i de cada atividade $i = 1, \ldots, n$. Para cada atividade $i = 1, \ldots, n$, também

é conhecido o conjunto $P(i)$ de atividades predecessoras de i, isto é, atividades que devem ser terminadas para que i possa começar. Deseja-se determinar a menor duração possível deste projeto. Formule este problema através de um modelo de fluxo em redes, propondo um algoritmo para sua resolução. Aplique-o ao problema definido pelas 12 atividades que compõem a tabela que se segue.

Atividade	Duração	Predecessoras
1	1	-
2	4	-
3	7	1
4	3	1,2
5	8	3
6	7	3,4
7	6	4
8	2	6,7
9	3	2
10	3	4,9
11	3	6,7,10
12	2	5,8,11

Caso existam recursos recursos para reduzir em 2 dias alguma das atividades, excetuando-se a atividade 12, onde eles deveriam ser aplicados visando-se a redução do tempo de execução do projeto? Se, posteriormente, ainda existissem recursos para reduzir em 1 dia a duração de alguma atividade, excetuando-se a atividade 12, onde eles deveriam ser aplicados?

8. Cada um de n estudantes deve participar de um projeto dentre m propostos pelos professores. No máximo b_j estudantes podem participar do projeto j, ao qual está associado o conjunto P_j de professores que podem orientar sua execução. Há r professores disponíveis e conhece-se o número máximo q_k de alunos que o professor k pode orientar. Cada aluno dá uma nota de 1 a 5 a cada projeto (em ordem crescente de preferência). O objetivo consiste em alocar os estudantes aos projetos e professores, de modo a maximizar a satisfação total dos estudantes. Considerando $n = 6$, $m = 4$, $r = 4$, $P_1 = \{1, 2, 4\}$, $P_2 = \{3, 4\}$, $P_3 = \{1, 2, 3\}$ e $P_4 = \{1, 4\}$, formule este problema através de fluxos em redes.

9. Uma linha férrea liga a cidade A à cidade B, sendo utilizada por trens de carga e de passageiros. Os trens de passsageiros são prioritários e não podem ser reprogramados, sendo seus horários previamente preparados. Assim sendo, trens de carga devem estacionar em n pontos intermediários da rede entre A e B, cada vez que devem utilizar um trecho da linha que neste momento esteja sendo utilizado por um trem de psssageiros. São necessárias t_i unidades de tempo para um trem se deslocar do ponto de estacionamento i para o ponto $i + 1$. Analogamente, são necessárias t_0 unidades de tempo para ir de A até o primeiro estacionamento e t_n unidades de tempo para ir do n-ésimo estacionamento até a cidade B. Os valores t_i são números inteiros, $i = 0, 1, \ldots, n$. Também é conhecido o número n_i de trens que podem estacionar simultaneamente no ponto de estacionamento i. Trens de carga consecutivos podem ser despachados de A a um ritmo de um novo trem por unidade de tempo. Deseja-se realizar o planejamento da circulação de trens de carga para um período de 240 unidades de tempo consecutivas (por exemplo, um dia discretizado em intervalos de 10 minutos). O planejamento prévio dos horários dos trens de passageiros significa conhecer-se valores δ_{ij} tais que $\delta_{ij} = 1$ se um trem de carga pode partir do ponto de estacionamento i

na unidade de tempo j (ou seja, o ramo $(i, i+1)$ não estará sendo utilizado por um trem de passageiros na unidade de tempo j), $\delta_{ij} = 0$ caso contrário (portanto, os valores δ_{ij} são dados, e não variáveis). O objetvo do problema consiste em maximizar o número de trens de carga que poderão trafegar de A para B durante as 240 unidades de tempo, sem interferir com os horários dos trens de passgeiros. Formule este problema através de otimização em redes, esquematizando o grafo e os dados associados.

10. Seja $G = (N, E)$ um grafo não-orientado que representa uma rede de comunicações. A cada arco $(i, j) \in E$ está associada a probabilidade π_{ij} de ocorrer uma pane na conexão entre i e j, impedindo a comunicação por via direta entre estes dois pontos. Deseja-se determinar a rota mais segura para enviar uma mensagem da cidade 1 para a cidade n. Formular este problema através de um modelo de otimização em redes.

11. Um comerciante efetua três tipos de operação a cada mês $i = 1, \ldots, n$, envolvendo um mesmo produto:
(a) compra, a um custo unitário a_i;
(b) revenda, a um custo unitário b_i; e
(c) estocagem, a um custo unitário c_i.

    O estoque inicial é de e unidades deste produto. Cada unidade adquirida deve passar por um período de "quarentena", passando pelo menos um mês estocada no armazém. Por exemplo, uma unidade comprada no mês 1 só poderá ser vendida a partir do mês 2. A capacidade de estocagem do armazém é de d unidades mensais. No máximo p_i unidades estão disponíveis para compra a cada mês i junto aos fornecedores, $i = 1, \ldots, n$. O mercado tem capacidade de absorver mensalmente qualquer quantidade colocada à venda. Formule como um problema de otimização em redes a determinação da estratégia ótima de compras, estocagem e vendas desta empresa, considerando um horizonte de $n = 4$ meses.