Celso Carneiro Ribeiro

Introdução aos Modelos e Métodos de Otimização em Pesquisa Operacional

Parte I – Programação Linear

Operador Nacional do Sistema Elétrico

2004

Organização

- Parte I: Programação linear (5 aulas)
- Parte II: Programação inteira (5 aulas)
- Parte III: Heurísticas (4 aulas)
- Parte IV: Programação dinâmica (2 aulas)

Parte I – Programação linear

- Origens
- Motivação
- Formulação de problemas
- Solução gráfica
- Forma canônica
- Geometria da PL
- Método Simplex
- Dualidade
- Análise de sensibilidade
- Laboratório de programação linear

Origens

- Fourier (1827): método para resolver sistemas de inequações lineares considerado como o primeiro estudo de programação linear
- Kantorovich (1939): formulação de problemas de programação linear em alocação ótima de recursos em economias centralizadas
- Koopmans (1957): formulação de problemas de programação linear em economia
- Kantorovich e Koopmans receberam o prêmio Nobel de Economia em 1975.

Origens

- von Neumann (1928): relação entre teoria dos jogos e dualidade em programação linear
- II Guerra Mundial: formulação e solução de modelos de programação linear em problemas de planejamento de operações militares, envolvendo aprovisionamento de suprimentos, programação de manutenção e treinamento de pilotos, distribuição de navios pelas forças no Pacífico, localização de radares na costa da Inglaterra e a estratégia de caça aos U-boats no Mar Báltico
- "Pesquisa Operacional": Operations Research

Origens

- Dantzig (1947): descoberta do método Simplex para a solução de problemas de programação linear, coincidindo com o aparecimento dos primeiros computadores e viabilizando sua aplicação a problemas reais
- Hitchcock (1941): problema de transporte
- Kachian (1979): método do elipsóide (polinomial)
- Karmarkar (1984): método de pontos interiores

Origens

- Ford e Fulkerson, anos 50: fluxos em redes
  - Problema do caminho mais curto: dados um grafo (rede) e distâncias associadas a seus arcos, encontrar o caminho mais curto entre dois nós específicos (Dijkstra, Floyd, Belmann)
  - Problema do fluxo máximo: dados um grafo (rede) e capacidades associadas a seus arcos, encontrar o maior fluxo que pode ser enviado de um nó a outro
  - Problema de fluxo mínimo: dados um grafo (rede), capacidades e custos associados a seus arcos e ofertas e demandas associadas a seus nós, encontrar um fluxo de custo mínimo que satisfaça ofertas, demandas e restrições de capacidade

Origens

- Primeira tentativa de resolver o problema do caixeiro viajante (Dantzig, 1954): 49 cidades (Simplex + cortes)
- Gomory, anos 60: problemas de programação linear inteira (as variáveis só podem assumir valores inteiros)
- Anos 60: primeiros resolvedores de programação linear
- Atuais resolvedores podem tratar de forma exata problemas com algumas centenas de milhares de variáveis e restrições: XPRESS, CPLEX, LINDO, EXCEL, etc.
- Maior TSP resolvido atualmente: 15.112 cidades (110 processadores, 26 anos de processamento) http://www.math.princeton.edu/tsp/d15sol/

Bibliografia

- G. Dantzig, “Linear programming and extensions”, 1963
- V. Chvatal, “Linear progamming”, 1983
- M. Bazaraa, J. Jarvis e H. Sherali, “Linear programming and network flows”, 1990
- D. Bertsimas e J. Tsitsiklis, “Introduction to Linear Optimization”, 1997

- Transparências disponíveis em: http://www.inf.puc-rio.br/~celso/grupo_de_pesquisa.htm

Motivação

- Uma empresa produz dois tipos de fósforos. Esta empresa tem um lucro de 3 (x100 u.m.) em cada caixa de fósforos longos e de 2 (x100 u.m.) em cada caixa de fósforos curtos. Fósforos dos dois tipos são feitos por uma única máquina, que pode produzir 9 (x100.000) caixas de fósforos por ano. Para produzir e vender os fósforos, a empresa precisa de madeira e de caixas. São necessários 3 m^3 de madeira para cada caixa de fósforos longos e 1 m^3 de madeira para cada caixa de fósforos curtos.

Motivação

A empresa possui 18 (x100.000) m^3 de madeira para usar durante o próximo ano. Dispõe ainda de 7 (x100.000) caixas para fósforos longos e 6 (x100.000) caixas para fósforos curtos. A empresa deseja maximizar seus lucros com a venda de fósforos no próximo ano, sabendo que toda sua produção pode ser vendida.

- Como formular e resolver este problema através de um modelo matemático?

Motivação

- Variáveis de decisão:

  x_1: número de caixas (x100.000) de fósforos longos

  x_2: número de caixas (x100.000) de fósforos curtos

Motivação

- Objetivo da empresa:

  Lucro em uma caixa de fósforos longos = 3 (x100)

  Lucro em x_1 caixas de fósforos longos = 3 x_1 (x100)

  Lucro em x_2 caixas de fósforos curtos = 2 x_2 (x100)

  Lucro total a ser maximizado = $3\,x_1 + 2\,x_2$

  função objetivo

- A função objetivo sozinha define a programação da produção?

Motivação

- Restrições:

Capacidade máxima anual de produção da máquina:

$$x_1 + x_2 \leq 9 \qquad (x100.000)$$

Quantidade de madeira disponível:

$$3x_1 + x_2 \leq 18 \qquad (x100.000)$$

Número máximo de caixas disponíveis:

$$x_1 \leq 7 \qquad (x100.000)$$

$$x_2 \leq 6 \qquad (x100.000)$$

Não-negatividade: $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

Motivação

- Problema de programação linear:

$$\text{maximizar } 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{sujeito a :}$$

$$x_1 + x_2 \leq 9 \qquad \text{restrição (1)}$$

$$3x_1 + x_2 \leq 18 \qquad \text{restrição (2)}$$

$$x_1 \leq 7 \qquad \text{restrição (3)}$$

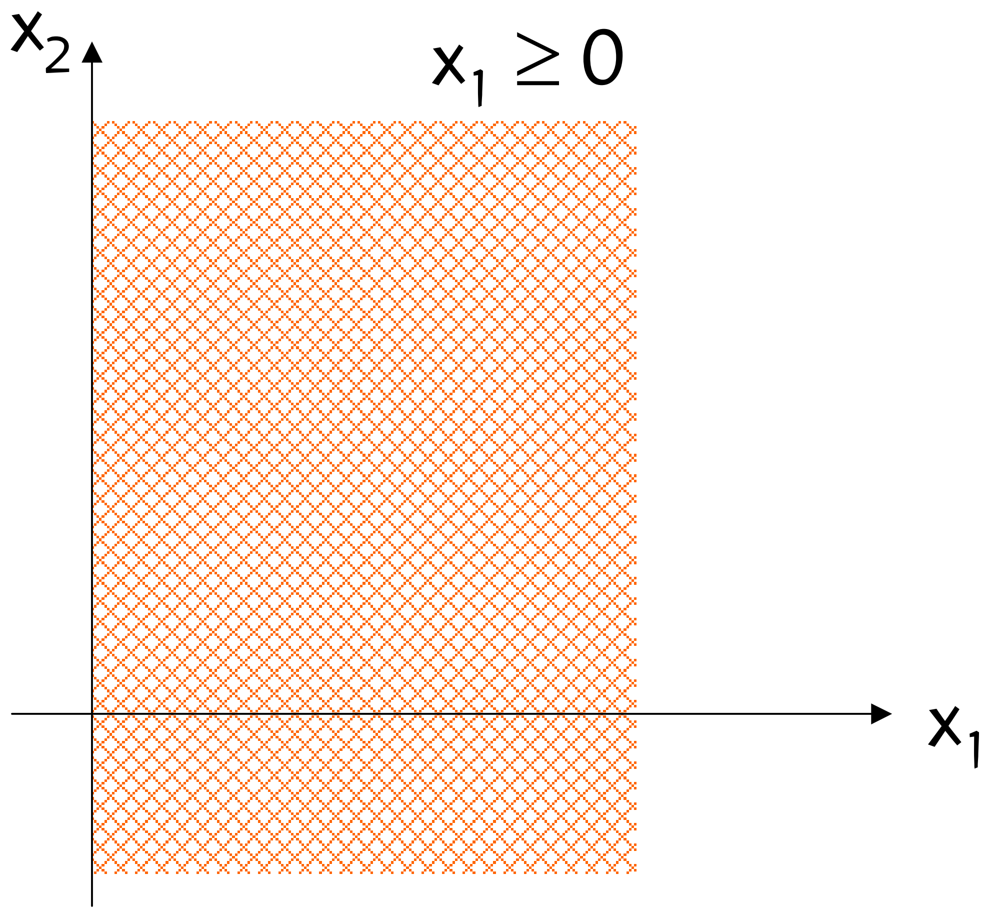
$$x_2 \leq 6 \qquad \text{restrição (4)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Programação linear: todas as relações entre variáveis são lineares (função objetivo e restrições)

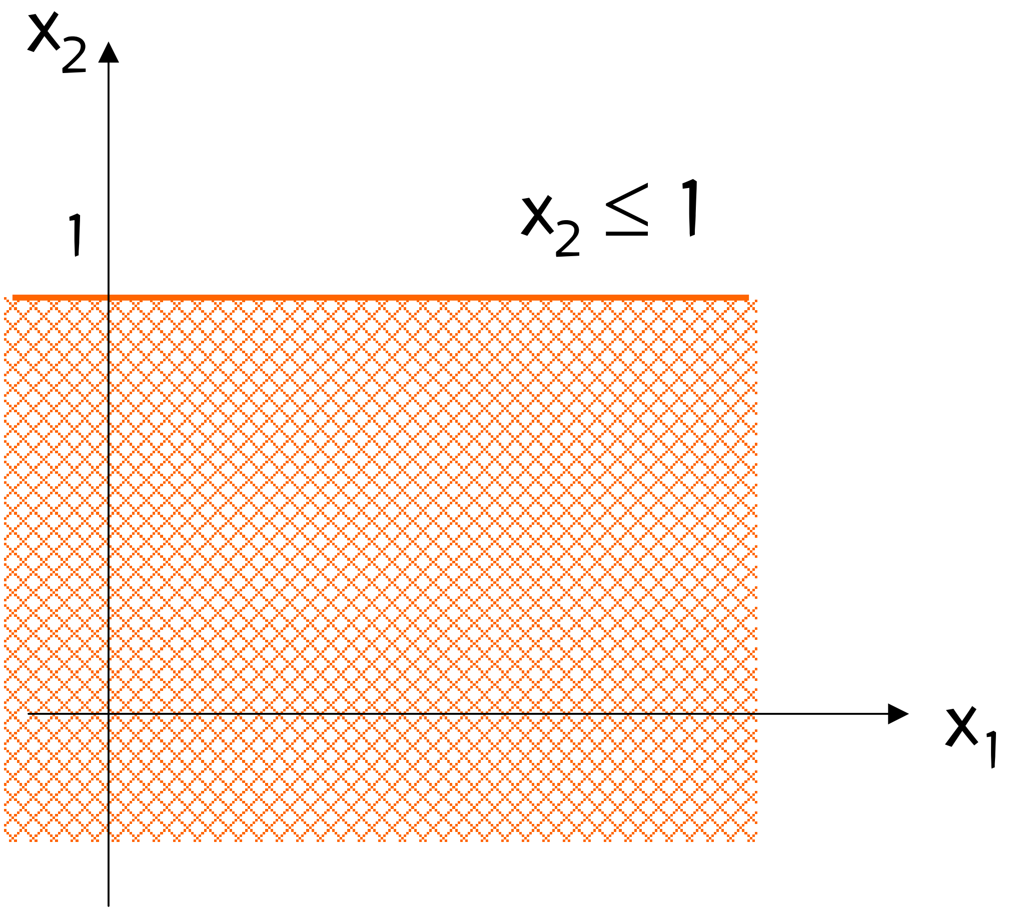
Motivação

- Como representar no plano uma desigualdade?



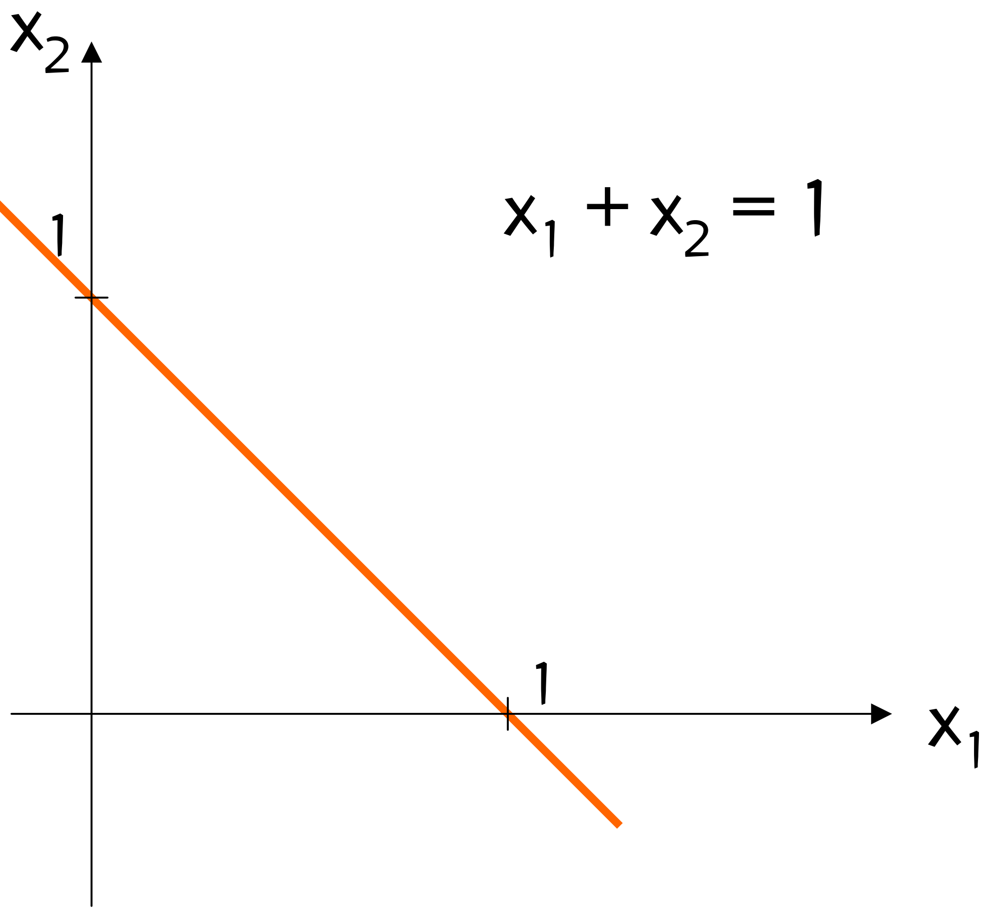
Motivação

- Como representar no plano uma desigualdade?



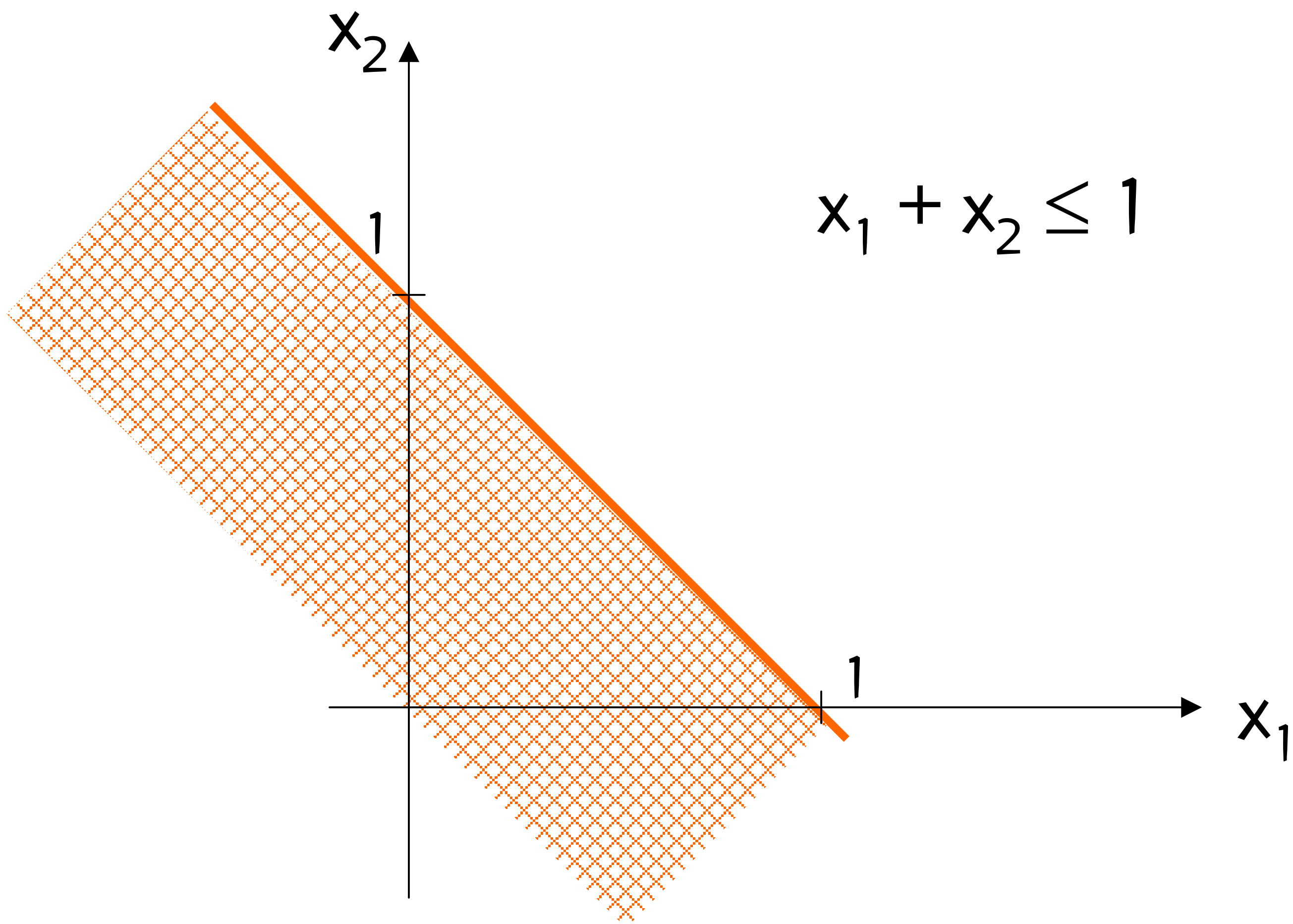
Motivação

- Como representar no plano uma igualdade?



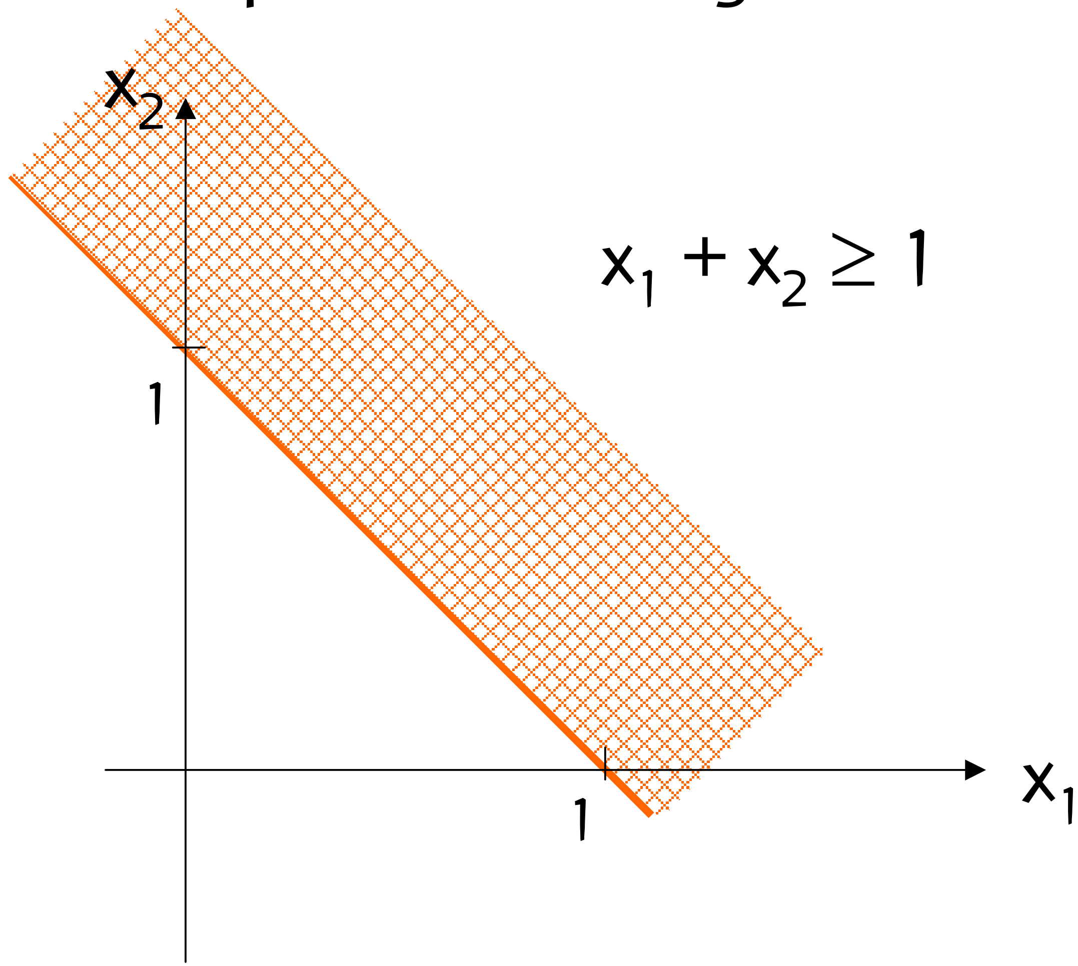
Motivação

- Como representar no plano uma desigualdade?



Motivação

- Como representar no plano uma desigualdade?

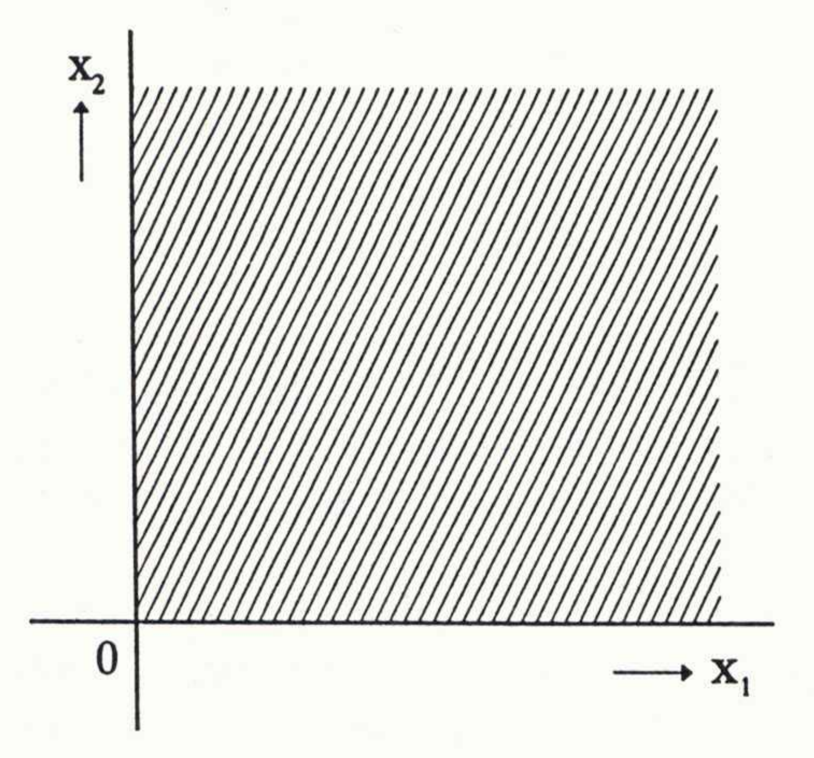


Motivação

- Como resolver aquele problema de programação linear?
- Resolver: determinar os valores ótimos das variáveis de decisão
- Solução gráfica: método mais simples para problemas com duas variáveis apenas
- Representar e tratar o problema no plano

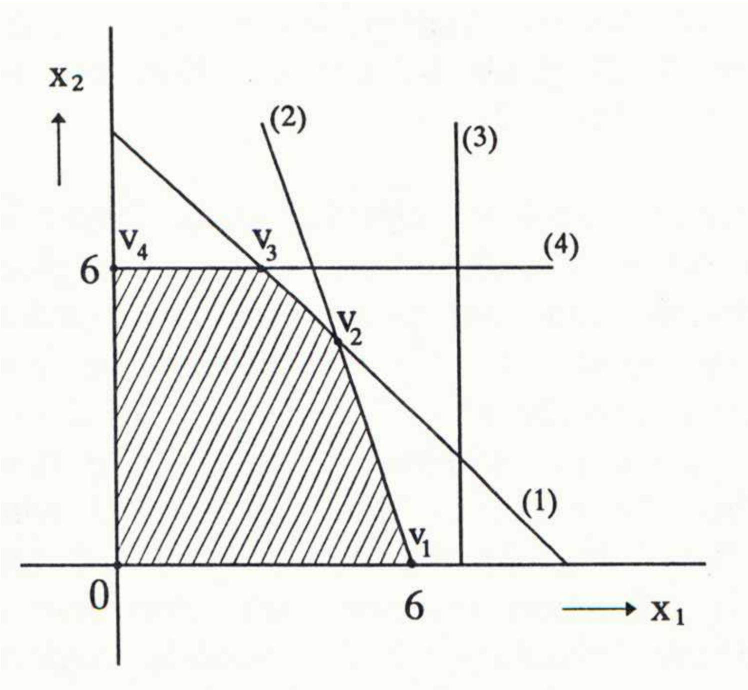
Motivação

- Restrições de não-negatividade:



Motivação

- Não-negatividade e restrições (1) a (4): região viável



maximizar $3x_1 + 2x_2$

sujeito a :

$x_1 + x_2 \leq 9$ restrição (1)

$3x_1 + x_2 \leq 18$ restrição (2)

$x_1 \leq 7$ restrição (3)

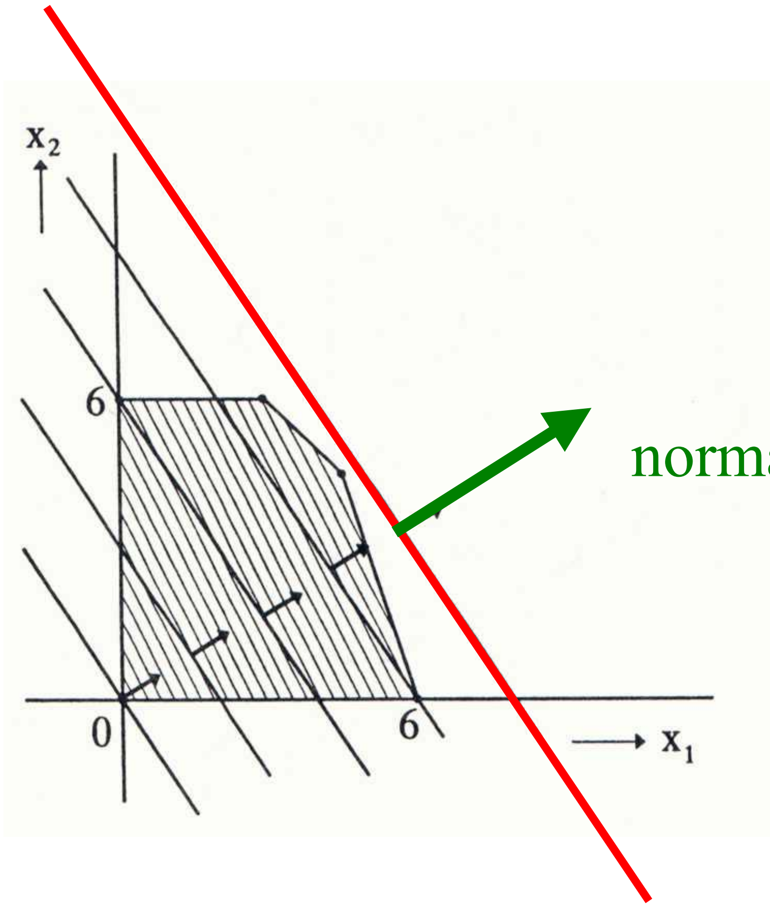
$x_2 \leq 6$ restrição (4)

$x_1, x_2 \geq 0$

A restrição (3) é desnecessária ou redundante.

Motivação

- Maximização da função objetivo:

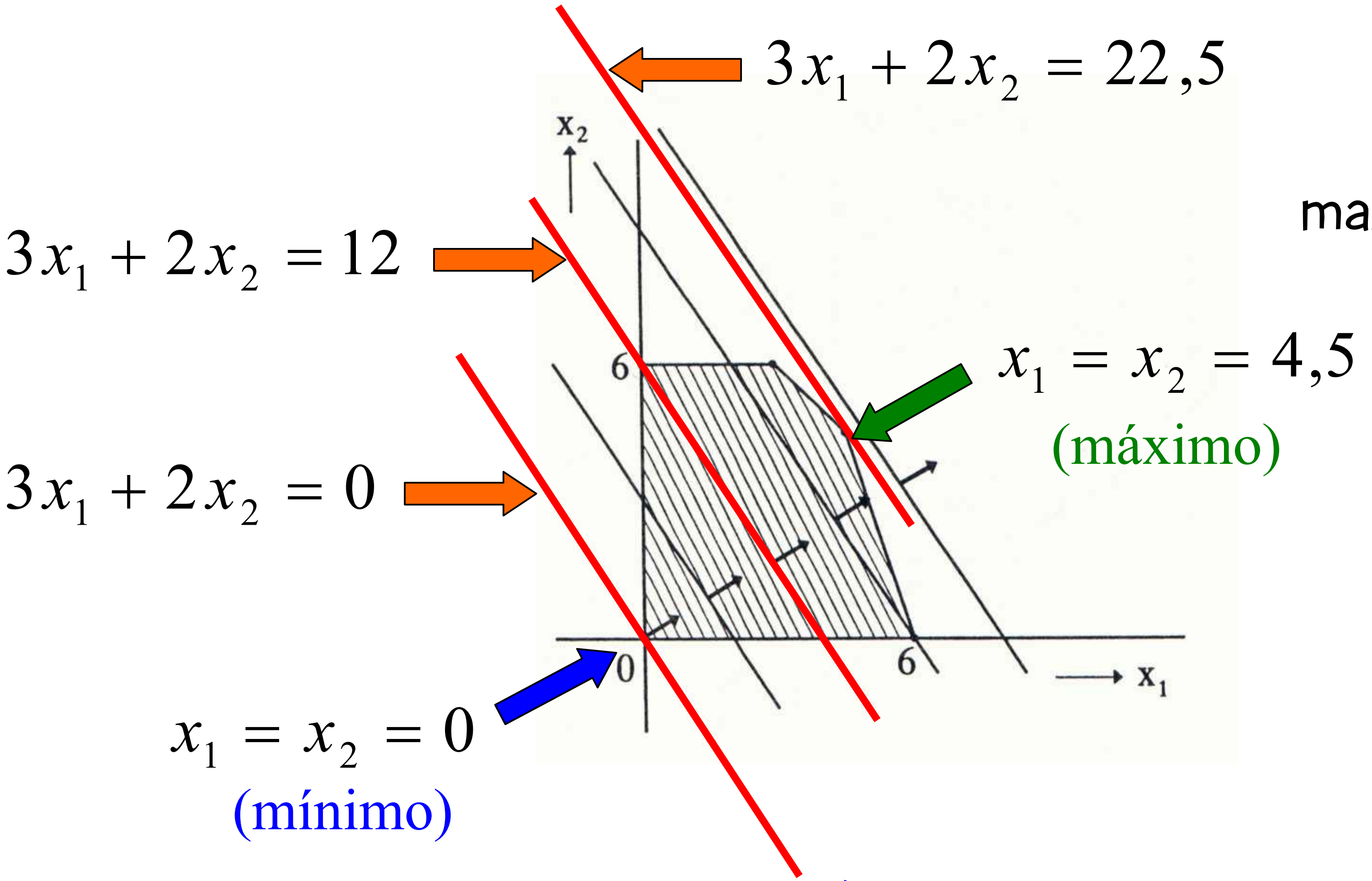


maximizar $3x_1 + 2x_2$

normal=(3,2)

Motivação

- Maximização da função objetivo:

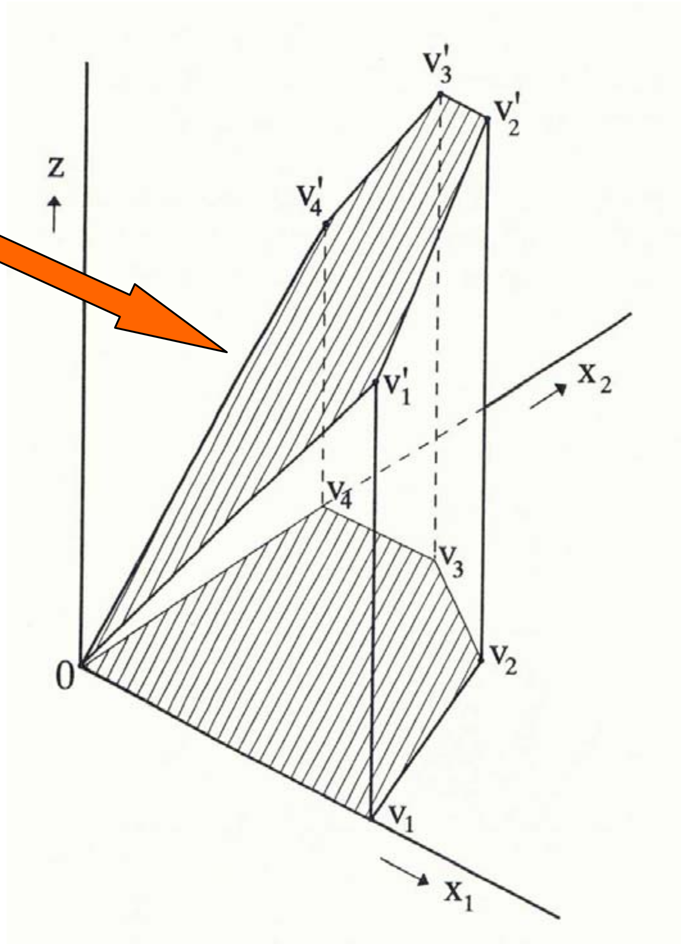


maximizar $3x_1 + 2x_2$

Motivação

- Visualização do modelo em três dimensões:

$z = 3x_1 + 2x_2$



Motivação

- Extensão do modelo com uma restrição adicional: devido a restrições contratuais, a empresa deve fornecer um mínimo de 5 (x100.000) caixas de fósforos no próximo ano.

$$x_1 + x_2 \geq 5 \qquad\qquad (x100.000)$$

Motivação

- Novo modelo de programação linear:

$$\text{maximizar } 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{sujeito a :}$$

$$x_1 + x_2 \leq 9 \qquad \text{restrição (1)}$$

$$3x_1 + x_2 \leq 18 \qquad \text{restrição (2)}$$

$$x_1 \leq 7 \qquad \text{restrição (3)}$$

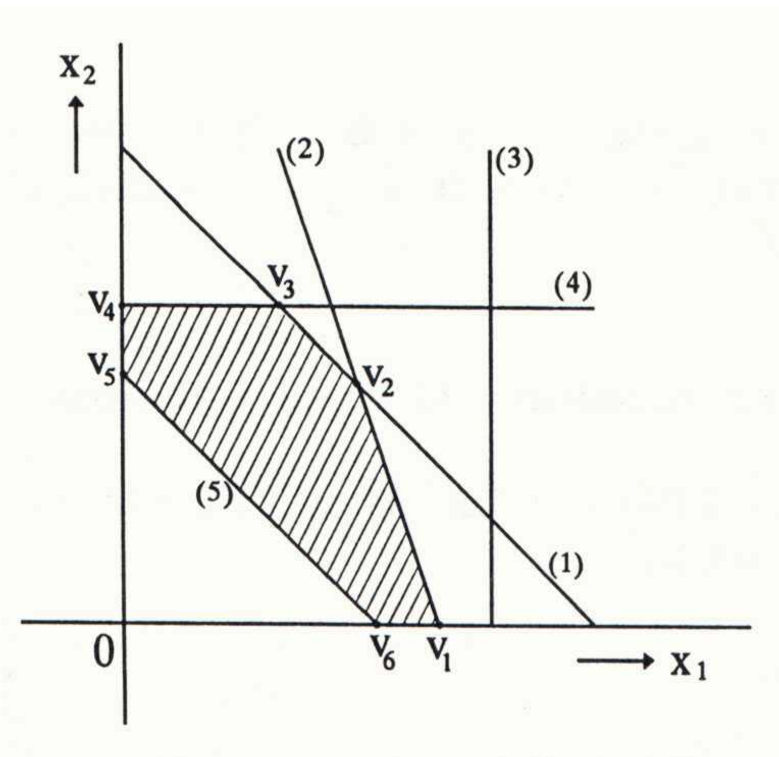
$$x_2 \leq 6 \qquad \text{restrição (4)}$$

$$x_1 + x_2 \geq 5 \qquad \text{restrição (5)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Motivação

- Nova região viável:



maximizar $3x_1 + 2x_2$

sujeito a :

$x_1 + x_2 \leq 9$ restrição (1)

$3x_1 + x_2 \leq 18$ restrição (2)

$x_1 \leq 7$ restrição (3)

$x_2 \leq 6$ restrição (4)

$x_1 + x_2 \geq 5$ restrição (5)

$x_1, x_2 \geq 0$

Formulação de problemas

- Princípios básicos da programação linear:
  - Proporcionalidade: se o valor de uma variável é multiplicado por uma constante, sua contribuição para a função objetivo e para cada restrição também é multiplicada por esta mesma constante.
  - Aditividade: o custo total é a soma dos custos individuais, assim como o valor total de uma restrição é a soma dos valores individuais de cada atividade.
  - Divisibilidade: o valor de cada variável pode assumir qualquer valor fracionário.

Formulação de problemas

- (I) Problema das ligas metálicas: Uma metalúrgica deseja maximizar sua receita bruta. A tabela a seguir ilustra a proporção de cada material na mistura para a obtenção das ligas passíveis de fabricação, assim como a disponibilidade de cada matéria prima (em toneladas) e os preços de venda por tonelada de cada liga. Qual deve ser a quantidade produzida de cada liga?

Formulação de problemas

	Liga 1	Liga 2	Disponibilidade
Cobre	0,5	0,2	16 ton.
Zinco	0,25	0,3	11 ton.
Chumbo	0,25	0,5	15 ton.
Preço	3.000	5.000	

Formulação de problemas

- Variáveis de decisão:

  x_1: quantidade produzida da liga 1 (em toneladas)

  x_2: quantidade produzida da liga 2 (em toneladas)

Formulação de problemas

- Função objetivo:

$$\text{maximizar } 3.000\ x_1 + 5.000\ x_2$$

- Disponibilidade das matérias primas:

$0{,}5\ x_1 + 0{,}2\ x_2 \leq 16$ cobre

$0{,}25\ x_1 + 0{,}3\ x_2 \leq 11$ zinco

$0{,}25\ x_1 + 0{,}5\ x_2 \leq 15$ chumbo

- Todas as quantidades produzidas são não-negativas:

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

Formulação de problemas

- (II) <u>Problema da dieta</u>: Este problema tem diversas versões, aborda-se aqui a mais simples. Suponha que uma dieta alimentar está restrita a leite desnatado, carne magra, peixe e salada verde. Os requisitos nutricionais são expressos em quantidades mínimas (em miligramas) das vitaminas A, C e D. A tabela a seguir resume a quantidade disponível de cada vitamina em cada alimento, a necessidade diária de cada vitamina e o custo de cada alimento. Determine uma dieta de custo mínimo que satisfaça as necessidades alimentares.

Formulação de problemas

Vitamina	Leite (litro)	Carne (kg)	Peixe (kg)	Salada (100g)	Requisito mínimo
A	2 mg	2 mg	10 mg	20 mg	11 mg
C	50 mg	20 mg	10 mg	30 mg	70 mg
D	80 mg	70 mg	10 mg	80 mg	250 mg
Custo	2	4	1,5	1	

(slide 178)

Formulação de problemas

- Variáveis de decisão:

  x_i: quantidade ingerida do alimento $i \in \{l, c, p, s\}$

- Função objetivo:

  minimizar $2\, x_l + 4\, x_c + 1{,}5\, x_p + x_s$

- Restrições:

  $2\, x_l + 2\, x_c + 10\, x_p + 20\, x_s \geq 11$

  $50\, x_l + 20\, x_c + 10\, x_p + 30\, x_s \geq 70$

  $80\, x_l + 70\, x_c + 10\, x_p + 80\, x_s \geq 250$

  $x_l, x_c, x_p, x_s \geq 0$

Formulação de problemas

- (III) <u>Problema de capitalização de investimentos</u>: Um projeto de construção estadual exige recursos financeiros ao longo dos próximos quatro anos de 2 milhões, 4 milhões, 8 milhões e 5 milhões, respectivamente. Assume-se que todos os recursos são necessários e recebidos no início do ano. A administração estadual decide vender bônus para cobrir as demandas anuais de recursos. Todos estes bônus serão resgatados numa certa data futura distante, independentemente da data de sua emissão. As taxas anuais de juros projetadas para os próximos quatro anos são 7%, 6%, 6,5% e 7,5%, respectivamente.

Formulação de problemas

O pagamento dos juros começa um ano após o fim do projeto e continua ao longo de 20 anos, quando os bônus são resgatados. Durante este período, as taxas de juros a curto prazo (o que a administração pode receber sobre depósitos) são estimadas em 6%, 5,5% e 4,5% (a administração não pretende investir em depósitos de curto prazo ao longo do quarto ano). Qual deve ser a estratégia ótima da administração para vender bônus e fazer depósitos de curto prazo para poder completar seu projeto de construção?

Formulação de problemas

- Variáveis de decisão:

  x_i: valor dos bônus vendidos no início do ano i=1,...,4

  Quando bônus são vendidos, uma parte dos recursos apurados são aplicados em depósitos de curto prazo para serem usados nos anos seguintes, enquanto o restante é usado no projeto de construção.

  y_i: valor aplicado em depósito de curto prazo no início do ano i=1,...,3

Formulação de problemas

- Restrições:

A diferença entre o valor apurado com a venda de bônus no ano 1 e o valor aplicado em depósito de curto pazo neste ano deve ser suficiente para cobrir os recursos necessários para o projeto neste ano:

$$x_1 - y_1 \geq 2$$

Esta restrição é equivalente à igualdade

$$x_1 - y_1 = 2,$$

já que sobras de recursos serão sempre aplicadas em depósitos de curto prazo.

Formulação de problemas

Considera-se agora o início do segundo ano. Além dos bônus vendidos e dos depósitos de curto prazo efetuados, deve-se considerar o resgate e os juros do depósito de curto prazo efetuado no ano 1:

$$1{,}06y_1 + x_2 - y_2 = 4$$

Nos anos seguintes:

$$1{,}055y_2 + x_3 - y_3 = 8$$

$$1{,}045y_3 + x_4 = 5$$

Restrições de não-negatividade: $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2 \geq 0$

Formulação de problemas

- Objetivo da administração: desconsiderando-se a taxa de inflação a cada ano, minimizar o valor total pago de juros ao longo dos 20 anos subseqüentes a cada venda de bônus

  Juros dos bônus vendidos no ano 1: $20 \times 0{,}07\ x_1$

  Juros dos bônus vendidos no ano 2: $20 \times 0{,}06\ x_2$

  Juros dos bônus vendidos no ano 3: $20 \times 0{,}065\ x_3$

  Juros dos bônus vendidos no ano 4: $20 \times 0{,}075\ x_4$

Formulação de problemas

- Modelo de programação linear completo:

$$\text{minimizar } 20(0{,}07)x_1 + 20(0{,}06)x_2 + 20(0{,}065)x_3 + 20(0{,}075)x_4$$

$$\text{sujeito a :}$$

$$x_1 - y_1 = 2$$

$$1{,}06\,y_1 + x_2 - y_2 = 4$$

$$1{,}055\,y_2 + x_3 - y_3 = 8$$

$$1{,}045\,y_3 + x_4 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Formulação de problemas

- (IV) <u>Problema de planejamento da produção</u>: Uma empresa fabrica n produtos usando m matérias primas. Seja b_i a quantidade disponível da matéria prima i=1,...,m. Cada unidade do produto j=1,...,n requer a_{ij} unidades da matéria prima i=1,...,m para sua produção e resulta em um lucro c_j por unidade produzida. Qual deve ser a quantidade produzida de cada produto de forma a maximizar o lucro da empresa?
- Variáveis de decisão:

  x_j: quantidade produzida do produto j=1,...,n

Formulação de problemas

- Modelo:

$$\text{maximizar } c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\text{sujeito a:}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\ldots$$

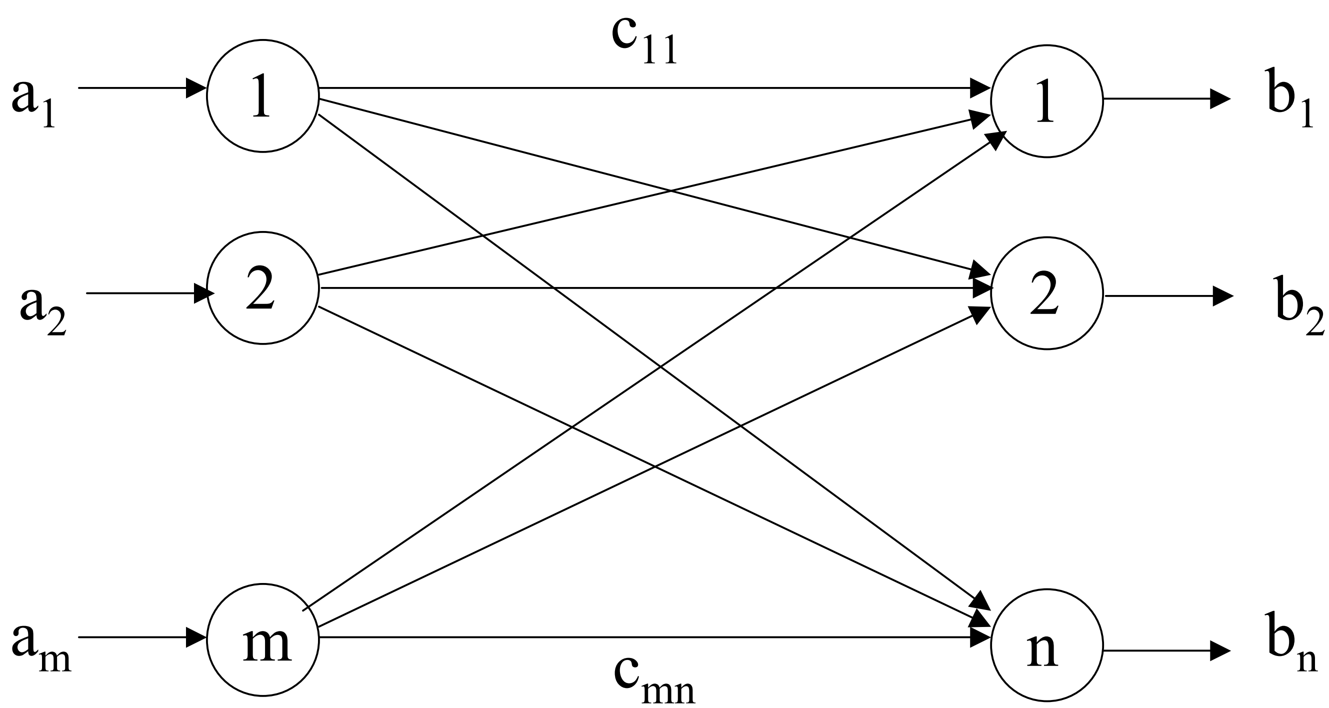
$$a_m x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Formulação de problemas

- (V) <u>Problema de transporte</u>: Uma empresa produz um determinado produto em m fábricas distintas e afastadas, para atender a demanda de n cidades diferentes. A capacidade de produção da fábrica i é no máximo igual a a_i, $i=1,\ldots,m$. A demanda da cidade j é igual a b_j, $j=1,\ldots,n$. Sabendo-se que o custo de envio de uma unidade do produto da fábrica i para a cidade j é igual a c_{ij}, determinar a quantidade que deve ser enviada de cada fábrica para cada cidade, de modo a minimizar os custos de transporte desta empresa.

Formulação de problemas



- Variáveis de decisão:

  x_{ij}: quantidade enviada da fábrica i para a cidade j

Formulação de problemas

- Modelo:

$$\text{minimizar } c_{11}x_{11} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + \ldots + c_{mn}x_{mn}$$

sujeito a:

$$x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} \le a_1$$

$$\ldots$$

$$x_{\mathrm{m}1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} \le a_m$$

$$\ldots$$

$$x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1$$

$$\ldots$$

$$x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad i = 1,\ldots,m; \;\; j = 1,\ldots,n$$

Formulação de problemas

- (VI) Problema de planejamento de capacidade: Um estado deseja fazer seu planejamento de capacidade instalada. A previsão de demanda de capacidade é igual a d_t MW para cada ano $t=1,\ldots,T$. A capacidade existente em usinas a óleo e que estará disponível em cada ano $t=1,\ldots,T$ é igual a e_t. Há duas alternativas possíveis para a expansão de capacidade: usinas nucleares e usinas a carvão. Há um custo de capital igual a c_t por MW de usinas a carvão que tornam-se disponíveis no ano t. O custo de capital correspondente para usinas nucleares é n_t. A capacidade

Formulação de problemas

em usinas nucleares não pode ser superior a 20% da capacidade total instalada. Usinas a carvão têm vida útil de 20 anos, enquanto usinas nucleares têm vida útl de 15 anos. Deseja-se planejar a expansão de custo mínimo.

- Variáveis de decisão:

x_t: capacidade instalada em usinas a carvão disponibilizada no início do ano t

y_t: capacidade instalada em usinas nucleares disponibilizada no início do ano t

Formulação de problemas

- Função objetivo: custo da expansão de capacidade:

$$\text{minimizar} \sum_{t=1}^{T} (c_t x_t + n_t y_t)$$

- Capacidade instalada em usinas a carvão disponibilizada no início do ano t=1,...,T:

$$w_t = \sum_{s=\max\{1,t-19\}}^{t} x_s$$

- Capacidade instalada em usinas nucleares disponibilizada no início do ano t=1,...,T:

$$z_t = \sum_{s=\max\{1,t-14\}}^{t} y_s$$

Formulação de problemas

- Atendimento à demanda no ano t=1,...,T:

$$w_t + z_t + e_t \geq d_t$$

- Fração da capacidade instalada em nucleares no ano t=1,...,T:

$$\frac{z_t}{w_t + z_t + e_t} \leq 0{,}2$$

$$0{,}8z_t - 0{,}2w_t - 0{,}2e_t \leq 0$$

Formulação de problemas

- Modelo:

$$\text{minimizar} \sum_{t=1}^{T} (c_t x_t + n_t y_t)$$

$$w_t - \sum_{s=\max\{1,t-19\}}^{t} x_s = 0 \qquad t = 1,\dots,T$$

$$z_t - \sum_{s=\max\{1,t-14\}}^{t} y_s = 0 \qquad t = 1,\dots,T$$

$$w_t + z_t \geq d_t - e_t \qquad t = 1,\dots,T$$

$$0{,}8 z_t - 0{,}2 w_t \leq 0{,}2 e_t \qquad t = 1,\dots,T$$

$$x_t, y_t \geq 0 \qquad t = 1,\dots,T$$

Formulação de problemas

- (VII) Problema de plantio: Uma cooperativa agrícola opera três fazendas. A produção total de cada fazenda depende da área disponível para o plantio e da água para irrigação. A cooperativa procura diversificar sua produção e vai plantar este ano três culturas em cada fazenda: milho, arroz e feijão. Cada cultura demanda uma certa quantidade de água. São estabelecidos limites de área plantada para cada cultura. Para evitar concorrência entre os cooperados, acordou-se que a proporção de área cultivada seja a mesma para cada fazenda. Determinar a área plantada de cada cultura em cada fazenda de modo a otimizar o lucro da cooperativa.

Formulação de problemas

Fazenda	Área (acres)	Água (litros)
1	400	1.800
2	650	2.200
3	350	950

Cultura	Área máx. (acres)	Agua (litros por acre)	Lucro (por acre)
Milho	660	5,5	5.000
Arroz	880	4	4.000
Feijão	400	3,5	1.800

Formulação de problemas

- Variáveis de decisão:

  x_{ij}: área da fazenda i=1,2,3 destinada ao plantio da cultura j $\in \{m, a, f\}$

- Função objetivo:

  maximizar $5.000\ (x_{1m} + x_{2m} + x_{3m}) + 4.000\ (x_{1a} + x_{2a} + x_{3a}) + 1.800\ (x_{1f} + x_{2f} + x_{3f})$

- Restrições de não-negatividade:

  $x_{im}, x_{ia}, x_{if} \geq 0, \quad i=1,2,3$

Formulação de problemas

- Restrições associadas à área de cultivo:

$$x_{1m} + x_{1a} + x_{1f} \leq 400$$

$$x_{2m} + x_{2a} + x_{2f} \leq 650$$

$$x_{3m} + x_{3a} + x_{3f} \leq 350$$

- Restrições associadas ao consumo de água:

$$5{,}5\ x_{1m} + 4\ x_{1a} + 3{,}5\ x_{1f} \leq 1.800$$

$$5{,}5\ x_{2m} + 4\ x_{2a} + 3{,}5\ x_{2f} \leq 2.200$$

$$5{,}5\ x_{3m} + 4\ x_{3a} + 3{,}5\ x_{3f} \leq 950$$

Formulação de problemas

- Restrições associadas ao plantio por cultura:

$$x_{1m} + x_{2m} + x_{3m} \leq 660$$

$$x_{1a} + x_{2a} + x_{3a} \leq 880$$

$$x_{1f} + x_{2f} + x_{3f} \leq 400$$

- Restrições associadas à proporção de área cultivada:

$$(x_{1m} + x_{1a} + x_{if})/400 = (x_{2m} + x_{2a} + x_{2f})/650$$

$$(x_{2m} + x_{2a} + x_{2f})/650 = (x_{3m} + x_{3a} + x_{3f})/350$$

Formulação de problemas

- (VIII) Problema da mistura de petróleos: Uma refinaria processa vários tipos de petróleo. Cada tipo de petróleo possui uma planilha de custos diferentes, expressando condições de transporte e preços na origem. Cada tipo de petróleo representa uma configuração diferente de subprodutos para a gasolina. Na medida em que cada tipo de petróleo é utilizado na mistura para produção de gasolina, é possível programar a octanagem e outros requisitos de cada tipo de gasolina produzida. Estes requisitos definem o tipo de gasolina obtida.

Formulação de problemas

Supondo-se que a refinaria utiliza quatro tipos de petróleo e deseja produzir três tipos de gasolina (amarela, azul e super), programar a mistura dos tipos de petróleo de modo a maximizar o lucro obtido (diferença entre as vendas e o custo de petróleo).

- Variáveis de decisão:

  x_{ij}: quantidade de barris de petróleo do tipo $j=1,2,3,4$ destinados à produção de gasolina do tipo $i=1,2,3$

Formulação de problemas

Petróleo	Disponibilidade (barris/dia)	Custo (barril/dia)
1	3.500	19
2	2.200	24
3	4.200	20
4	1.800	27

Formulação de problemas

Gasolina	Especificações	Preço (por barril)
Super (1)	Não mais que 30% do petróleo (1) Não menos que 40% do petróleo (2) Não mais que 50% do petróleo (3)	35
Azul (2)	Não mais que 30% do petróleo (1) Não menos que 10% do petróleo (2)	28
Amarela (3)	Não mais que 70% do petróleo (1)	22

Formulação de problemas

- Função objetivo:

  maximizar $35\,(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}) + 28\,(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}) + 22\,(x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}) - 19\,(x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 24\,(x_{12} + x_{22} + x_{32}) - 20\,(x_{13} + x_{23} + x_{33}) - 27\,(x_{14} + x_{24} + x_{34})$

- Restrições associadas à quantidade de petróleo disponível:

  $x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 3.500$

  $x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 2.200$

  $x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 4.200$

  $x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq 1.800$

Formulação de problemas

- Restrições associadas às especificações da mistura:

$x_{11} \leq 0.3\ (x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14})$ gasolina super

$x_{12} \geq 0.4\ (x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14})$

$x_{13} \leq 0.5\ (x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14})$

$x_{21} \leq 0.3\ (x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24})$ gasolina azul

$x_{22} \geq 0.1\ (x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24})$

$x_{31} \leq 0.7\ (x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34})$ gasolina amarela

- Restrições de não-negatividade:

$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,3;\ j=1,2,3,4$

Formulação de problemas

- O que muda na formulação do problema anterior se a obtenção de gasolina não tratar-se simplesmente de uma mistura, mas que ainda exista um fator tecnológico a_{ij} que indique o número de barris de gasolina do tipo i=1,2,3 obtidos a partir de cada barril de petróleo do tipo j=1,2,3,4 utilizado na mistura?
- Função objetivo:

$$\text{maximizar } 35\,(a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + a_{13}x_{13} + a_{14}x_{14}) + 28\,(a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{23} + a_{24}x_{24}) + 22\,(a_{31}x_{31} + a_{32}x_{32} + a_{33}x_{33} + a_{34}x_{34}) - 19\,(x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 24\,(x_{12} + x_{22} + x_{32}) - 20\,(x_{13} + x_{23} + x_{33}) - 27\,(x_{14} + x_{24} + x_{34})$$

Formulação de problemas

- (IX) Problema de corte linear: Uma fábrica necessita cortar uma fita de aço de 12 cm de largura em tiras de 2,4 cm, 3,4 cm e 4,5 cm de largura. As necessidades globais de tiras de cada comprimento são as seguintes:

Tipo	Largura (cm)	Demanda (m)
1	2,4	2500
2	3,4	4500
3	4,5	8000

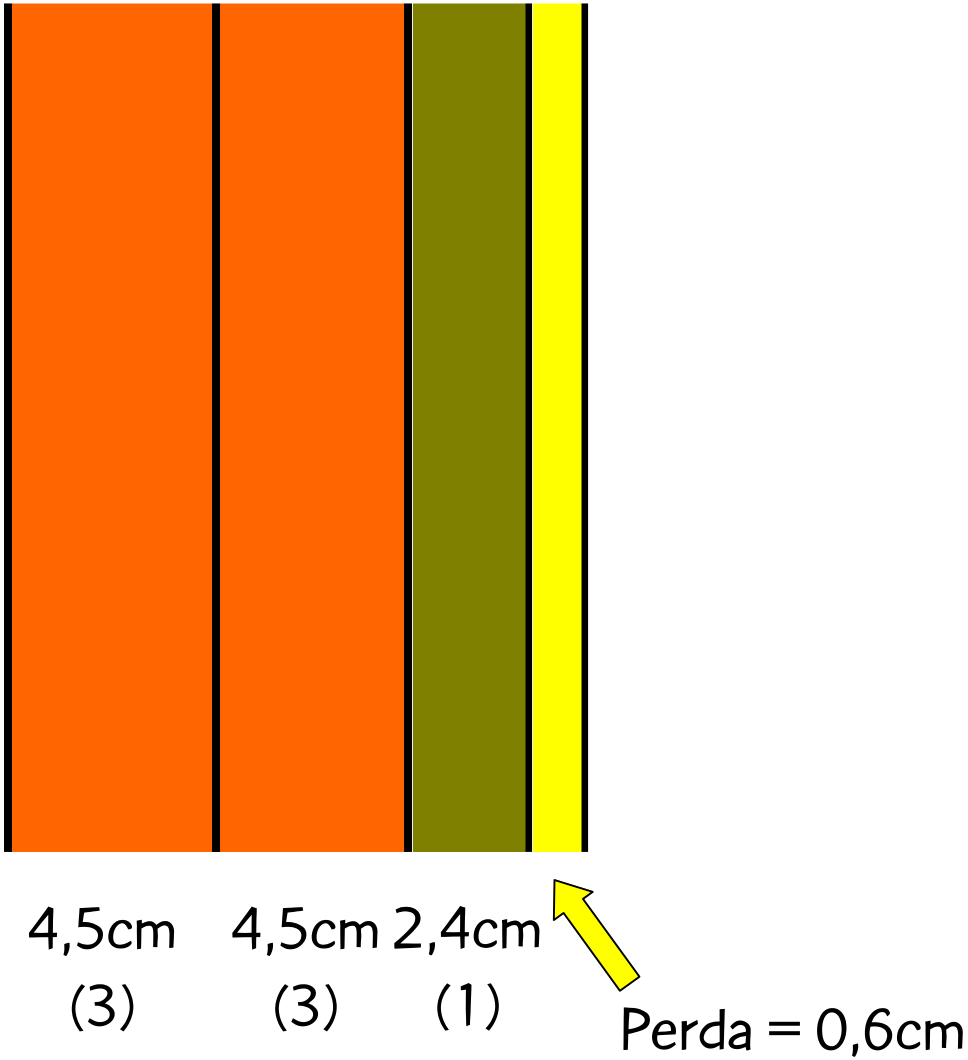
Formulação de problemas

Formule um modelo que permita otimizar o consumo da fita a ser cortada, minimizando a perda de material.

Padrão	Tiras 1	Tiras 2	Tiras 3	Perda (cm)
1	5	0	0	0
2	3	1	0	1,4
3	3	0	1	0,3
4	2	2	0	0,4
5	1	0	2	0,6
6	0	3	0	1,8
7	0	2	1	0,7

Formulação de problemas

- Exemplo: Padrão 5



Formulação de problemas

- Variáveis de decisão:

  x_i: comprimento cortado segundo o padrão i=1,...,7

- Restrições de demanda por tipo de fita:

$5\,x_1 + 3\,x_2 + 3\,x_3 + 2\,x_4 + x_5 \geq 2500$	tipo 1
$x_2 + 2\,x_4 + 3\,x_6 + 2\,x_7 \geq 4500$	tipo 2
$x_3 + 2\,x_5 + x_7 \geq 8000$	tipo 3

Formulação de problemas

- Função objetivo:

perdas por sobras + perdas por fitas desnecessárias

minimizar $1{,}4\ x_2 + 0{,}3\ x_3 + 0{,}4\ x_4 + 0{,}6\ x_5 + 1{,}8\ x_6 + 0{,}7\ x_7 +$

$+ 2{,}4\ (5\ x_1 + 3\ x_2 + 3\ x_3 + 2\ x_4 + x_5 - 2500) +$

$+ 3{,}4\ (x_2 + 2\ x_4 + 3\ x_6 + 2\ x_7 - 4500) +$

$+ 4{,}5\ (x_3 + 2\ x_5 + x_7 - 8000)$

ou

comprimento total cortado

minimizar $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$

Formulação de problemas

- (X) Problema de escalonamento de horários: Um hospital deseja planejar os horários das enfermeiras de seu turno da noite. A demanda por enfermeiras no turno da noite no dia $j=1,\ldots,7$ da semana é um número inteiro d_j. Cada enfermeira trabalha cinco dias consecutivos e descansa nos dois dias seguintes. O objetivo consiste em minimizar o número de enfermeiras contratadas.
- Variáveis de decisão:

  x_j: número de enfermeiras que começam seu horário no dia $j=1,\ldots,7$

Formulação de problemas

- Modelo:

$$\text{minimizar } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

sujeito a :

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq d_1$$
$$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq d_2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq d_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq d_4$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq d_5$$
$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq d_6$$
$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq d_7$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \text{ inteiros}$$

Problema de programação linear inteira: seu valor ótimo é superior ao do problema linear associado, pois contém restrições adicionais (todas as variáveis devem assumir valores inteiros).

O número de enfermeiras nunca pode ser fracionário!

Formulação de problemas

- (XI) Problema da mochila: Um viajante dispõe de n itens que deve selecionar para colocar em uma mochila que está sendo preparada para uma viagem. O peso do item j é igual a_j e o “lucro” obtido caso ele seja selecionado e colocado na mochila é igual a c_j, para $j=1,\ldots,n$. Quais itens devem ser selecionados, sabendo-se que o peso máximo que o viajante pode carregar na mochila é igual a b?
- Variáveis de decisão:

  x_j: quantidade selecionada do item j

Formulação de problemas

- Caso (1): os itens podem ser fracionados e não há limite na quantidade selecionada

$$\text{maximizar} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{sujeito a}: \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots,n$$

- Problema de programação linear
- Solução trivial?
- Selecionar o item j* cuja razão c_j/a_j é máxima e fazer $x_{j*}=b/a_{j*}$, $x_j = 0$ para os demais.

Formulação de problemas

- Caso (2): os itens podem ser fracionados e no máximo uma unidade de cada item pode ser selecionada

$$\text{maximizar} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{sujeito a:} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

$$1 \geq x_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots,n$$

- Problema de programação linear
- Solução trivial?
- Ordenar os itens pela razão c_j/a_j e fazer $x_j=1$ enquanto couber, fracionar o objeto seguinte e fazer $x_j = 0$ para os demais.

Formulação de problemas

- Exemplo:

$$\text{maximizar } 6x_1 + 8x_2 + 4x_3 + x_4$$
$$\text{sujeito a}: x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4$$
$$1 \geq x_j \geq 0, \qquad \text{j} = 1,2,3,4$$

- Maior razão: $c_1/a_1 = 6/1 = 6 \Rightarrow x_1 = 1$
- Segunda maior razão: $c_2/a_2 = 8/2 = 4 \Rightarrow x_2 = 1$
- Terceira maior razão: $c_3/a_3 = 4/2 = 2 \Rightarrow x_3 = 0{,}5$
- $x_4 = 0$

Formulação de problemas

- Caso (3): os itens não podem ser fracionados e no máximo uma unidade de cada item pode ser selecionada

$$\text{maximizar} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{sujeito a:} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,\dots,n$$

- Problema de programação inteira
- Solução trivial?

  Não!!!

Formulação de problemas

- Exemplo:

$$\text{maximizar } 12x_1 + 7x_2 + 6x_3$$

$$\text{sujeito a}: 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 4$$

$$x_j \in \{0,1\}, \qquad j = 1,2,3$$

- Maior razão: $c_1/a_1 = 12/3 = 4 \Rightarrow x_1 = 1$
- $x_2 = x_3 = 0$
- Esta solução é ótima?

  Não, o problema de programação inteira é mais difícil!!!

  (lucro = 12)
- Solução ótima: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ (lucro = 13)

Solução gráfica

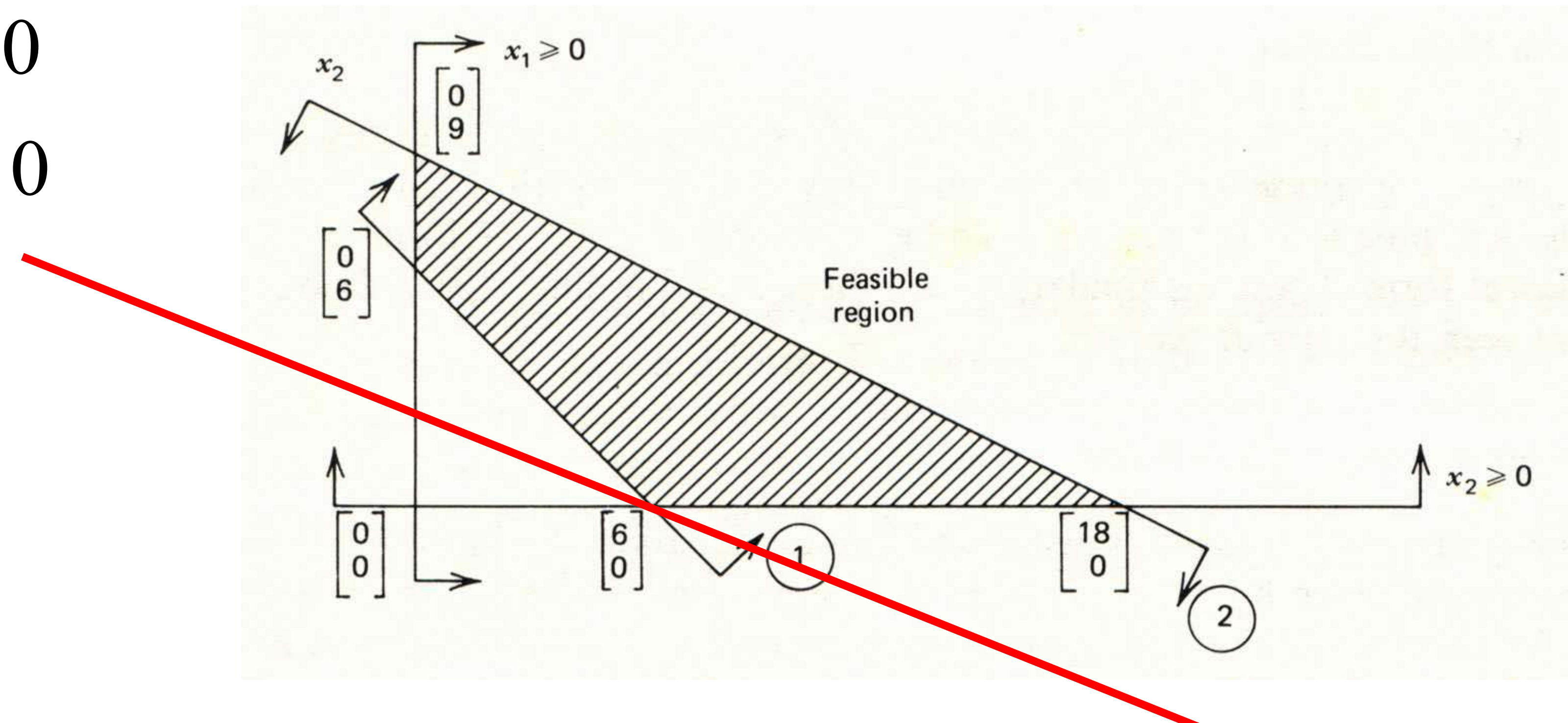
minimizar $2x_1 + 5x_2$

$x_1 + x_2 \geq 6$

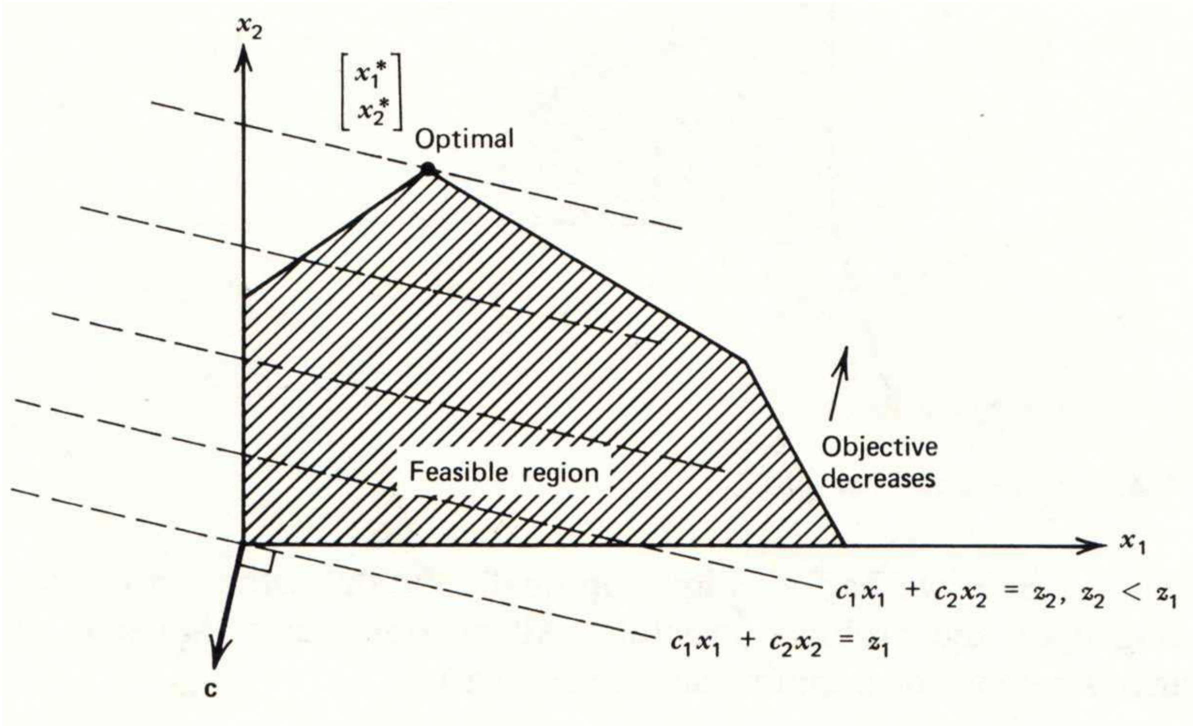
$-x_1 - 2x_2 \geq -18$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



Solução gráfica



A normal $c=(c_1,c_2)$ da função objetivo sempre aponta para a direção de crescimento da função.

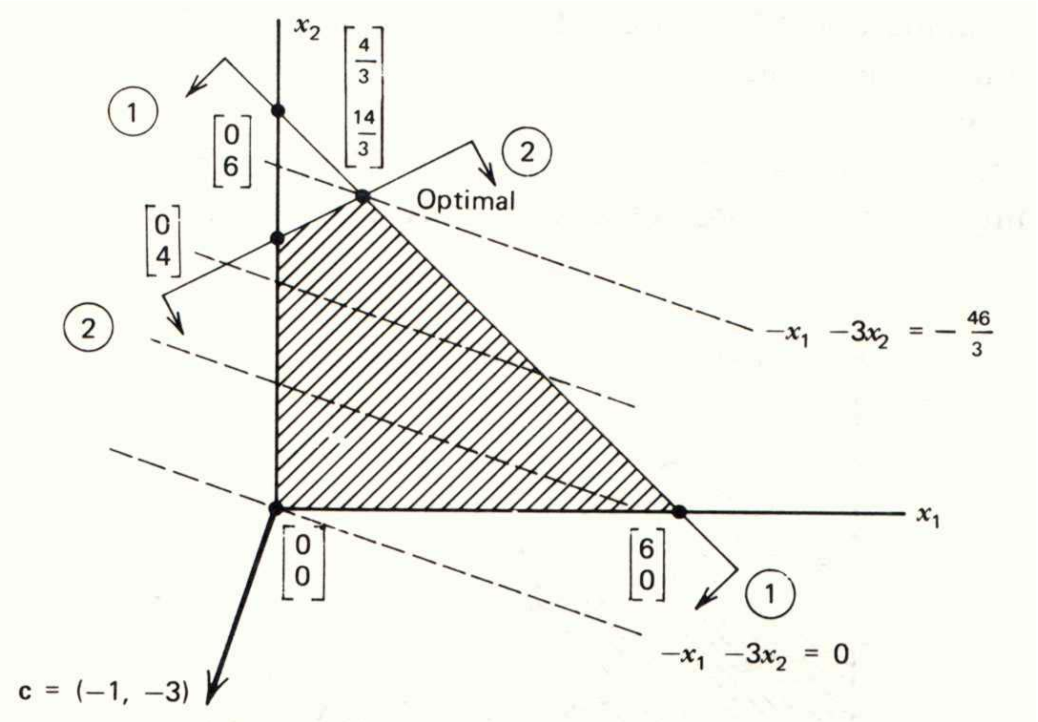
Solução gráfica

$$\text{minimizar} - x_1 - 3x_2$$

$$x_1 + x_2 \le 6$$

$$-x_1 + 2x_2 \le 8$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$



A normal $c=(c_1,c_2)$ da função objetivo sempre aponta para a direção de crescimento da função.

Solução gráfica

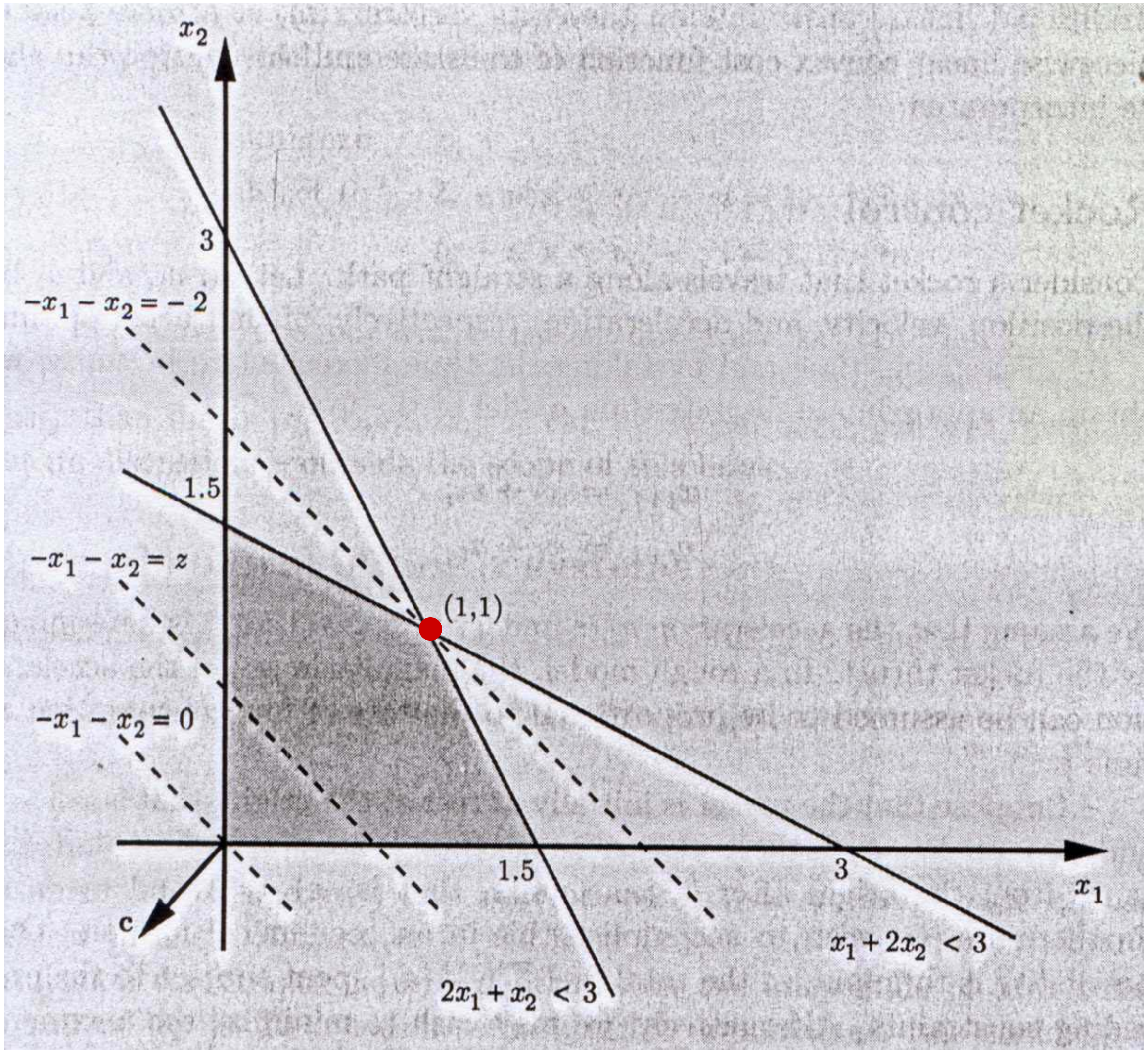
$$\text{minimizar} - x_1 - x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

A normal $c=(c_1,c_2)$ da função objetivo sempre aponta para a direção de crescimento da função.



Solução gráfica

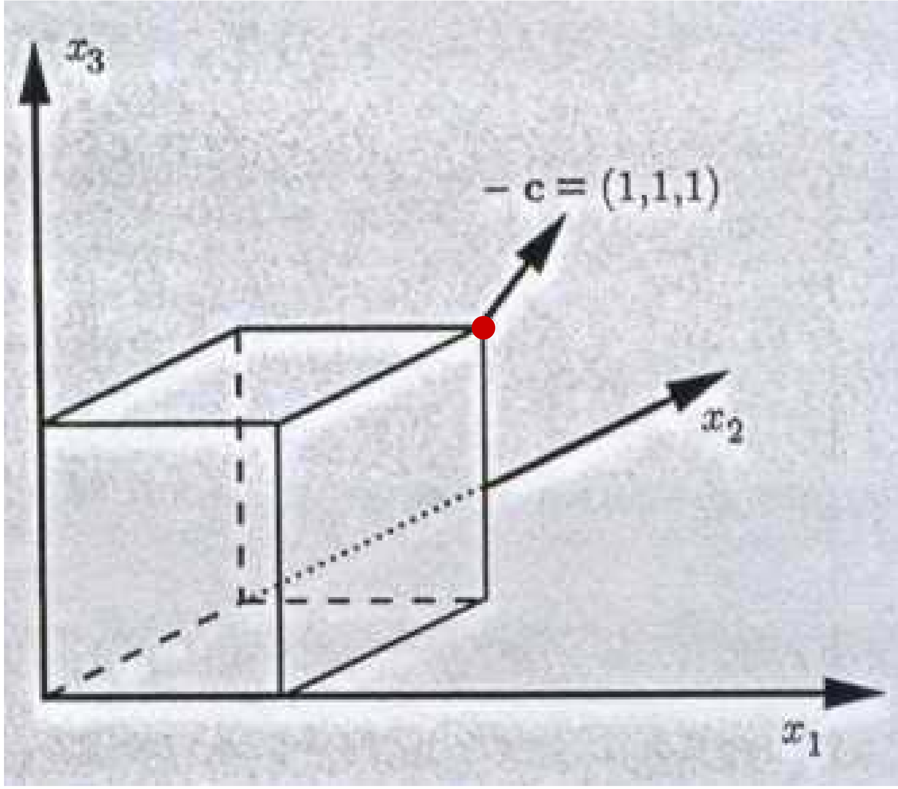
minimizar $-x_1 - x_2 - x_3$

$x_1 \leq 1$

$x_2 \leq 1$

$x_3 \leq 1$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$



A normal $c=(c_1,c_2,c_3)$ da função objetivo sempre aponta para a direção de crescimento da função.

Solução gráfica

- Em todos os exemplos anteriores, a região viável era limitada e a solução ótima era única: correspondia a um ponto extremo da região viável e seu valor era finito.
- Será que isto ocorre sempre?

  Não!!!
- Outras situações possíveis:
  - Problemas com múltiplas soluções ótimas
  - Problemas com solução ilimitada
  - Problemas inviáveis

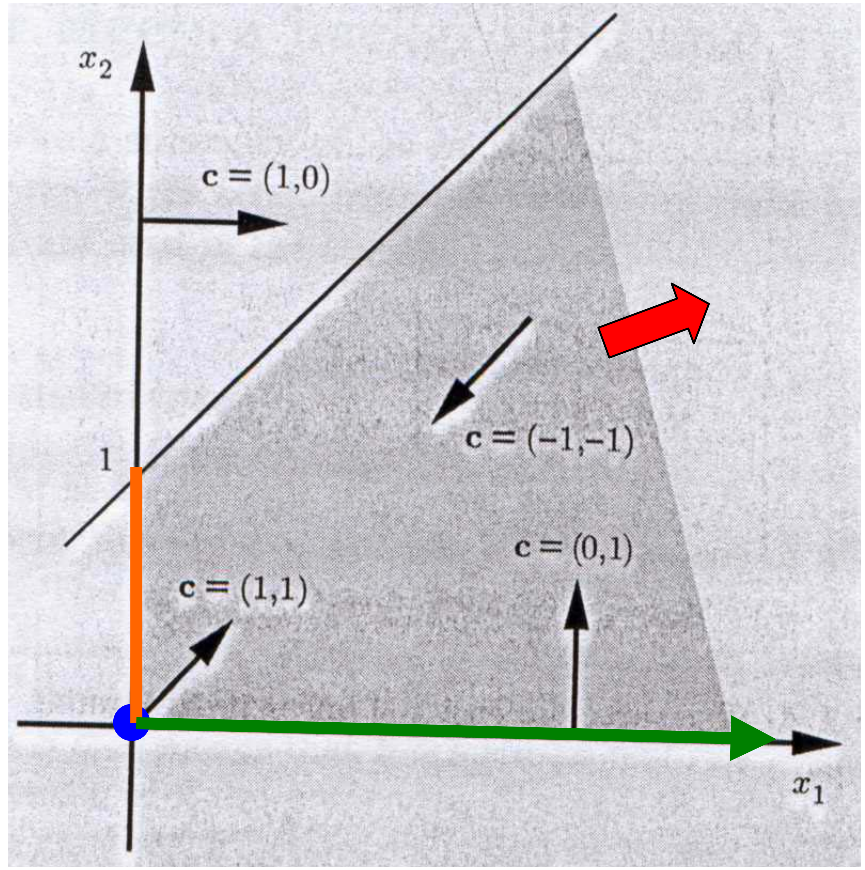
Solução gráfica

minimizar $c_1x_1 + c_2x_2$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

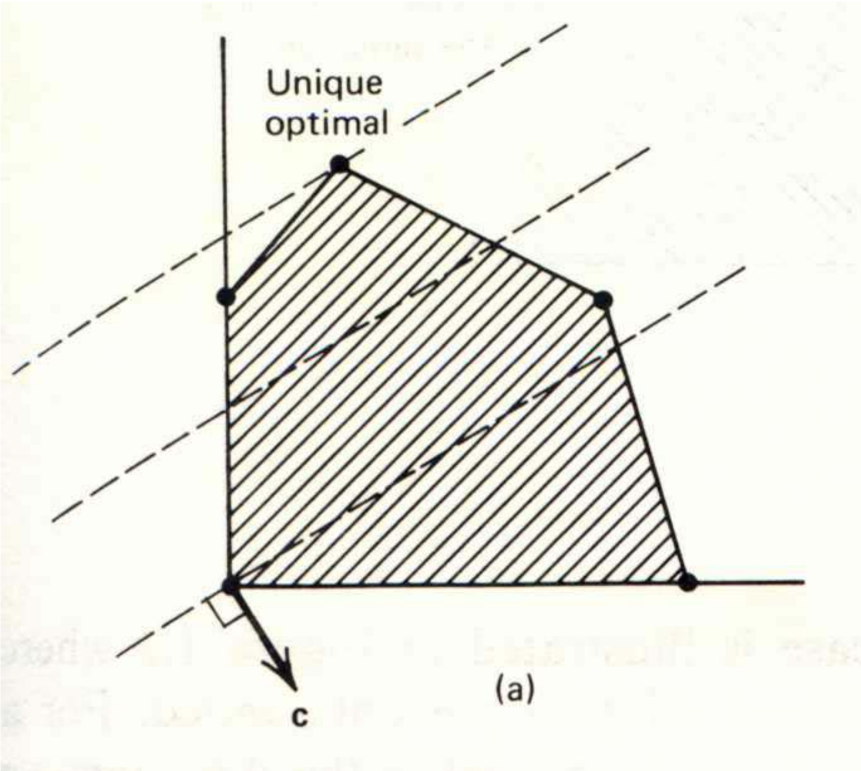
- c=(1,1): solução ótima única (0,0)
- c=(1,0): conjunto limitado com múltiplas soluções ótimas
- c=(0,1): conjunto ilimitado com múltiplas soluções ótimas
- c=(-1,-1): solução ótima ilimitada
- restrição adicional $x_1 + x_2 \leq -2$: problema inviável



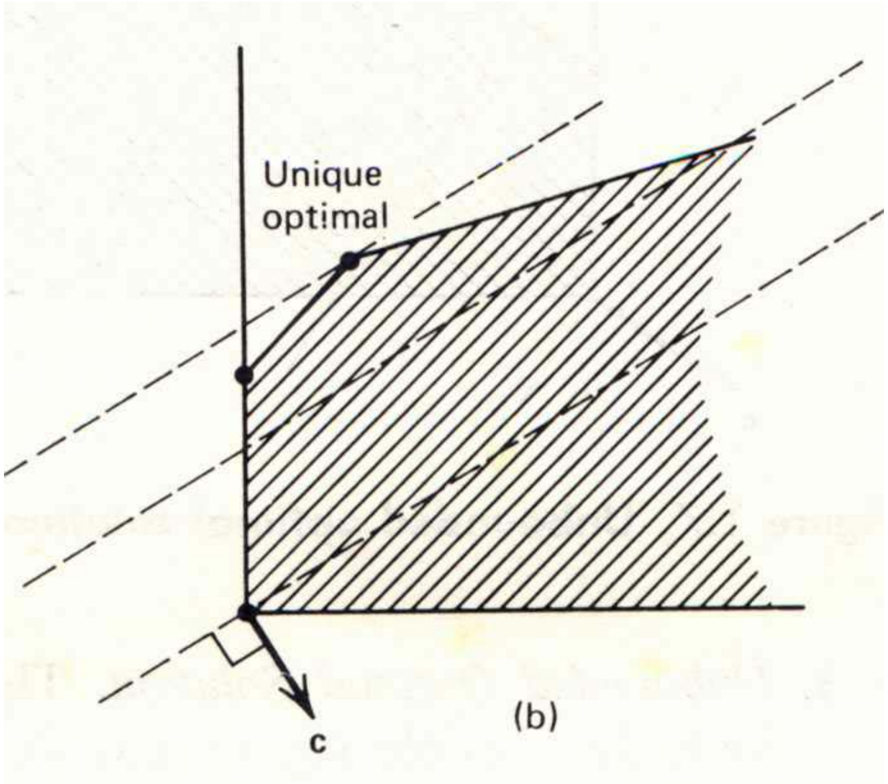
A normal $c=(c_1,c_2)$ aponta para a direção de crescimento

Solução gráfica

- Solução ótima finita única:



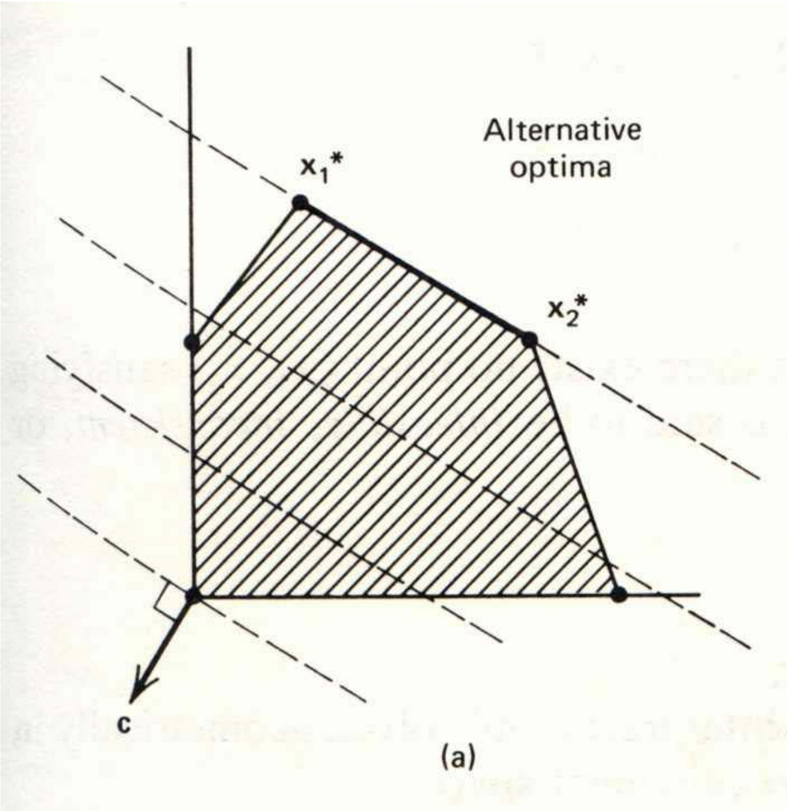
Região viável limitada



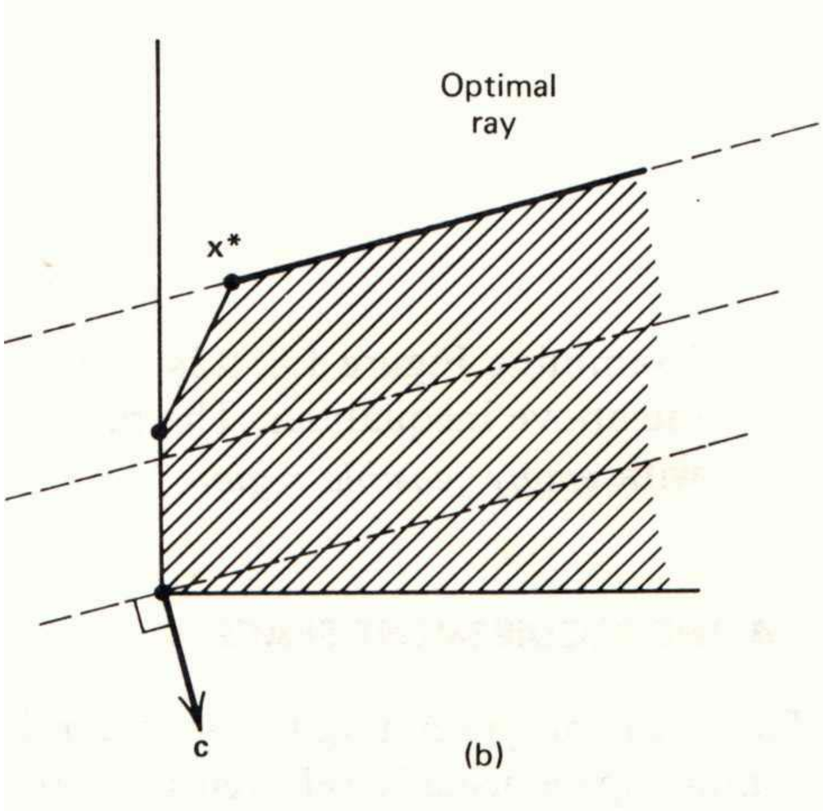
Região viável não-limitada

Solução gráfica

- Soluções ótimas finitas alternativas:



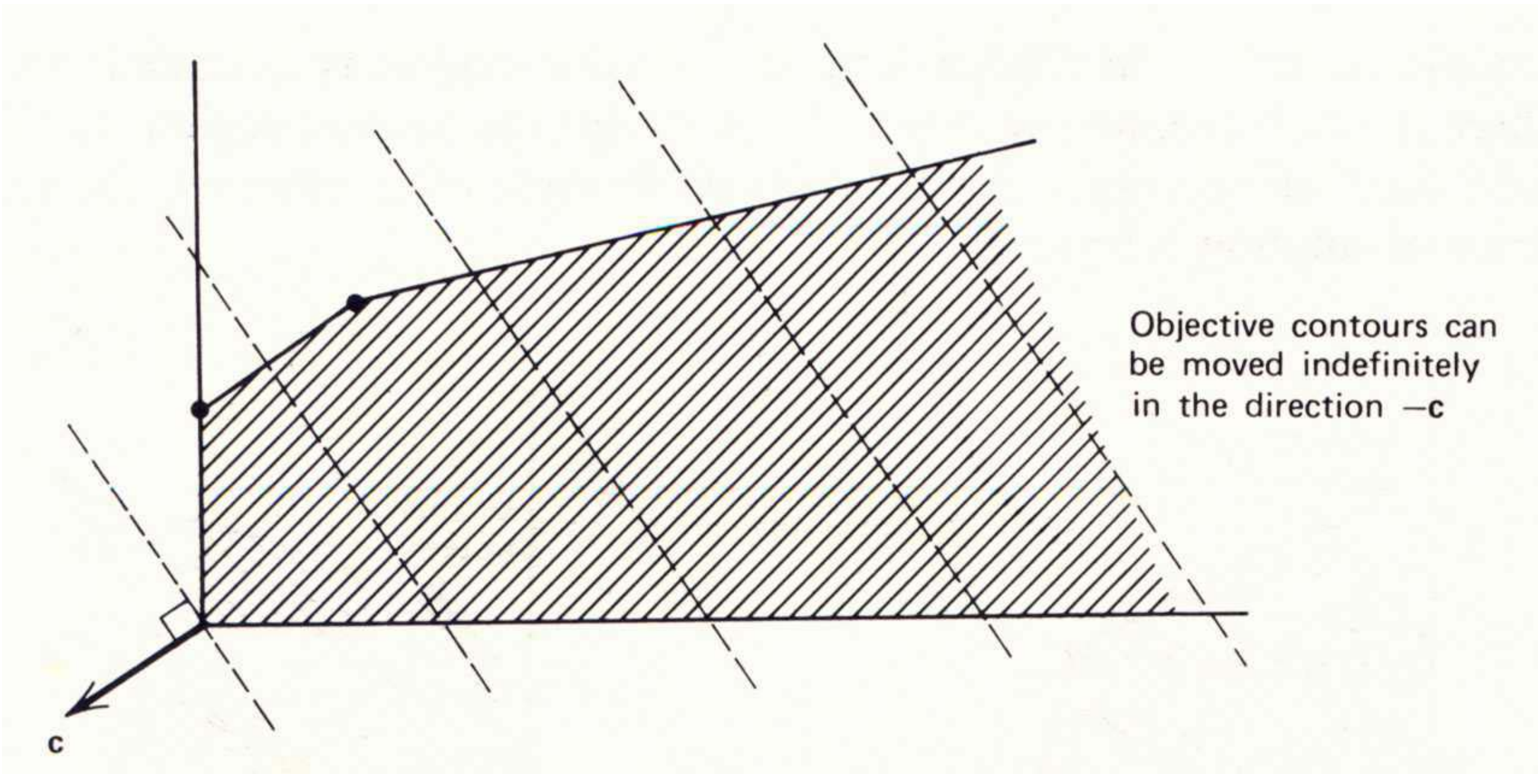
Região viável limitada



Região viável não-limitada

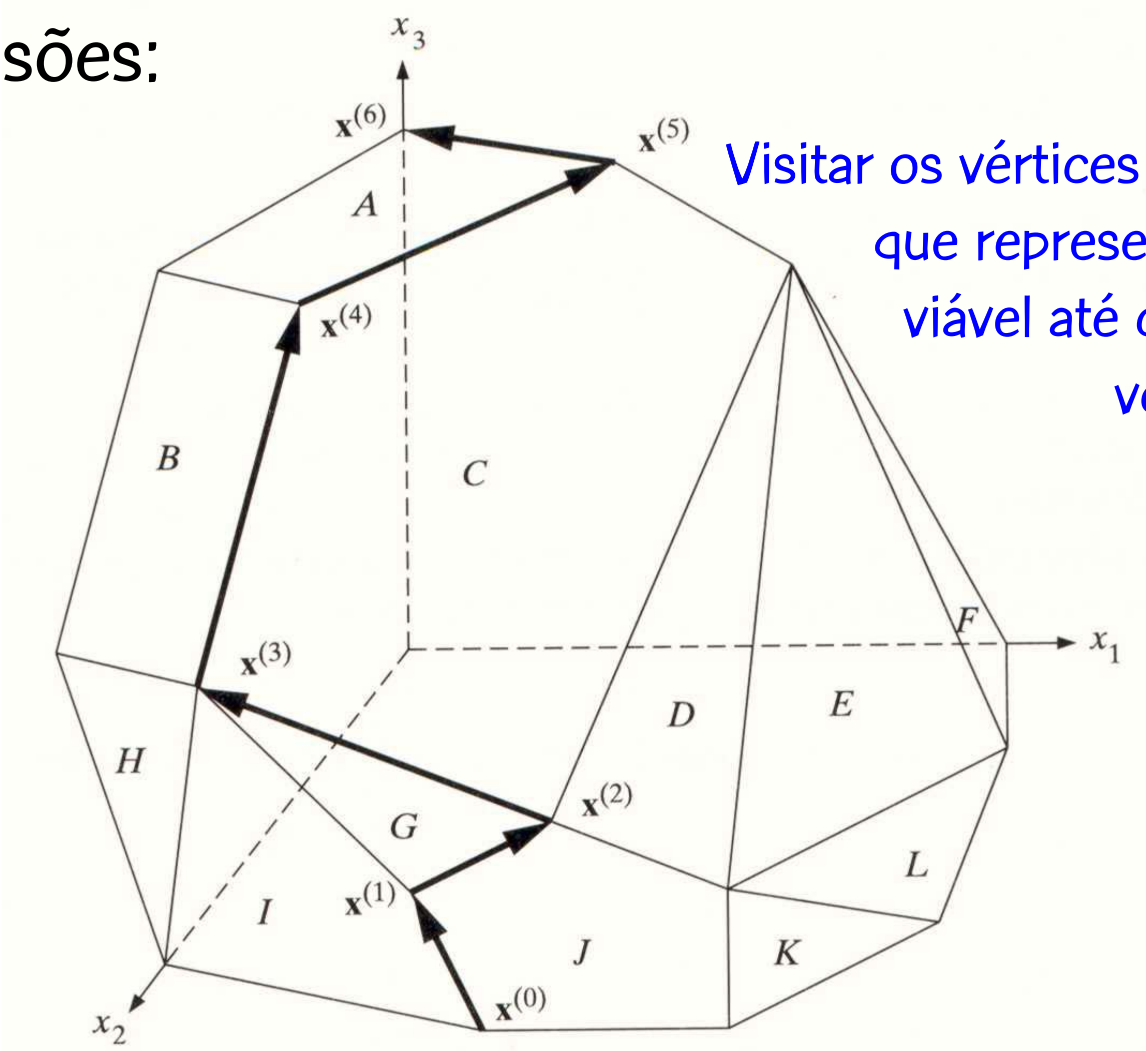
Solução gráfica

- Valor ótimo ilimitado:



Solução gráfica

- Em três dimensões:



Visitar os vértices do politopo que representa a região viável até chegar a um vértice ótimo

Generalização: método Simplex

Forma canônica de um PPL

minimizar $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

sujeito a :

$$\mathrm{a}_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\mathrm{a}_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots$$

$$\mathrm{a}_{\mathrm{m}}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Forma canônica de um PPL

Dados:

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)_{1\times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

Variáveis:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

Modelo:

minimizar $c.x$

sujeito a : $A.x = b$

$x \geq 0$

Forma canônica de um PPL

- Variáveis irrestritas ou livres: qualquer número real pode ser escrito com a diferença entre dois números positivos
- Transformar a variável x_j irrestrita em sinal em:

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

$$x_j^+ \geq 0$$

$$x_j^- \geq 0$$

Forma canônica de um PPL

- Eliminação de desigualdades: dada uma desigualdade do tipo $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, transformá-la em:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i$$

$$s_i \ge 0$$

- Eliminação de desigualdades: dada uma desigualdade do tipo $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$, transformá-la em:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - s_i = b_i$$

$$s_i \ge 0$$

- Em ambos os casos, s_i é chamada de variável de folga.

Forma canônica de um PPL

- Uma igualdade pode ser transformada em duas desigualdades:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ é equivalente a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$

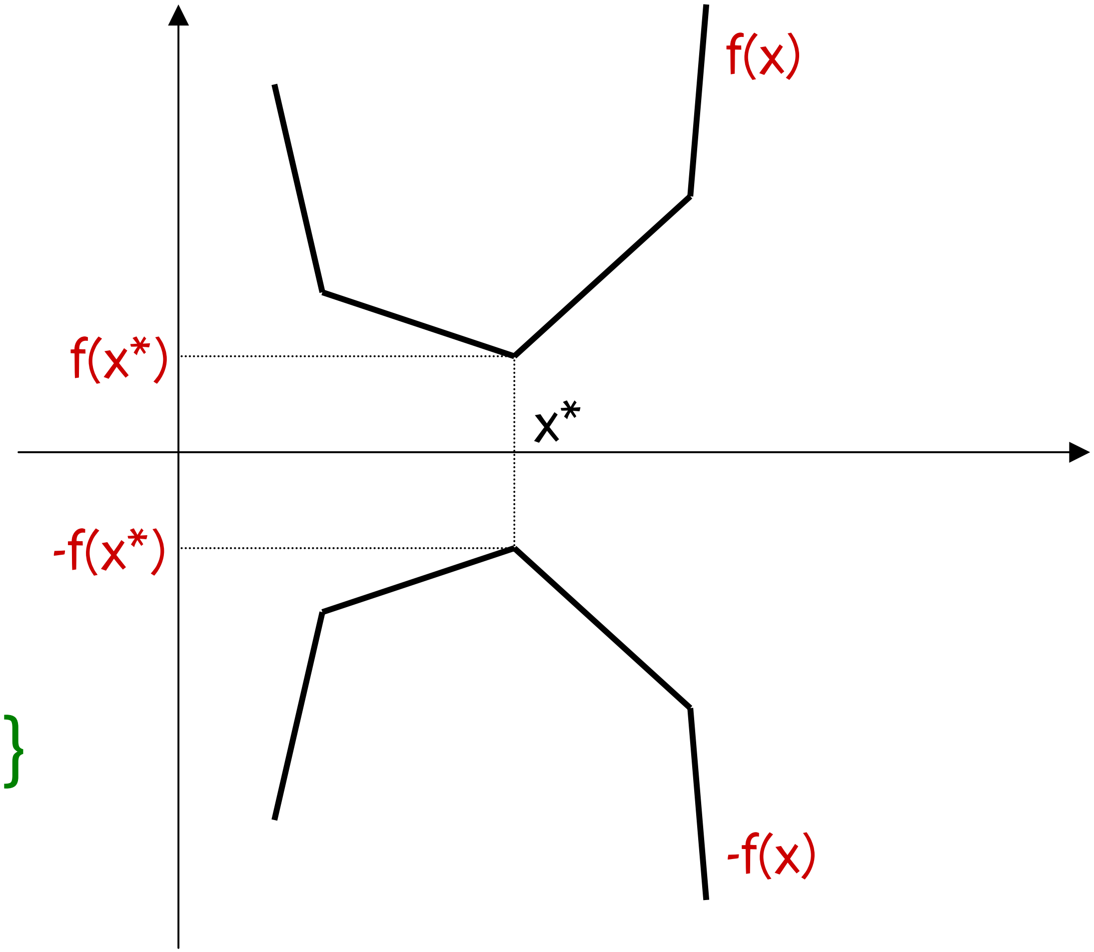
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$$

ou ainda a $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$

$$\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \le -b_i$$

Forma canônica de um PPL

- Um problema de minimização é equivalente a um de maximização:



Então:

$$\min f(x) = -\max \{-f(x)\}$$

Forma canônica de um PPL

- Valores absolutos na função objetivo (custos c_j positivos):

$$\text{minimizar} \sum_{j=1}^{n} c_j |x_j|$$
$$\text{sujeito a}: A.x \geq b$$

- Por definição, $|x_j|$ é o menor número positivo z_j tal que $x_j \leq z_j$ e $-x_j \leq z_j$. Então, o problema acima equivale a:

$$\text{minimizar} \sum_{j=1}^{n} c_j z_j$$
$$\text{sujeito a}: A.x \geq b$$
$$x_j \leq z_j \qquad j = 1,\ldots,n$$
$$-x_j \leq z_j \qquad j = 1,\ldots,n$$

Forma canônica de um PPL

- Valores absolutos na função objetivo (custos c_j positivos):

$$\text{minimizar} \sum_{j=1}^{n} c_j \left| x_j \right|$$
$$\text{sujeito a} : A.x \geq b$$

- Alternativamente, inicialmente substituir a variável irrestrita x_j por:

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

$$x_j^+ \geq 0$$

$$x_j^- \geq 0$$

Forma canônica de um PPL

- A idéia é garantir que $x_j = x_j^+$ ou $x_j = x_j^-$, dependendo do valor de x_j ser positivo ou negativo.
- Em seguida, substituir $|x_j|$ por $x_j^+ + x_j^-$.
- Então, alternativamente o problema anterior equivale a:

Isto porque em uma solução viável ótima necessariamente pelo menos uma das componentes x_j^+ ou x_j^- será nula.

minimizar $\sum_{j=1}^{n} c_j (x_j^+ + x_j^-)$

sujeito a : $A.x^+ - A.x^- \geq b$

$x_j^+, x_j^- \geq 0 \quad j = 1,\dots,n$

Forma canônica de um PPL

- Qualquer problema de programação linear, envolvendo
  - igualdades ou desigualdades
  - variáveis restritas ou irrestritas em sinal
  - minimização ou maximização
  - valores absolutos
  - funções lineares por partes

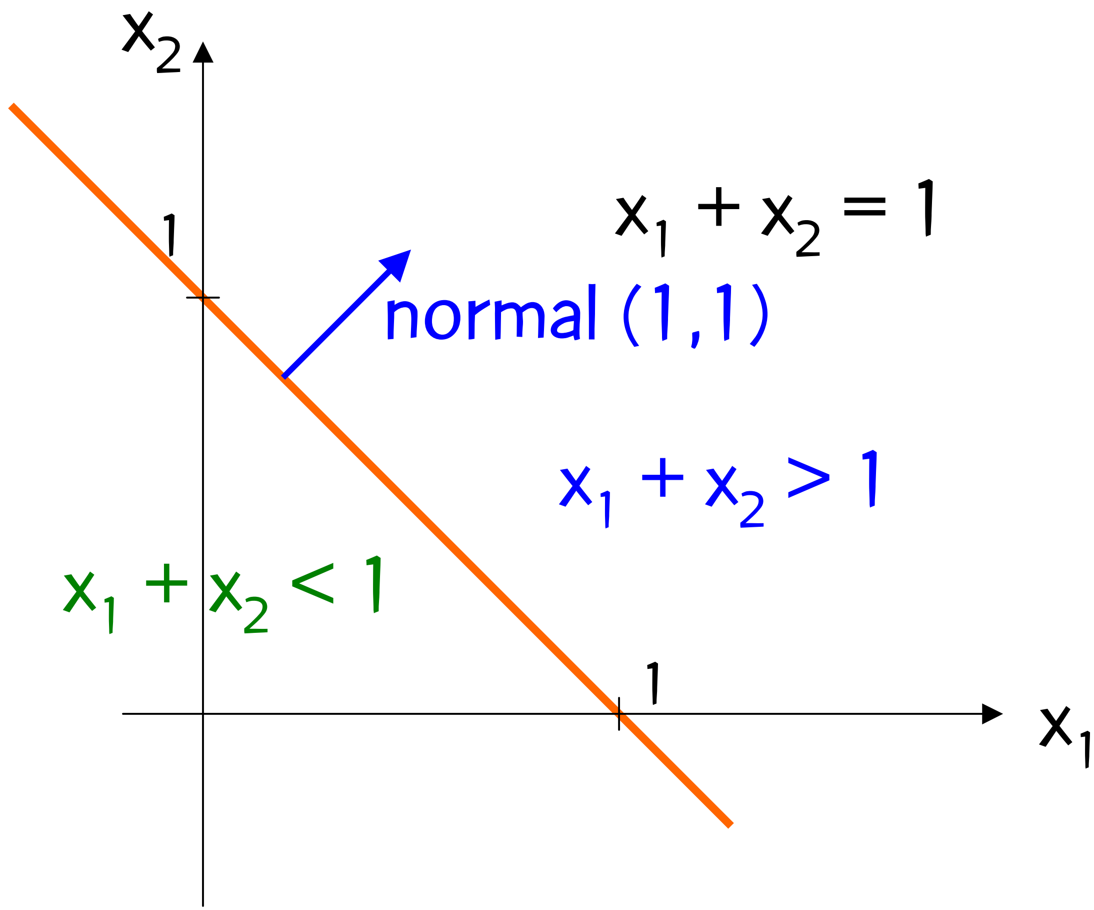
  pode ser reformulado e colocado na forma canônica.

Geometria da PL

- Um poliedro é um conjunto que pode ser descrito da forma $\{x \in R^n: A.x \geq b\}$, onde A é uma matrix mxn e b é um vetor mx1.
- O conjunto das soluções viáveis de um PPL pode ser descrito por restrições da forma $A.x \geq b$ e portanto é um poliedro (mesmo na forma canônica $A.x=b$ e $x \geq 0$).
- Seja a um vetor nx1 não-nulo. Então,
  - O conjunto $\{x \in R^n: a.x=b\}$ é um hiperplano.
  - O conjunto $\{x \in R^n: a.x \geq b\}$ é um semi-espaço.

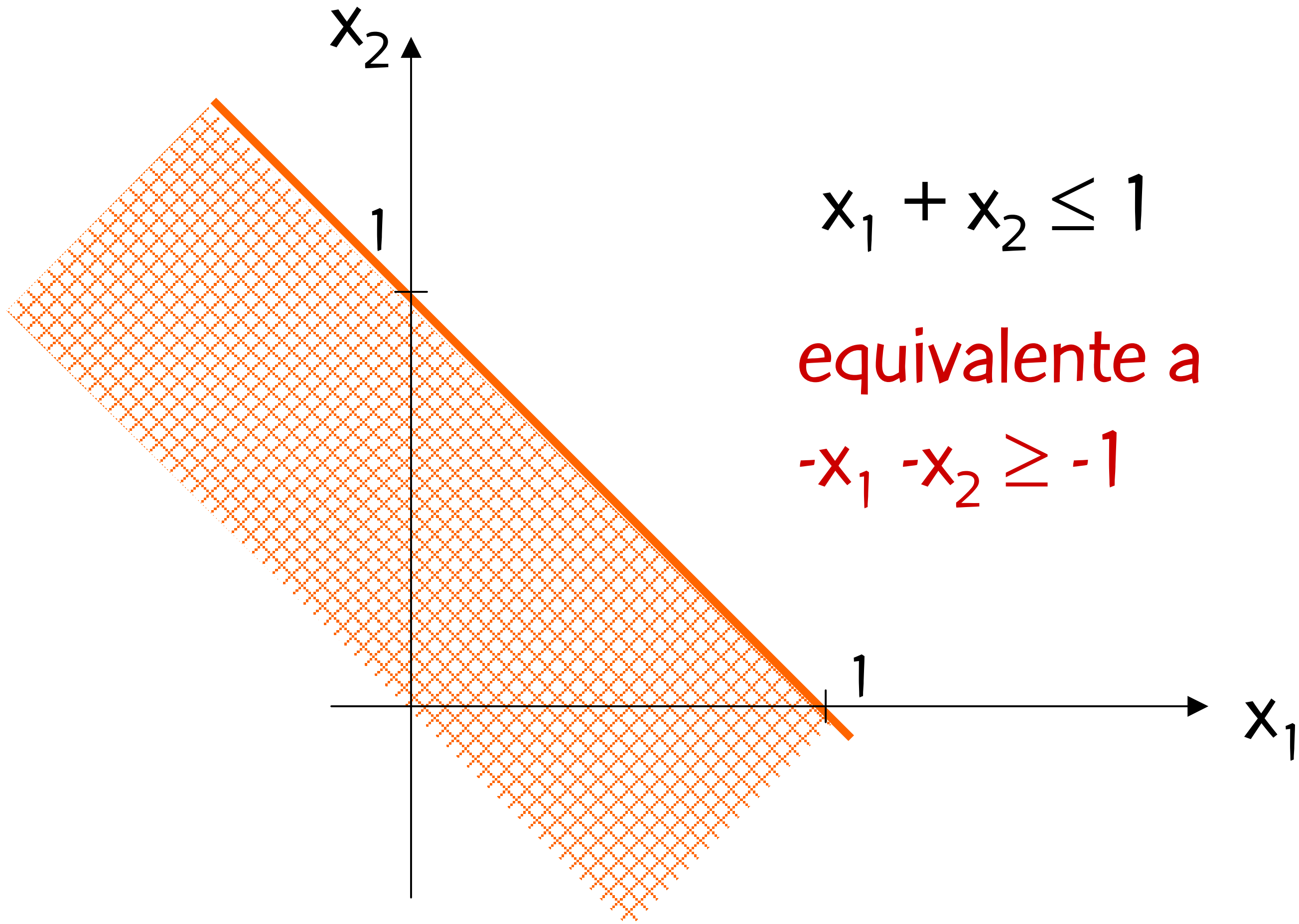
Geometria da PL

- Exemplo: hiperplano em R^2



Geometria da PL

- Exemplo: semi-espaço em R^2



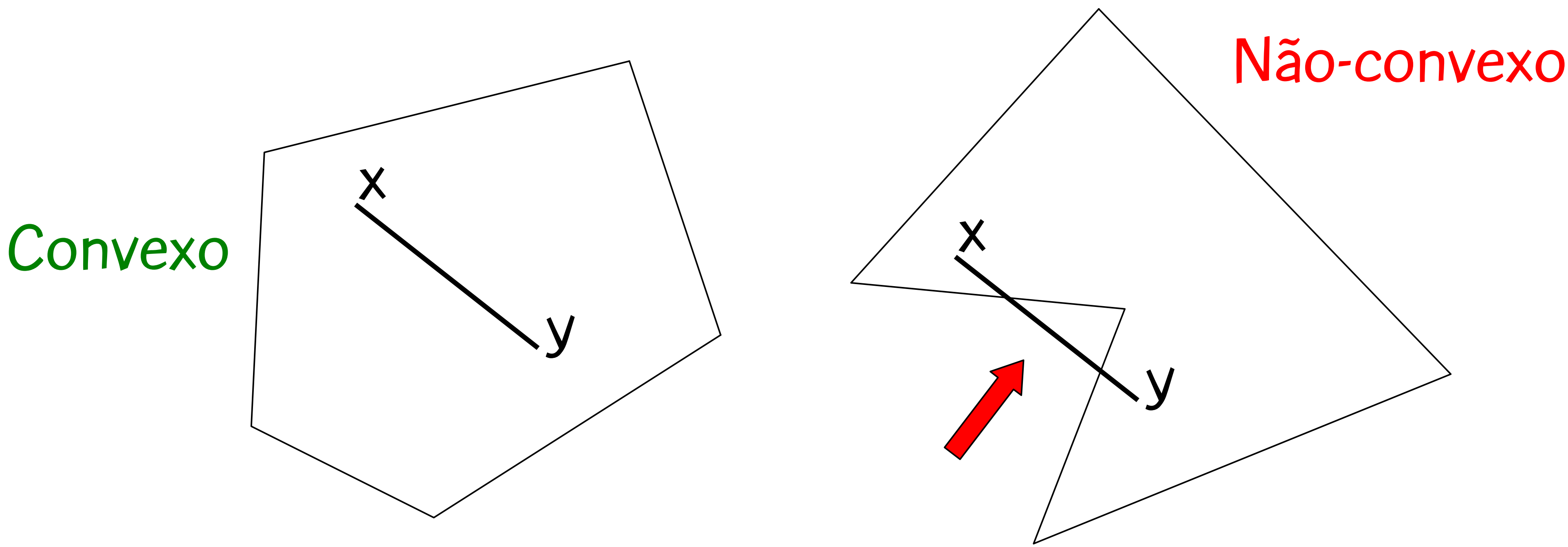
$$x_1 + x_2 \leq 1$$

equivalente a

$$-x_1 - x_2 \geq -1$$

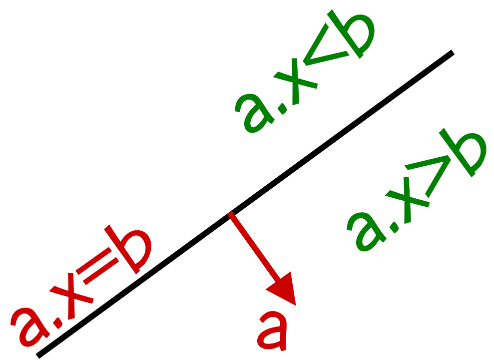
Geometria da PL

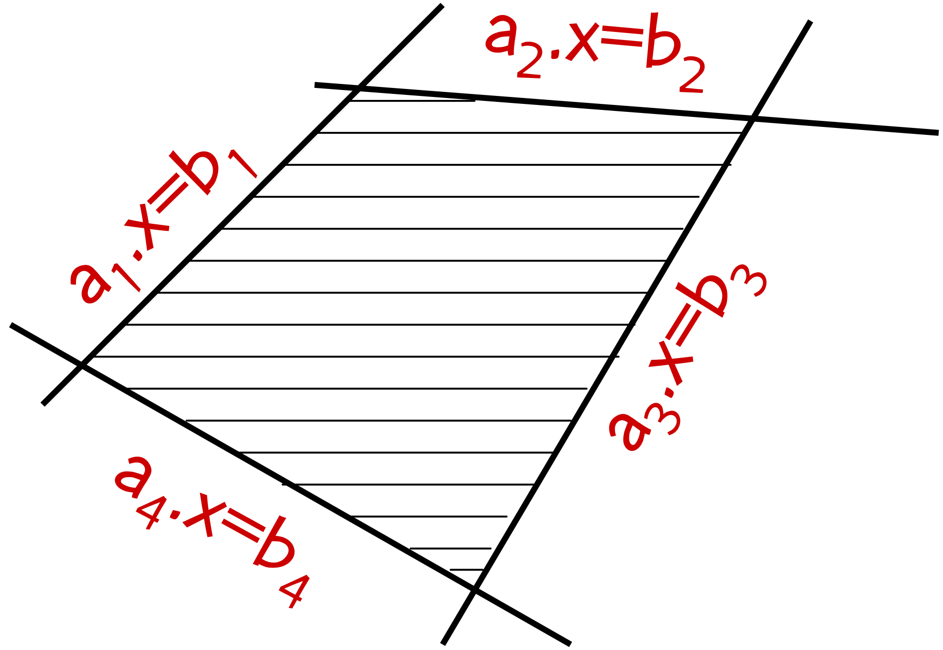
- Um conjunto S é convexo se para qualquer par de elementos $x,y \in S$ e qualquer $\lambda \in [0,1]$, então $\lambda.x+(1-\lambda).y \in S$.



Geometria da PL

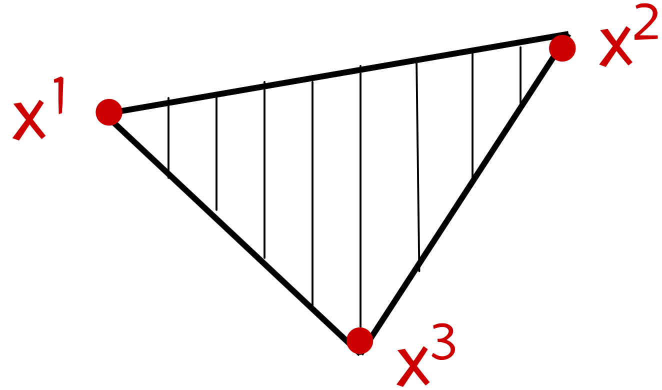
- A região viável de um problema de programação linear é um conjunto convexo.





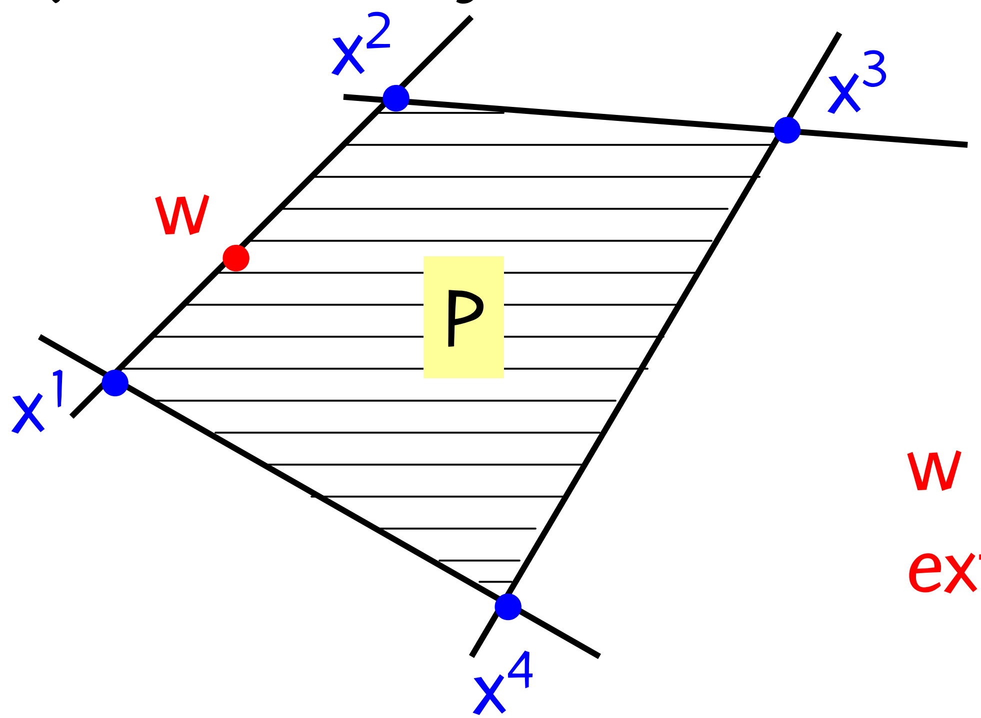
Geometria da PL

- Dados os vetores $x^1, x^2, \ldots, x^k \in R^n$ e números escalares não-negativos satisfazendo $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1$, diz-se que o vetor $\lambda_1.x^1 + \lambda_2.x^2 + \ldots + \lambda_k.x^k$ é uma combinação linear convexa de $x^1, x^2, \ldots, x^k$.
- A envoltória convexa dos vetores $x^1, x^2, \ldots, x^k$ é o conjunto formado por todas suas combinações convexas:



Geometria da PL

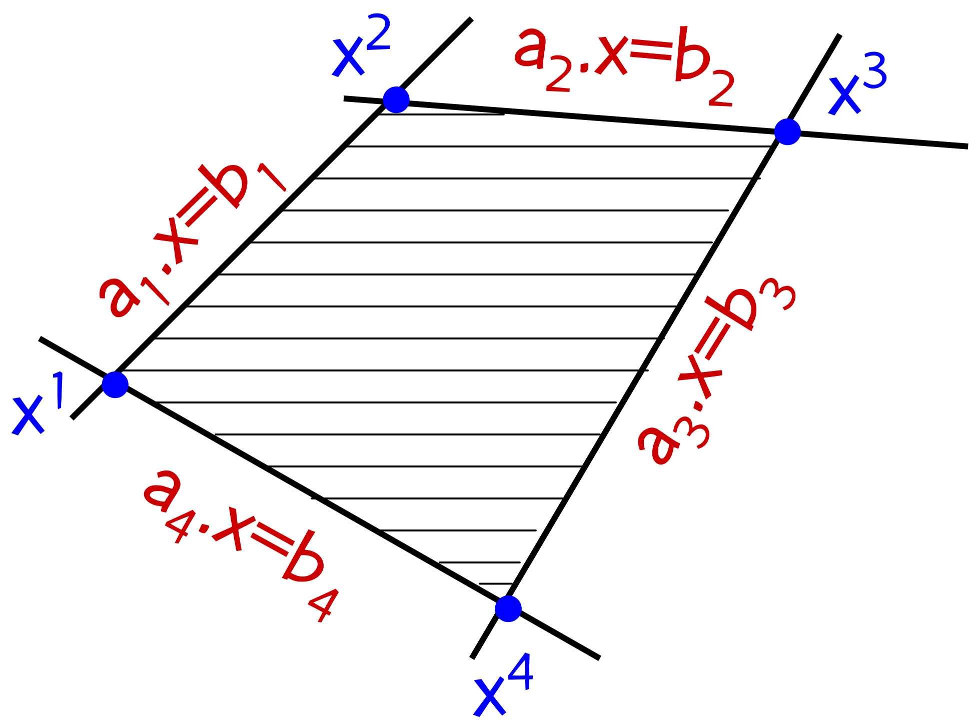
- Um vetor $x \in P$ é um ponto extremo do poliedro P se não existem dois vetores $y,z \in P$ diferentes de x tais que x seja uma combinação linear de y e z.



w não é ponto extremo

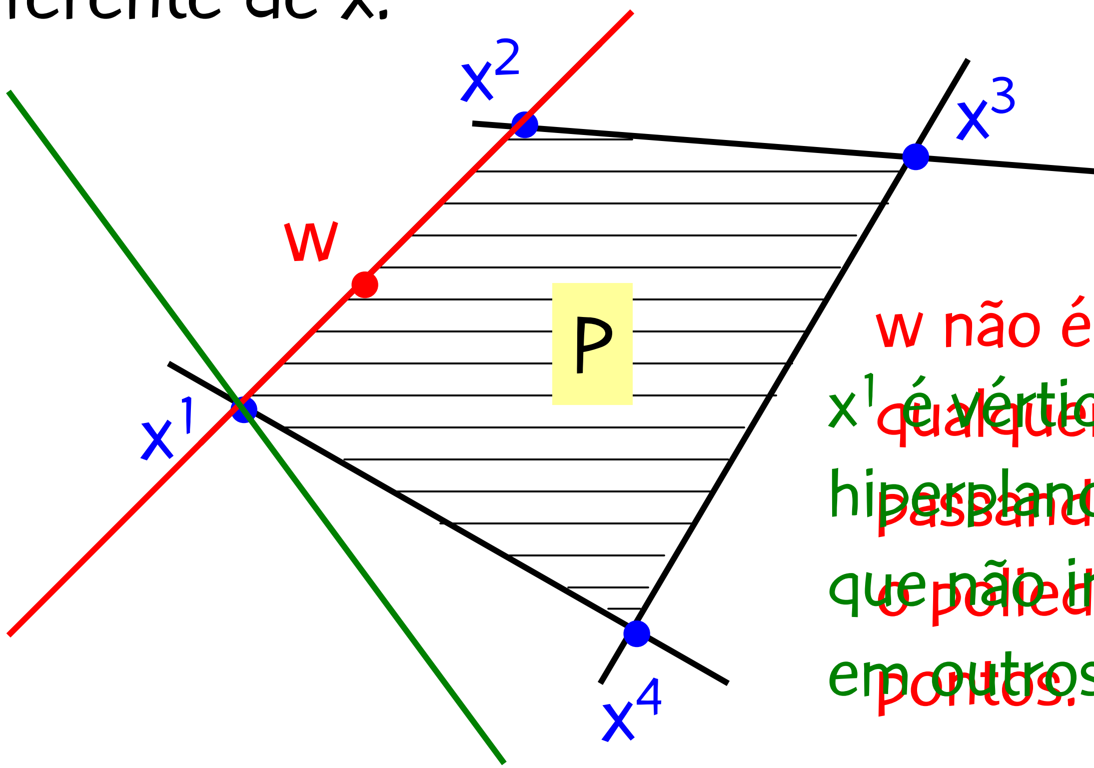
Geometria da PL

- O conjunto das soluções viáveis de um PPL corresponde à envoltória convexa de seus pontos extremos:



Geometria da PL

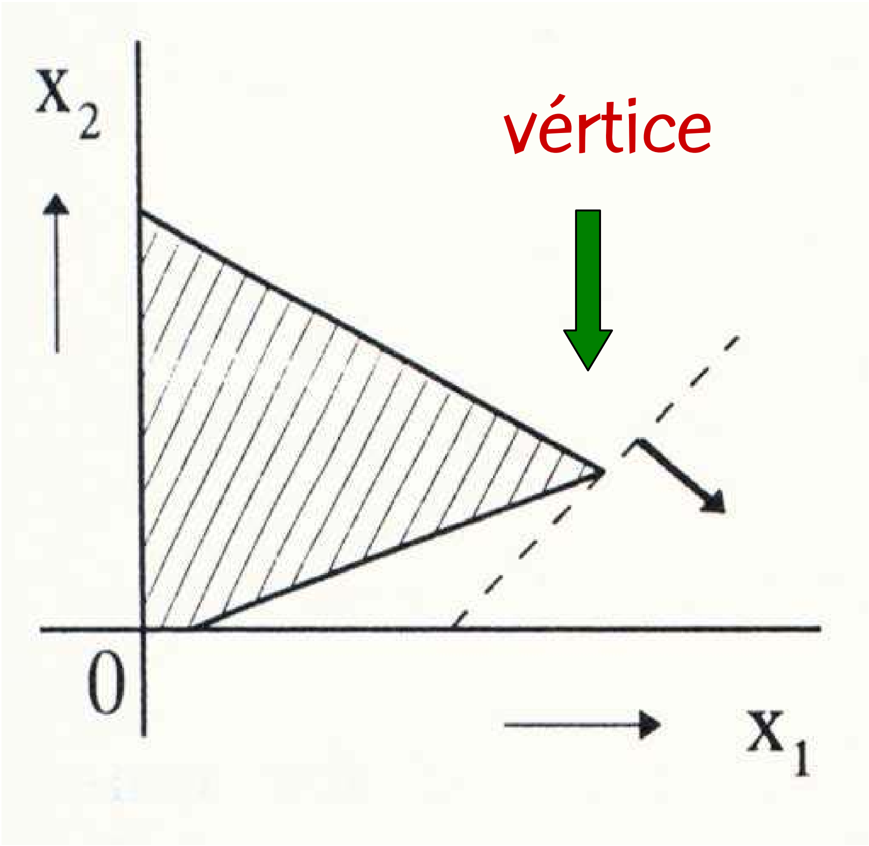
- Um vetor $x \in P$ é um vértice do poliedro P se existe um vetor c de dimensão $1xn$ tal que $c.x < c.y$ para qualquer $y \in P$ diferente de x.



w não é vértice, pois qualquer hiperplano passando por w intercepta o poliedro em outros pontos.

x^1 é vértice, pois existe um hiperplano passando por x^1 que não intercepta o poliedro em outros pontos.

Geometria da PL



Geometria da PL

- Seja um poliedro $P \subset R^n$ associado a um problema de programação linear definido em termos de restrições lineares de igualdade e de desigualdade:

$$
\begin{aligned}
a_i.x &\geq b_i, & i &\in M_1 \\
a_i.x &\leq b_i, & i &\in M_2 \\
a_i.x &= b_i, & i &\in M_3
\end{aligned}
$$

Os conjuntos M_1, M_2 e M_3 são conjuntos finitos de índices.

Geometria da PL

- Se um vetor (isto é, uma solução do PPL) x^* satisfaz $a_i.x^* = b_i$ para algum i em M_1, M_2 ou M_3, diz-se então que a restrição correspondente está ativa em x^*.
- Seja $x^* \in R^n$ e $I = \{i \in M_1 \cup M_2 \cup M_3 : a_i.x^* = b_i\}$ o conjunto de restrições ativas em x^*. Então:
  - Há n vetores independentes no conjunto $\{a_i : i \in I\}$ (isto é, há n restrições linearmente independentes ativas em x^*).
  - Qualquer vetor de R^n pode ser expresso como combinação linear dos vetores em $\{a_i : i \in I\}$.
  - O sistema de equações $a_i.x=b_i$, $\forall i \in I$, tem solução única.

Geometria da PL

- Diz-se que os vetores $x^1, x^2, \ldots, x^k$ de R^n são linearmente independentes se nenhum deles pode ser obtido como uma combinação linear dos demais, isto é:

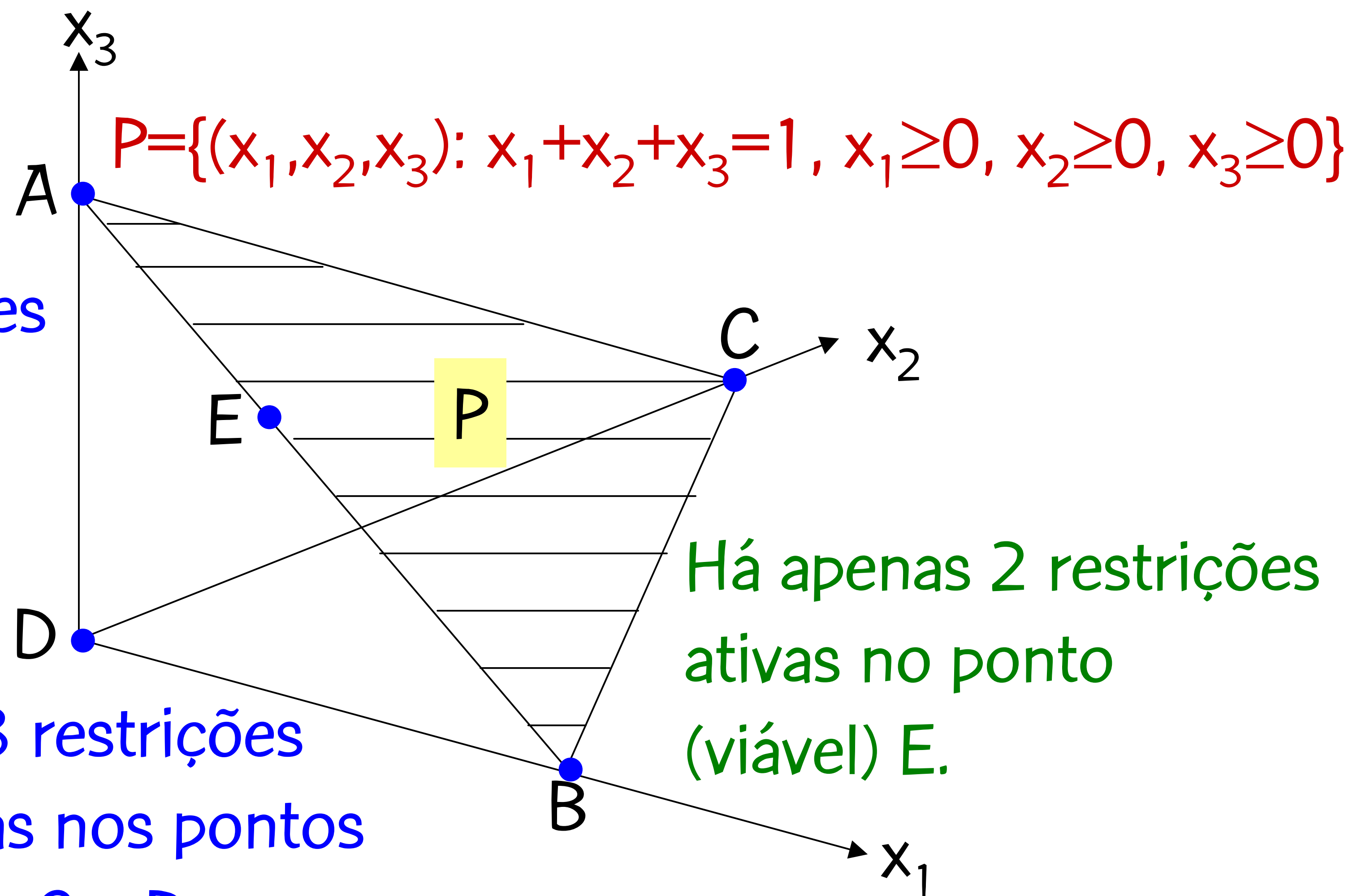
  $$\lambda_1.x^1 + \lambda_2.x^2 + \ldots + \lambda_k.x^k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$$

- Definição algébrica de ponto extremo: é uma solução viável do problema na qual há n restrições ativas linearmente independentes.

Geometria da PL

- Sejam um poliedro P definido por restrições lineares de igualdade e de desigualdade e $x^* \in R^n$:
  - (a) O vetor x^* é uma solução básica se todas as restrições de igualdade estão ativas e se há n restrições linearmente independentes ativas em x^*.
  - (b) Se x^* é uma solução básica que satisfaz todas as restrições, então diz-se que x^* é uma solução básica viável.

Geometria da PL

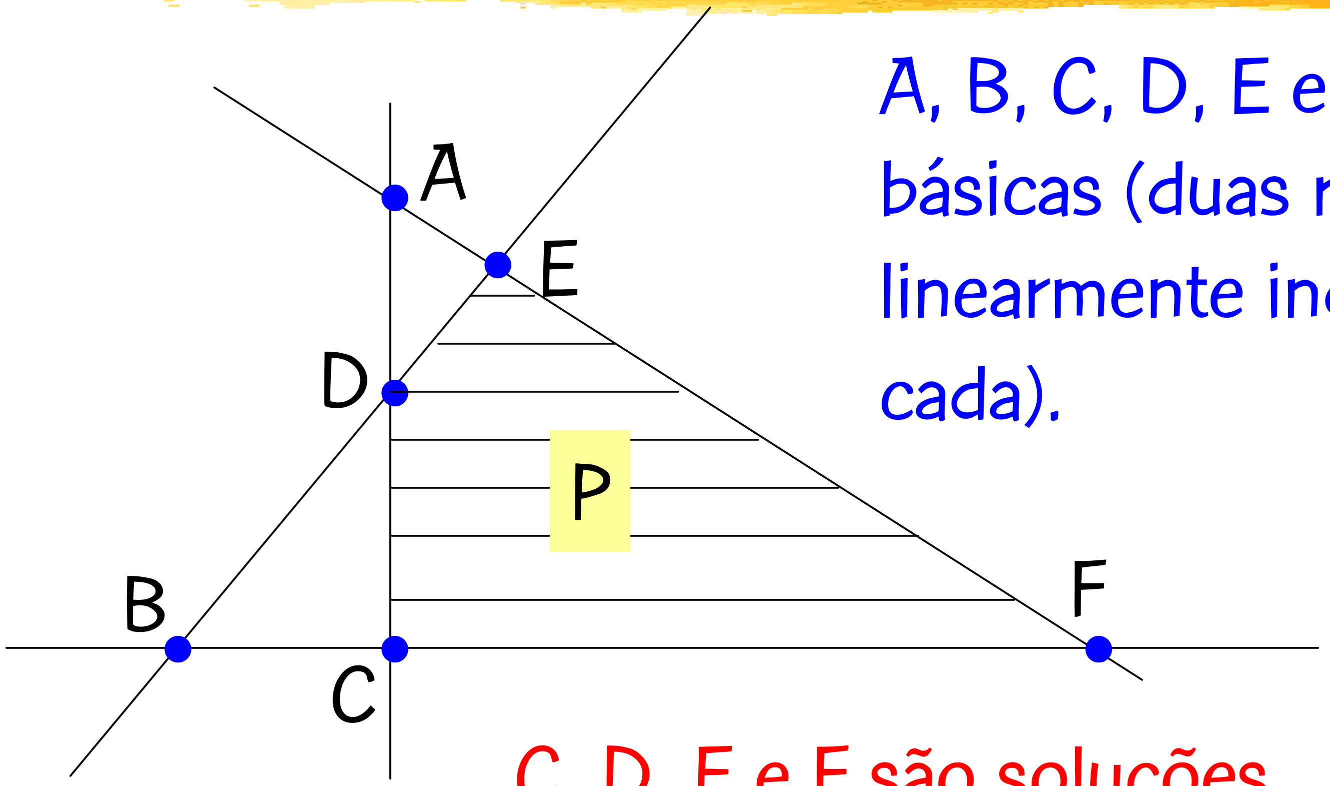


A, B e C: soluções básicas viáveis

Há 3 restrições ativas nos pontos A, B, C e D.

Há apenas 2 restrições ativas no ponto (viável) E.

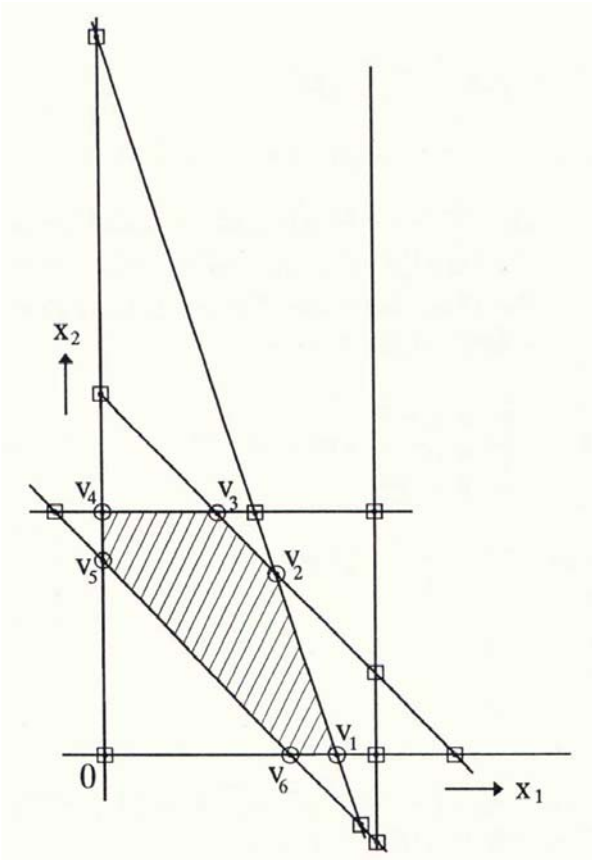
Geometria da PL



A, B, C, D, E e F são soluções básicas (duas restrições ativas linearmente independentes em cada).

C, D, E e F são soluções básicas viáveis (satisfazem todas as restrições).

Geometria da PL



maximizar $3x_1 + 2x_2$

sujeito a :

$x_1 + x_2 \le 9$

$3x_1 + x_2 \le 18$

$x_1 \le 7$

$x_2 \le 6$

$x_1 + x_2 \ge 5$

$x_1, x_2 \ge 0$

Geometria da PL

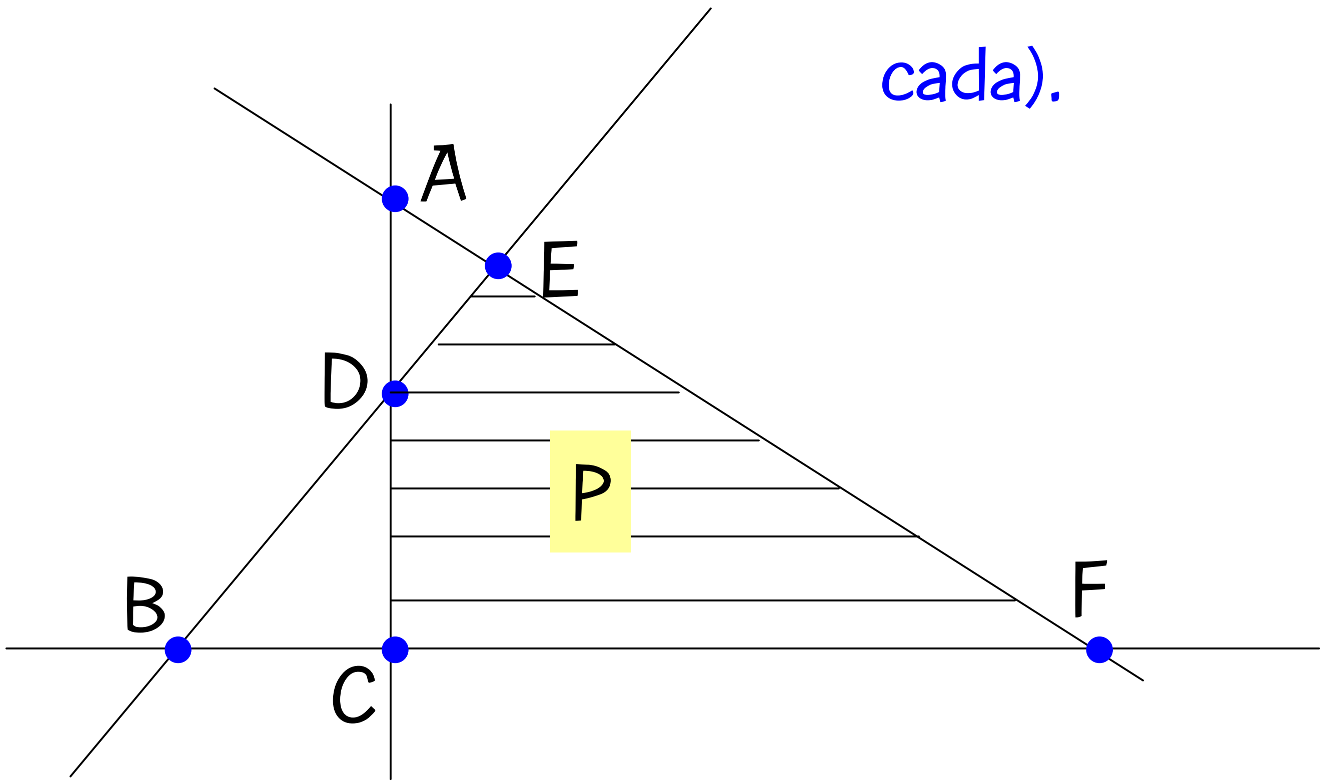
- Sejam um poliedro P não-vazio e $x^* \in P$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:
  - x^* é um vértice.
  - x^* é um ponto extremo.
  - x^* é uma solução básica viável.
- Dado um número finito m de desigualdades lineares, pode haver apenas um número finito de soluções básicas viáveis.
  - m desigualdades lineares, n restrições ativas em qualquer solução básica: número de soluções básicas é limitado pelo número de maneiras que se pode escolher n restrições dentre m.

Geometria da PL

- Embora o número de soluções básicas (viáveis) seja finito, ele pode ser muito grande:
  - $\{x \in R^n: 0 \leq x_i \leq 1, i=1,\ldots,n\}$
  - Número de restrições? $2n$
  - Número de soluções básicas viáveis? $\binom{2n}{n} = 2^n$

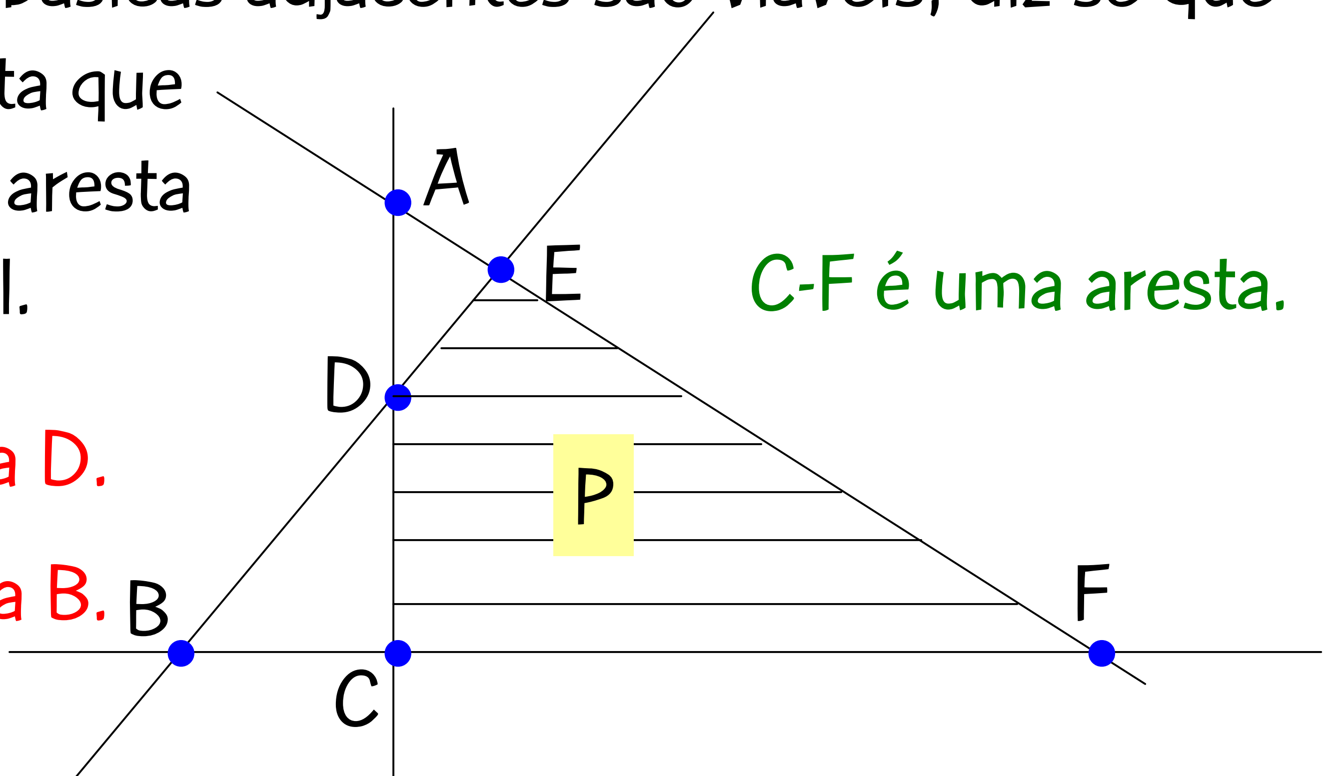
Geometria da PL

A, B, C, D, E e F são soluções básicas (duas restrições ativas linearmente independentes em cada).



Geometria da PL

- Duas soluções básicas são adjacentes se há n-1 restrições linearmente independentes comuns ativas em ambas.
- Se duas soluções básicas adjacentes são viáveis, diz-se que o segmento de reta que as conecta é uma aresta do conjunto viável.



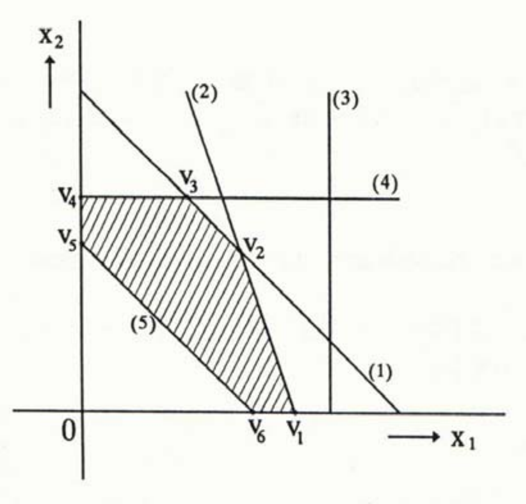
C-F é uma aresta.

B e E são adjacentes a D.

D e E são adjacentes a B.

Geometria da PL

- Considera-se agora um problema de programação linear formulado na forma canônica e $P = \{x \in R^n: A.x = b, x \geq 0\}$ o poliedro associado às suas restrições.
  - A tem dimensão mxn, onde m é o número de restrições de igualdade.
  - Hipótese simplificadora: as m restrições são linearmente independentes.
  - Logo, $n \geq m$.
  - Linhas linearmente dependentes de A correspondem a restrições redundantes que podem ser descartadas.



Geometria da PL

- Em toda solução básica há n restrições ativas linearmente independentes.
- Toda solução básica satisfaz as m restrições de igualdade $A.x = b$, o que provê m restrições ativas.
- Para totalizar as n restrições ativas linearmente independentes, é necessário tornar ativas n-m restrições de não-negatividade $x_i \geq 0$, fixando em 0 as variáveis correspondentes.
- Entretanto, para que as n restrições ativas sejam linearmente independentes, esta escolha não pode ser totalmente arbitrária.

Geometria da PL

- Teorema: Sejam as restrições $A.x = b$ e $x \geq 0$. Assume-se que a matriz A de dimensões mxn tenha suas linhas linearmente independentes. Então, um vetor $x \in R^n$ é uma solução básica se e somente se $A.x = b$ e se existem índices $B(1), \ldots, B(m)$ tais que:
  (a) as colunas $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ são linearmente independentes.
  (b) se $i \neq B(1), \ldots, B(m)$, então $x_i = 0$.

Geometria da PL

- Procedimento para construir soluções básicas:
  - (1) Escolher m colunas linearmente independentes $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$.
  - (2) Fazer $x_i = 0$ para todo $i \neq B(1), \ldots, B(m)$.
  - (3) Resolver o sistema de m equações $A.x = b$ para calcular as variáveis $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$.
- Se todas estas variáveis são não-negativas, então trata-se de uma solução básica viável.

Geometria da PL

- Se x é uma solução básica, as variáveis $x_{B(1)}$, ..., $x_{B(m)}$ são chamadas de variáveis básicas.
- Neste caso, as colunas $A_{B(1)}$, ..., $A_{B(m)}$ são chamadas de básicas e como são linearmente independentes formam uma base para R^m.
- Colocando-se as m colunas básicas lado a lado, obtém-se uma matriz básica B de dimensão mxm.
- Como as colunas da base são linearmente independentes, a matriz básica é inversível.

Geometria da PL

$$A = \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} A_{B(1)} & A_{B(2)} & \cdots & A_{B(m)} \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \\ \cdots \\ x_{B(m)} \end{pmatrix}$$

- A solução básica é determinada resolvendo-se a equação $B.x_B = b$, cuja solução única é $x_B = B^{-1}.b$.

Geometria da PL

- Sistema A.x = b da forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .x = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Colunas básicas A_4, A_5, A_6 e A_7 são linearmente independentes.

Geometria da PL

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .x = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Solução básica viável, pois todas as variáveis básicas são não-negativas.

- Matriz básica:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad x_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = B^{-1}.b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Geometria da PL

- Considerando-se o mesmo sistema $A.x = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .x = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Colunas básicas A_3, A_5, A_6 e A_7 também são linearmente independentes.

Geometria da PL

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .x = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Solução básica não-viável, pois uma variável básica é negativa.

- Matriz básica:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = B^{-1}.b = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Geometria da PL

- Soluções básicas adjacentes e bases adjacentes:
  - Duas soluções básicas são adjacentes se existem n-1 restrições linearmente independentes ativas em ambas.
  - Duas bases são adjacentes se possuem todas as colunas básicas em comum, exceto uma.
  - As bases $\{A_3, A_5, A_6, A_7\}$ e $\{A_4, A_5, A_6, A_7\}$ do exemplo anterior são adjacentes.

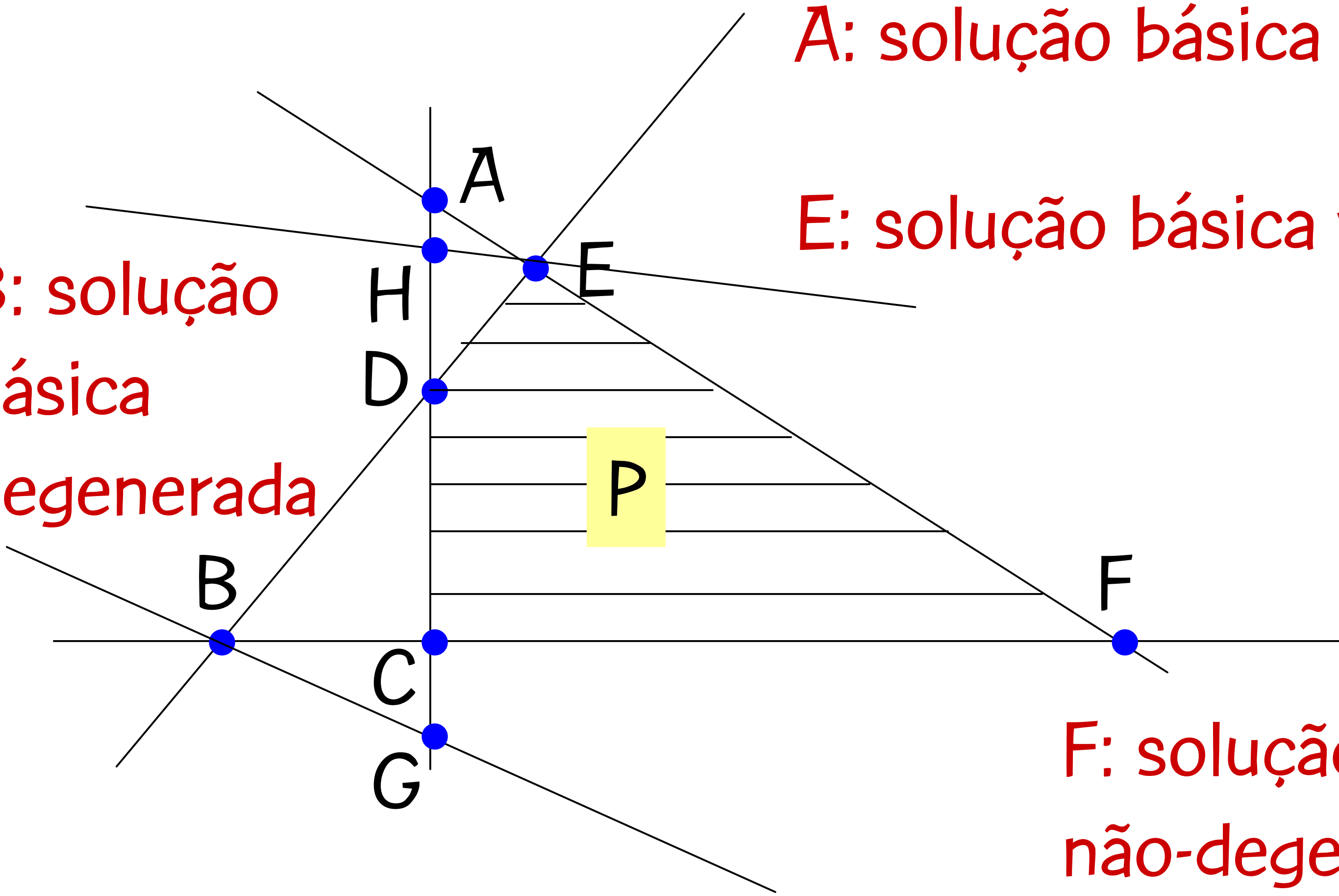
Geometria da PL

- Degeneração: uma solução básica $x \in R^n$ é degenerada se há mais de n restrições ativas em x.
- Exemplo:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 8 \\ x_2 + 6x_3 &\leq 12 \\ x_1 \qquad\qquad &\leq 4 \\ x_2 \qquad &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- $x = (2,6,0)$ solução básica viável não-degenerada (3 ativas)
- $x = (4,0,2)$ solução básica viável degenerada (4 ativas)

Geometria da PL



A: solução básica

E: solução básica viável degenerada

B: solução básica degenerada

F: solução básica viável não-degenerada

Geometria da PL

- Degeneração na forma canônica:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8$$
$$x_2 + 6x_3 \leq 12$$
$$x_1 \leq 4$$
$$x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Geometria da PL

- Inserindo-se variáveis de folga:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8$$

$$x_2 + 6x_3 + x_5 = 12$$

$$x_1 + x_6 = 4$$

$$x_2 + x_7 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Geometria da PL

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .x = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Base formada pelas colunas A_1, A_2, A_3 e A_7:

Fazer $x_4 = x_5 = x_6 = 0$.

Resolvendo-se o sistema $B.x_B = b$ para as demais variáveis:

$x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_7 = 6$

Base degenerada: quatro variáves nulas, e não apenas três.

Geometria da PL

- Considera-se um problema de programação linear formulado na forma canônica e $P = \{x \in R^n: A.x = b, x \geq 0\}$ o poliedro associado às suas restrições. Sejam x uma solução básica e m o número de linhas de A. O vetor x é uma solução básica degenerada se mais de n-m de suas componentes são nulas.
- Múltiplas bases correspondem à mesma solução básica degenerada. No exemplo anterior, as bases $\{A_1, A_2, A_3, A_7\}$, $\{A_1, A_4, A_3, A_7\}$, $\{A_1, A_5, A_3, A_7\}$ e $\{A_1, A_6, A_3, A_7\}$ correspondem à mesma solução básica degenerada $x_1 = 4$, $x_3 = 2$, $x_7 = 6$, $x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$.

Geometria da PL

- A degeneração tem conseqüências importantes na queda de desempenho dos resolvedores de problemas de programação linear.

Geometria da PL

- Nem todo poliedro tem um ponto extremo:
  $x_1+x_2 \geq 1$ em R^2
- A existência de um ponto extremo depende do poliedro conter ou não uma reta infinita.
- Diz-se que um poliedro $P \subset R^n$ contém uma reta se existem um vetor $x \in P$ e um vetor não-nulo $d \in R^n$ tal que $x + \lambda.d \in P$ para qualquer escalar λ.

Geometria da PL

- Teorema: Suponha-se que o poliedro $P = \{x \in R^n: a_i.x \geq b_i, i=1,...,m\}$ seja não vazio. Então, as afirmações abaixo são equivalentes:
  - O poliedro P tem pelo menos um ponto extremo.
  - O poliedro P não contém uma reta.
  - Há n vetores da família $a_1, a_2, ..., a_m$ que são linearmente independentes.

Geometria da PL

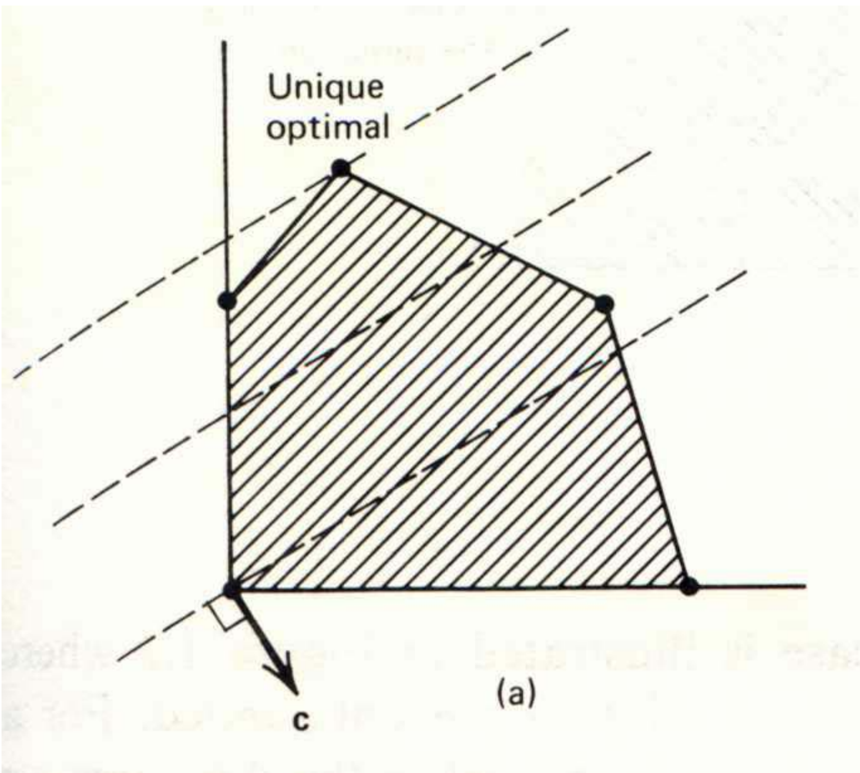
- Um poliedro limitado não pode conter uma reta.
- O conjunto $\{x \in R^n: x \geq 0\}$ é limitado, logo não contém uma reta.
- Como um poliedro na forma canônica está contido em $\{x \in R^n: x \geq 0\}$, ele não pode conter uma reta.
- Qualquer poliedro limitado não-vazio e qualquer poliedro não-vazio na forma canônica contém pelo menos um ponto extremo, ou seja, uma solução básica viável.

Geometria da PL

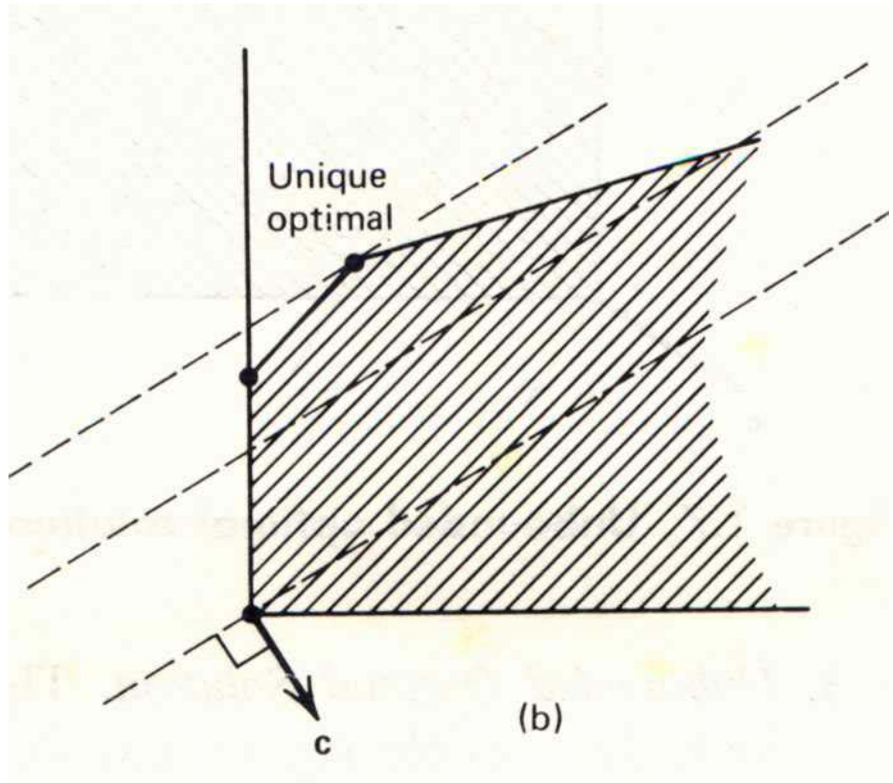
- <u>Teorema da otimalidade</u>: Considera-se o problema de programação linear de minimizar a função objetivo c.x sobre um poliedro P. Suponha-se que P tenha pelo menos um ponto extremo e que exista uma solução ótima. Então, existe pelo menos uma solução ótima que é um ponto extremo de P.

Geometria da PL

- Solução ótima finita única:



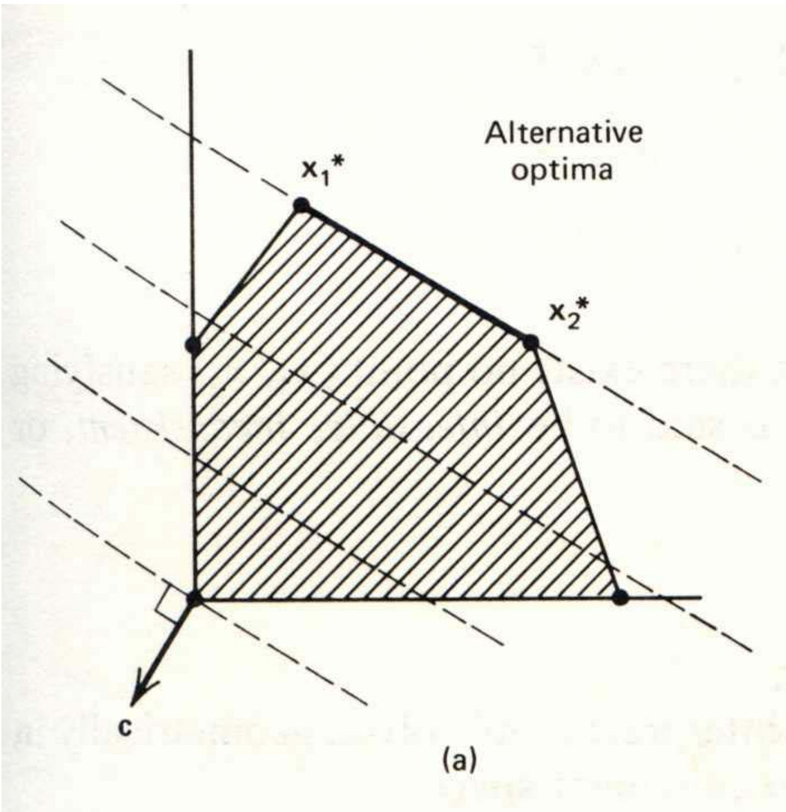
Região viável limitada



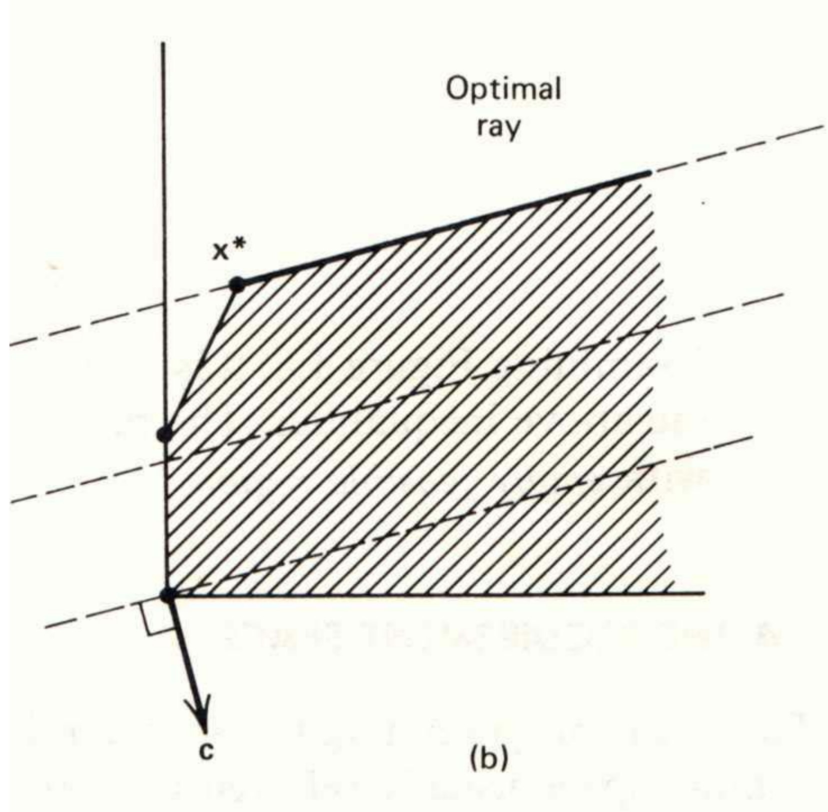
Região viável não-limitada

Geometria da PL

- Soluções ótimas finitas alternativas:



Região viável limitada

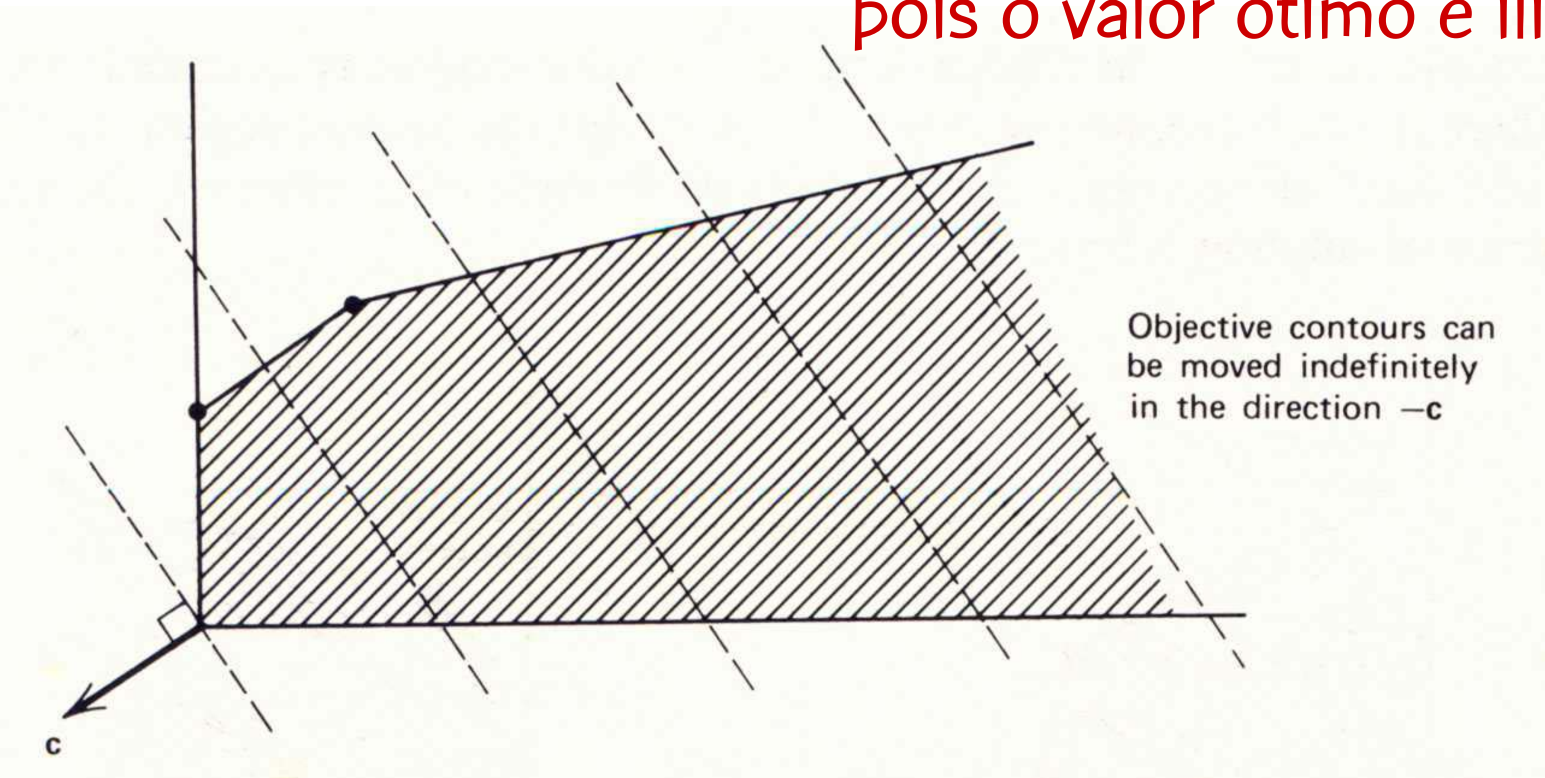


Região viável não-limitada

Geometria da PL

- Valor ótimo ilimitado:

Não existe solução ótima, pois o valor ótimo é ilimitado



Geometria da PL

- Teorema da otimalidade: Considera-se o problema de programação linear de minimizar a função objetivo c.x sobre um poliedro P não-vazio. Então, ou o custo ótimo é igual a $-\infty$ (valor ilimitado) ou existe uma solução ótima (em um ponto extremo).

Geometria da PL

Resumindo...

- (a) Se o conjunto de soluções viáveis é não-vazio e limitado, então existe uma solução ótima. Além disso, existe uma solução ótima que é um ponto extremo.
- (b) Se o conjunto de soluções viáveis é ilimitado, então existe uma solução ótima que é um ponto extremo ou o valor ótimo é $-\infty$.

Geometria da PL

Resumindo...

- Supõe-se que o valor ótimo seja finito e que o conjunto de soluções viáveis contenha pelo menos um ponto extremo. Como há um número finito de pontos extremos, o PPL pode ser resolvido em um número finito (embora eventualmente muito grande) de passos por enumeração.
- Método Simplex: procedimento sistemático que se move de um ponto extremo para outro, sem necessitar enumerar todos.

Geometria da PL

Resumindo...

- Pontos extremos estão associados a soluções básicas viáveis.
- Há n restrições ativas (todas as m de igualdade e n-m de desigualdade) em cada ponto extremo.
- Considerando-se o PPL na forma canônica, cada solução básica é obtida fixando-se (n-m) variáveis (não-básicas) em zero e calculando-se as demais resolvendo o sistema $B.x_B = b$, cuja solução é $x_B = B^{-1}.b$, onde B é a matriz formada pelas colunas associadas às variáveis básicas.

Método Simplex

Dados:

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)_{1\times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

Variáveis:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

Problema na forma canônica:

minimizar $c.x$

sujeito a : $A.x = b$

$x \geq 0$

Método Simplex

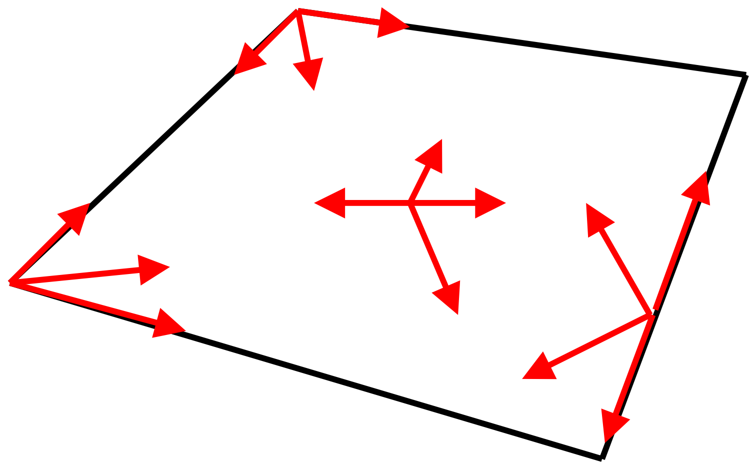
- Se um PPL na forma canônica tem uma solução ótima, então existe uma solução básica viável (ponto extremo) que é ótima.
- O método Simplex procura a solução ótima movendo-se de uma solução básica viável para outra através das arestas da região viável, sempre diminuindo o valor da função objetivo.
- O algoritmo termina ao chegar numa solução básica viável onde todas arestas levam a aumento de custo.

Método Simplex

- Métodos de busca local: partem de uma solução viável, procuram sempre por uma solução vizinha de menor custo e terminam quando tal solução vizinha inexiste $\Rightarrow$ ótimo local
- PPL: soluções básicas viáveis adjacentes são vizinhas.
- PPL: ótimo local também é ótimo global
- Problema: como encontrar uma uma direção (aresta) de diminuição de custo na vizinhança de uma dada solução?

Método Simplex

- Seja $x \in P$: então, um vetor $d \in R^n$ é uma direção viável em x se existe um escalar θ tal que $x + \theta.d \in P$.



Método Simplex

- Seja x uma solução básica e B(1), ..., B(m) os índices das variáveis básicas. Seja ainda

$$B = \lfloor A_{B(1)} \quad A_{B(2)} \quad \ldots \quad A_{B(m)} \rfloor$$

a matriz básica correspondente. Então, $x_i = 0$ para qualquer variável não-básica e o vetor de variáveis básicas é dado por

$$x_B = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \\ \ldots \\ x_{B(m)} \end{pmatrix} = B^{-1}.b$$

Método Simplex

- Considera-se a possibilidade de mover de x para uma nova solução $x + \theta.d$ selecionando-se uma variável não-básica x_j (até então igual a zero) e aumentando-a até um valor θ, mantendo todas as demais variáveis não-básicas iguais a zero.
- Então, $d_j = 1$ e $d_i = 0$ para qualquer outra variável não-básica x_i diferente de x_j.
- O novo vetor de variáveis básicas passa a ser $x_B + \theta.d_B$.

Método Simplex

- Como só nos interessam as soluções viáveis, então exige-se que $A.(x + \theta.d) = b$.
- Como x é viável, $A.x = b$.
- Logo, para que as restrições de igualdade sejam satisfeitas para $\theta > 0$, é necessário que $A.d = 0$:

$$0 = A.d = \sum_{i=1}^{n} A_i.d_i = \sum_{i=1}^{m} A_{B(i)}.d_{B(i)} + A_j = B.d_B + A_j$$

- Como a matriz B é inversível, então a direção $d_B = -B^{-1}.A_j$.

Método Simplex

- A direção d assim construída é chamada de direção básica j.
- Mostramos que as restrições de igualdade são respeitadas quando se move ao longo desta direção d. Mas o que acontece com as restrições de não-negatividade?
- As demais variáveis não-básicas diferentes de x_j não são afetadas, continuando portanto nulas.
- Seja x uma solução básica não-degenerada. Como $x_B > 0$, então $x_B + \theta.d > 0$ para θ suficientemente pequeno.

Método Simplex

- Como varia o custo da solução a medida em que se desloca ao longo de uma direção básica?
- Se d é a j-ésima direção básica, a variação no custo da solução obtida após um deslocamento de valor θ ao longo de d é igual a $c_B.(x_B + \theta.d_B) + c_j.\theta - c_B.x_B.= \theta.(c_B.d_B + c_j)$.
- Como $d_B = -B^{-1}.A_j$, a taxa de variação do custo por unidade da variável j ao longo da j-ésima direção básica é então igual a $c_j - c_B.B^{-1}.A_j$.

Método Simplex

- A taxa de variação do custo ao longo da j-ésima direção básica é então igual a $c_j - c_B.B^{-1}.A_j$.
- Interpretação: c_j é o custo por incremento unitário na variável x_j, enquanto o termo $-c_B.B^{-1}.A_j$. reflete as compensações necessárias para manter as restrições $A.x = b$ viáveis com o aumento de x_j.
- Definição: sejam x uma solução básica, B a matriz básica associada e c_B o vetor de custos das variáveis básicas. Define-se o custo reduzido c'_j da variável x_j como:
  $c'_j = c_j - (c_B.B^{-1}).A_j$

Método Simplex

- Qual é o custo reduzido de uma variável básica $x_{B(i)}$?

  $c'_{B(i)} = c_{B(i)} - c_B.B^{-1}.A_{B(i)} = c_{B(i)} - c_B.e_i = c_{B(i)} - c_{B(i)} = 0,$

  pois $B^{-1}.A_{B(i)}$ é igual ao produto da inversa da matriz básica pela i-ésima coluna da base, que é igual à coluna i da matriz identidade.

- Resumindo:

  $c'_j = c_j - c_B.B^{-1}.A_j$, se x_j é uma variável não-básica

  $c'_j = 0$, se x_j é uma variável básica

Método Simplex

- Repetindo:

  $c'_j = c_j - c_B.B^{-1}.A_j$, se x_j é uma variável não-básica

  $c'_j = 0$, se x_j é uma variável básica

- Se x não é uma solução ótima, como devemos escolher a variável que terá seu valor aumentado?
- Deve-se aumentar uma variável x_j cujo custo reduzido seja negativo!

Método Simplex

- Teorema: Seja uma solução básica viável associada com uma matriz básica B e c' o vetor correspondente de custos reduzidos.
  (a) se $c' \geq 0$, então x é uma solução ótima.
  (b) se x é ótima e não-degenerada, então $c' \geq 0$.
- A matriz básica B é ótima se:

  (a) $B^{-1}.b \geq 0$, isto é, se todas as variáveis básicas são não-negativas (e satisfazem as restrições do problema).
  (b) $c' = c - (c_B.B^{-1}).A \geq 0$, isto é, não é possível reduzir o custo da solução básica correspondente.

Método Simplex

- Hipóteses para o desenvolvimento final do Simplex:
  - Toda solução básica é não degenerada.
  - Solução básica x com todos os custos reduzidos c' das variáveis não-básicas já calculados.
  - Se todos os custos reduzidos são positivos ou nulos, trata-se da solução ótima e o algoritmo pode ser parado.
  - Se existe uma variável x_j de custo reduzido $c'_j < 0$, então a j-ésima direção básica d é uma direção de redução de custo.
  - Ao longo desta direção, apenas a variável não-básica x_j torna-se positiva e entra na base.

Método Simplex

- Quando se move a partir de x ao longo da direção d, são obtidos pontos da forma $x + \theta.d$ com $\theta > 0$.
- Como o custo da solução diminui ao longo desta direção, deve-se fazer o maior deslocamento possível, que é dado por $\theta^* = \max \{\theta \geq 0: x + \theta.d \in P\}$.
- A redução no custo é dada por $\theta^*.c'_j$.
- Mostrou-se que $A.d = 0$ e que as restrições de igualdade não serão violadas.
- Então, $x + \theta.d$ só pode se tornar inviável se uma das restrições de não-negatividade passar a ser violada.

Método Simplex

- (a) Se $d \geq 0$, então $x + \theta.d \geq 0$ para qualquer $\theta \geq 0$. A solução nunca se torna inviável e faz-se $\theta^* = +\infty$: solução ótima é ilimitada.
- (b) Se $d_i < 0$ para alguma variável x_i, a restrição $x_i + \theta.d_i \geq 0$ equivale a $\theta \leq -x_i/d_i$. Esta restrição deve ser satisfeita para todas os índices i com $d_i < 0$. Assim, o maior valor possível de θ é dado por

$$\theta^* = \min_{\{i:d_i<0\}} \left\{ -\frac{x_i}{d_i} \right\} = \min_{\{i=1,\ldots,m:d_{B(i)}<0\}} \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\}$$

Método Simplex

- Uma vez o valor de θ^* determinado, e assumindo-se que seja finito, move-se para a nova solução viável $y = x + \theta^*.d$.
- Como $x_j = 0$ (variável não-básica) e $d_j = 1$, obtem-se $y_j = \theta^*$ na nova solução: a variável de índice j torna-se básica.
- Seja r o índice da variável básica que definiu θ^*:

$$\theta^* = \min_{\{i=1,\ldots,m:d_{B(i)}<0\}} \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\} = -\frac{x_{B(r)}}{d_{B(r)}}$$

- Como $d_{B(r)} < 0$, então $x_{B(r)} + \theta^*.d_{B(r)} = 0$: a variável de índice r sai da base.

Método Simplex

- O método simplex é iniciado com uma solução básica viável (ponto extremo, cuja existência já foi provada).

$$\text{minimizar } c.x$$

$$\text{sujeito a : } A.x = b$$

$$x \geq 0$$

- Criar problema com variáveis artificiais.

- Solução básica inicial x = 0 e y = b.
- Resolver o novo problema.
- y* = 0, problema viável e base inicial.
- y* > 0, problema inviável.

$$\text{minimizar } \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$\text{sujeito a : } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j + y_i = b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x, y \geq 0$$

Método Simplex

Cada iteração corresponde aos seguintes passos:

1. Iniciar com uma base formada pelas colunas básicas $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ e com uma solução básica viável x.
2. Calcular os custos reduzidos $c'_j = c_j - (c_B.B^{-1}).A_j$ para todas as variáveis não básicas j. Se todos são positivos, a solução corrente é ótima, senão escolher algum j com $c'_j < 0$.
3. Calcular $d_B = -B^{-1}.A_j$. Se todos as componentes de d_B forem positivas, então $\theta^* = +\infty$, o valor ótimo é $-\infty$ e o algoritmo termina.

Método Simplex

4. Se alguma componente de $d_B = -B^{-1}.A_j$ for negativa, calcular

$$\theta^* = \min_{\{i=1,\ldots,m:d_{B(i)}<0\}} \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\} = -\frac{x_{B(r)}}{d_{B(r)}}$$

5. Formar uma nova base substituindo a coluna $A_{B(r)}$ pela coluna A_j. Na nova solução básica viável y obtida após esta mudança de base, os valores das variáveis básicas são $y_j = \theta^*$ e $y_{B(i)} = x_{B(i)} + \theta^*.d_{B(i)}$ para qualquer $i \neq r$.

Método Simplex

- Supondo-se que o PPL seja viável, o método Simplex termina após um número finito de iterações com uma solução básica viável ótima ou mostrando que o custo ótimo é $-\infty$.
- Implementação é simples, mas requer muitos cuidados para ser eficiente (solução inicial, degeneração, tratamento de matrizes esparsas, determinantes próximos de zero, atualização rápida da base e de sua inversa, etc.).
- Criador do método Simplex: Dantzig (1947)

Método Simplex

- Complexidade de pior caso: proporcional a 2^n.
- Na média, o número de iterações cresce linearmente.
- Excelente desempenho médio.
- Resolvedores: MPSX, XMP, ..., OSL, ..., LINDO, CPLEX, XPRESS, GLPK, ..., EXCEL
- Métodos de pontos interiores: percorrem o interior do poliedro, e não vértices e arestas.
  - Karmarkar (1984)
  - Tão bons ou melhores que o Simplex para muitas classes de problemas.

Dualidade

- O problema dual de um PPL é outro PPL satisfazendo:

PRIMAL	minimizar	maximizar	DUAL
restrições	$\geq b_i$	≥ 0	variáveis
	$\leq b_i$	≤ 0	
	$= b_i$	livre	
variáveis	≥ 0	$\leq c_j$	restrições
	≤ 0	$\geq c_j$	
	livre	$= c_j$	

Dualidade

- Problema PRIMAL na forma canônica:

$$\text{minimizar } c.x$$
$$\text{sujeito a : } A.x = b$$
$$x \geq 0$$

- Problema DUAL:

$$\text{maximizar } u.b$$
$$\text{sujeito a : } u.A \leq c$$

Dualidade

- Problema DUAL:

$$\text{maximizar } u.b$$

$$\text{sujeito a} : u.A \leq c$$

- Problema DUAL do DUAL:

$$\text{minimizar } c.y$$

$$\text{sujeito a} : A.y = b$$

$$y \geq 0$$

- O DUAL do DUAL é o próprio problema PRIMAL.

Dualidade

- Teorema fraco da dualidade: se x é uma solução viável do primal e u é uma solução viável do dual, então $u.b \leq c.x$.
- Teorema forte da dualidade: se x^* é uma solução ótima do primal e u^* é uma solução ótima do dual, então $u^*.b = c.x^*$.
- É simples provar que se B é a base ótima do primal (com $x^*_B = B^{-1}.b$ e $c.x^* = c_B.B^{-1}.b$), então $u^* = c_B.B^{-1}$.
- Se a solução ótima do primal (resp. dual) é ilimitada, então o dual (resp. primal) é inviável.

Dualidade

- Teorema das folgas complementares: sejam x e u soluções viáveis para os problemas primal e dual, respectivamente. Estas soluções são ótimas se e somente se:

  (a) $u_i.(a_i.x - b_i) = 0, \quad \forall i$

  (b) $(c_j - u.A_j).x_j = 0, \quad \forall j$

Dualidade

- Variáveis duais como custos marginais:

$$\text{minimizar } c.x$$
$$\text{sujeito a : } A.x = b$$
$$x \geq 0$$

- base B ótima não-degenerada
- solução ótima $x^*_B = B^{-1}.b > 0$
- custo ótimo $= c_B.B^{-1}.b = u^*.b$

Problema perturbado (d pequeno):

$$\text{minimizar } c.x$$
$$\text{sujeito a : } A.x = b + d$$
$$x \geq 0$$

- mesma base B é ótima: $B^{-1}.(b+d) > 0$
- custo ótimo $= c_B.B^{-1}.(b+d) = u^*(b+d)$
- variação no custo: $u^*.d$
- u^*: custos marginais dos recursos!

Dualidade

- Interpretação econômica do dual: problema da dieta
- Coluna A_j: conteúdos nutricionais do alimento j (slide 36).
- Vetor b: conteúdo nutricional ideal que se deseja atingir.
- u_i: preço "justo" que se desejaria pagar pelo nutriente i.
- Uma unidade do alimento j tem valor c_j no mercado de alimentos, mas tem valor $u.A_j$ se cotada no mercado de nutrientes.
- Folgas complementares asseguram que todo alimento usado para sintetizar o nutriente ideal deve estar cotado consistentemente nos dois mercados: $x_j > 0 \Rightarrow c_j = u.A_j$

Dualidade

- A dualidade relaciona as duas maneiras alternativas de contabilizar custos.
- O valor do alimento ideal calculado pelo mercado de alimentos é $c.x^*$ (onde x^* é a solução ótima do primal).
- O valor do alimento ideal calculado pelo mercado de nutrientes é $u^*.b$ (onde u^* são os preços ideais).
- A relação de dualidade $c.x^* = u^*.b$ garante que quando os preços estão corretos, os dois métodos de contabilização dos custos dão os mesmos resultados.

Análise de sensibilidade

- PPL na forma canônica:

$$\text{minimizar } c.x$$

$$\text{sujeito a : } A.x = b$$

$$x \geq 0$$

- Como é afetada a solução de um PPL devido a modificações simples na sua formulação?
- Como recalcular a solução ótima após estas modificações?
- Diversos casos podem ser tratados diretamente usando dualidade e os conceitos já estudados.

Análise de sensibilidade

- (1) Uma base ótima continua ótima após a adição de uma nova variável x_{n+1}? Como reotimizar um problema após a adição desta nova variável?
- (2) Como criar uma nova base e reotimizar o problema após a inclusão de uma nova restrição de igualdade?
- (3) Qual é a faixa de variação do vetor de recursos b que mantém a base ótima inalterada?
- (4) Qual é a faixa de variação dos custos c que mantém a base ótima inalterada?
- (5) Como mudanças em uma coluna afetam a solução?

Extensões

- Sistemas de grande porte
- Decomposição: geração de colunas, Dantzig-Wolfe, Benders
- Programação estocástica (cenários)
- Problemas de fluxos em redes
- Métodos de pontos interiores: percorrem o interior do poliedro, e não os vértices e arestas.
- Programação inteira
- ...

Resolvedores de PL

- CPLEX
  - Empresa: ILOG
  - Resolvedor lider no mercado
  - Programação linear, linear inteira, quadrática
  - Alto desempenho
  - Muito flexivel
  - Resolve problemas com milhões de variáveis e restrições
  - Parte de um "solver" mais geral que inclui e.g. programação por restrições e linguagem de modelagem
  - http://www.ilog.com/products/cplex/

Resolvedores de PL

- Xpress-MP
  - Empresa: Dash Optimization
  - Compete com o CPLEX
  - Programação linear, linear inteira, quadrática
  - Alto desempenho
  - Muito flexível
  - Resolve problemas com milhões de variáveis e restrições
  - Também possui uma linguagem de modelagem (AMPL)
  - http://www.dashoptimization.com

Resolvedores de PL

- LINDO
  - Empresa: LINDO Systems Inc.
  - Programação linear, linear inteira, quadrática
  - Muito simples de instalar e usar
  - http://www.lindo.com

Resolvedores de PL

- GLPK
  - Software livre
  - Código em ANSI C disponível na web
  - Programação linear e linear inteira
  - http://www.gnu.org/software/glpk/glpk.html

Resolvedores de PL

- *Survey* atualizado disponível em: http://www.lionhrtpub.com/orms/surveys/LP/LP-survey.html

Resolvendo problemas

- Digitar o modelo diretamente na interface
  - Forma mais direta de resolver problemas simples.
  - Inviável para problemas de tamanho médio
- Criar um arquivo com o modelo do problema
  - Necessário programar (C, Basic, Java) para gerar o modelo.
  - Permite tratar problemas grandes.
  - Não é flexivel.
- Chamar funções do resolvedor através de bibliotecas.
  - É a forma mais flexivel.
  - Permite interagir com o resolvedor enquanto o modelo é resolvido.

Sintaxe do Lindo

- Função objetivo:
  - MAX 10 STD + 15 DLX
- Sujeito a:
  - {subject to, such that, S.T., ST}
- Restrições:
  - STD + 2 DLX <= 10
  - Lado direito: apenas valores constantes
  - Lado esquerdo: apenas variáveis e coeficientes
- Fim:
  - END

Escalonamento de funcionários

- Uma loja quer contratar funcionários para atendimento ao público durante os sete dias da semana.
  - Cada funcionário ganha R$ 300 por semana, mais um extra de R$ 25 por trabalhar no sábado e de R$ 35 por trabalhar no domingo.
  - Os funcionários trabalham cinco dias consecutivos e descansam dois.
  - Existem requisitos mínimos de funcionários por dia:

D	S	T	Q	Q	S	S
20	20	13	10	12	16	18

Escalonamento de funcionários

- Objetivo: minimizar o custo de pessoal sujeito ao cumprimento das necessidades de atendimento.

Solução – Variáveis de decisão

- DOM: Quantidade de funcionários que começam a trabalhar nos domingos.
- SEG: Quantidade de funcionários que começam a trabalhar nas segundas feiras.
- TER: Quantidade de funcionários que começam a trabalhar nas terças feiras.
- QUA: Quantidade de funcionários que começam a trabalhar nas quartas feiras.
- QUI: Quantidade de funcionários que começam a trabalhar nas quintas feiras domingos.
- SEX: Quantidade de funcionários que começam a trabalhar nas sextas feiras.
- SAB: Quantidade de funcionários que começam a trabalhar nos sábados.

Solução - Função objetivo

MIN 335 DOM + 300 SEG + 325 TER + 360 QUA + 360 QUI + 360 SEX + 360 SAB

Solução - Restrições

RDOM) DOM + QUA + QUI + SEX + SAB >= 20

RSEG) DOM + SEG + QUI + SEX +SAB >= 20

RTER) DOM + SEG + TER + SEX + SAB >= 13

RQUA) DOM + SEG + TER + QUA + SAB >= 10

RQUI) DOM + SEG + TER + QUA + QUI >= 12

RSEX) SEG + TER + QUA + QUI + SEX >= 16

RSAB) TER + QUA + QUI + SEX + SAB >= 18

Além destas, restrições de não-negatividade.

Solução - Modelo

MIN 335 DOM + 300 SEG + 325 TER + 360 QUA + 360 QUI + 360 SEX + 360 SAB

ST

RDOM) DOM + QUA + QUI + SEX + SAB >= 20

RSEG) DOM + SEG + QUI + SEX +SAB >= 20

RTER) DOM + SEG + TER + SEX + SAB >= 13

RQUA) DOM + SEG + TER + QUA + SAB >= 10

RQUI) DOM + SEG + TER + QUA + QUI >= 12

RSEX) SEG + TER + QUA + QUI + SEX >= 16

RSAB) TER + QUA + QUI + SEX + SAB >= 18

Restrições de não-negatividade.

END

Análise dos resultados

- Valor da função objetivo: 7750
- Valor das variáveis:
  - DOM: 2, SEG: 2, TER: 0, QUA: 2, QUI: 7, SEX: 5, SAB: 4
- Quando se altera esta solução ótima?
- Análise de sensibilidade:
  - Coeficientes da função objetivo
  - Lado direito das restrições (para variáveis duais)

Análise - Custos reduzidos

- Variáveis com valor nulo na solução:
  - De quanto deve se modificar o coeficiente da variável na função objetivo para que ela possa deixar de ser nula?
- Quando a variável tem valor diferente de zero na solução, seu custo reduzido é nulo.
- Valor da variável TER na solução: 0
- Custo reduzido da variável TER: 100

Análise - Custos reduzidos

- O que acontece se o coeficiente de TER é reduzido em 90? E em 110?
- Seu custo reduzido só se torna negativo se seu custo diminuir de pelo menos 100 unidades.
- De quanto aumenta o valor da função objetivo se a seguinte restrição é acrescentada?

  RTER2) TER >= 1

Análises - Variáveis de folga

- Há uma variável de folga para cada restrição.
- Variáveis de folga:
  - RQUI = 1
- Isto quer dizer que na solução encontrada a restrição RQUI é cumprida com folga de uma unidade, ou seja, na quinta feira trabalham 13 funcionários quando apenas 12 são necessários.

Análises - Variáveis duais

- Há uma variável dual para cada restrição.
- As variáveis duais dizem de quanto a função objetivo vai "melhorar" se aumentamos de uma unidade o valor do lado direito da restrição.
- Em quanto piora a função objetivo quando se aumenta de 20 para 21 a quantidade de funcionários necessários às segundas feiras?

Análises - Variáveis duais

- A validez das variáveis duais é determinada pelo analise de sensibilidade.
- Aumentar o número de funcionários necessários às segundas feiras para 22, 23 e 24.
- O que acontece quando aumenta para 24?

Problema de planejamento da produção

- Uma fábrica de computadores fabrica os modelos GP1, GP2, GP3, WS1 e WS2.

Sistema	Preço	# discos	# placas
GP1	$ 60.000	0.3	4
GP2	$ 40.000	1.7	2
GP3	$ 30.000	0.0	2
WS1	$ 30.000	1.4	2
WS2	$ 15.000	0.0	1

Problema de planejamento da produção

- Disponibilidade de CPUs: no máximo 7.000 unidades.
- Suprimento de discos: limitado a 3.000 unidades.
- Suprimento de placas de memória limitado a 8.000.
- Demandas máximas:
  - 1800 para GP1, 300 para GP3
  - 3800 para toda a família GP
  - 3200 para toda a família WS
- Pedidos já recebidos:
  - 500 GP2
  - 500 WS1, 400 WS2

Problema de planejamento da produção

- Objetivo: maximizar o lucro da empresa.

Problema de planejamento da produção

- Variáveis:

  x_i: quantidade de sistemas produzidos do tipo GPj, j=1,2,3

  x_4: quantidade de sistemas produzidos do tipo WS1

  x_5: quantidade de sistemas produzidos do tipo WS2

Problema de planejamento da produção

maximizar $60x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 30x_4 + 15x_5$

sujeito a:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 7000$	disponibilidade de CPUs
$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 8000$	disponibilidade de placas
$0.3x_1 + 1.7x_2 + 1.4x_4 \leq 3000$	disponibilidade de discos
$x_1 \leq 1800$	demanda máxima de GP-1
$x_3 \leq 300$	demanda máxima de GP-3
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3800$	demanda máxima de GP
$x_4 + x_5 \leq 3200$	demanda máxima de WS
$x_2 \geq 500$	demanda mínima de GP-2
$x_4 \geq 500$	demanda mínima de WS-1
$x_5 \geq 400$	demanda mínima de WS-2
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$	

Problema de planejamento da produção

- Analise a solução e responda:
  - Quais recursos estão limitando o lucro da empresa?
    - CPUs?
    - Placas?
    - Discos?

Problema de planejamento da produção

- Se não existirem outros custos a serem considerados:
  - Comprar-se-ia discos a $ 15.000 para aumentar a produção?
  - Comprar-se-ia placas a $ 5.000 para aumentar a produção?

Problema de planejamento da produção

- A empresa quer avaliar outro modo de produção para economizar discos.
  - Produzir todos os computadores GP1 sem discos
  - Produzir todos os computadores GP2 com um disco
  - Produzir todos os computadores WS1 com um disco
- Como muda a formulação?
- Quanto será o lucro?

Problema de planejamento da produção

$$\text{maximizar } 60x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 30x_4 + 15x_5$$

sujeito a :

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 7000$	disponibilidade de CPUs
$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 8000$	disponibilidade de placas
$0.3x_1 + 1.7x_2 + 1.4x_4 \leq 3000$	disponibilidade de discos
$x_1 \leq 1800$	demanda máxima de GP-1
$x_3 \leq 300$	demanda máxima de GP-3
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3800$	demanda máxima de GP
$x_4 + x_5 \leq 3200$	demanda máxima de WS
$x_2 \geq 500$	demanda mínima de GP-2
$x_4 \geq 500$	demanda mínima de WS-1
$x_5 \geq 400$	demanda mínima de WS-2
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$	

Problema de planejamento da produção

$$\text{maximizar } 60x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 30x_4 + 15x_5$$

sujeito a :

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 7000$	disponibilidade de CPUs
$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 8000$	disponibilidade de placas
$x_2 + x_4 \leq 3000$	disponibilidade de discos
$x_1 \leq 1800$	demanda máxima de GP-1
$x_3 \leq 300$	demanda máxima de GP-3
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3800$	demanda máxima de GP
$x_4 + x_5 \leq 3200$	demanda máxima de WS
$x_2 \geq 500$	demanda mínima de GP-2
$x_4 \geq 500$	demanda mínima de WS-1
$x_5 \geq 400$	demanda mínima de WS-2
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$	

Problema de planejamento da produção

- O fabricante poderia tratar a falta de placas de memória utilizando duas placas alternativas nos sistemas GP1, em vez de quatro placas comuns.
  - 4000 placas alternativas se encontram disponiveis.
- Como mudar o modelo para considerar esta posibilidade?
- Aumenta o lucro?
- Conclusão do exmplo

Problema de planejamento da produção

$$\text{maximizar } 60x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 30x_4 + 15x_5$$

sujeito a :

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 7000$	disponibilidade de CPUs
$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 8000$	disponibilidade de placas
$x_2 + x_4 \leq 3000$	disponibilidade de discos
$x_1 \leq 1800$	demanda máxima de GP-1
$x_3 \leq 300$	demanda máxima de GP-3
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3800$	demanda máxima de GP
$x_4 + x_5 \leq 3200$	demanda máxima de WS
$x_2 \geq 500$	demanda mínima de GP-2
$x_4 \geq 500$	demanda mínima de WS-1
$x_5 \geq 400$	demanda mínima de WS-2
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$	

Problema de planejamento da produção

$$\text{maximizar } 60x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 30x_4 + 15x_5$$

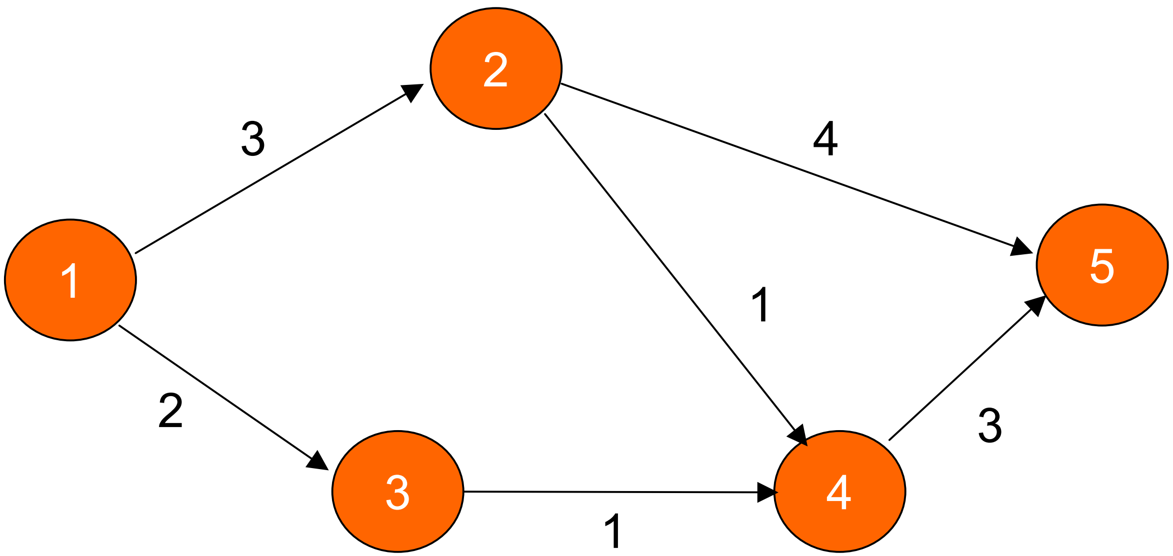
sujeito a :

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 7000$	disponibilidade de CPUs
$2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 8000$	disponibilidade de placas
$2x_1 \leq 4000$	disponibilidade de placas alt.
$x_2 + x_4 \leq 3000$	disponibilidade de discos
$x_1 \leq 1800$	demanda máxima de GP-1
$x_3 \leq 300$	demanda máxima de GP-3
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3800$	demanda máxima de GP
$x_4 + x_5 \leq 3200$	demanda máxima de WS
$x_2 \geq 500$	demanda mínima de GP-2
$x_4 \geq 500$	demanda mínima de WS-1
$x_5 \geq 400$	demanda mínima de WS-2

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Caminho mais curto em uma rede

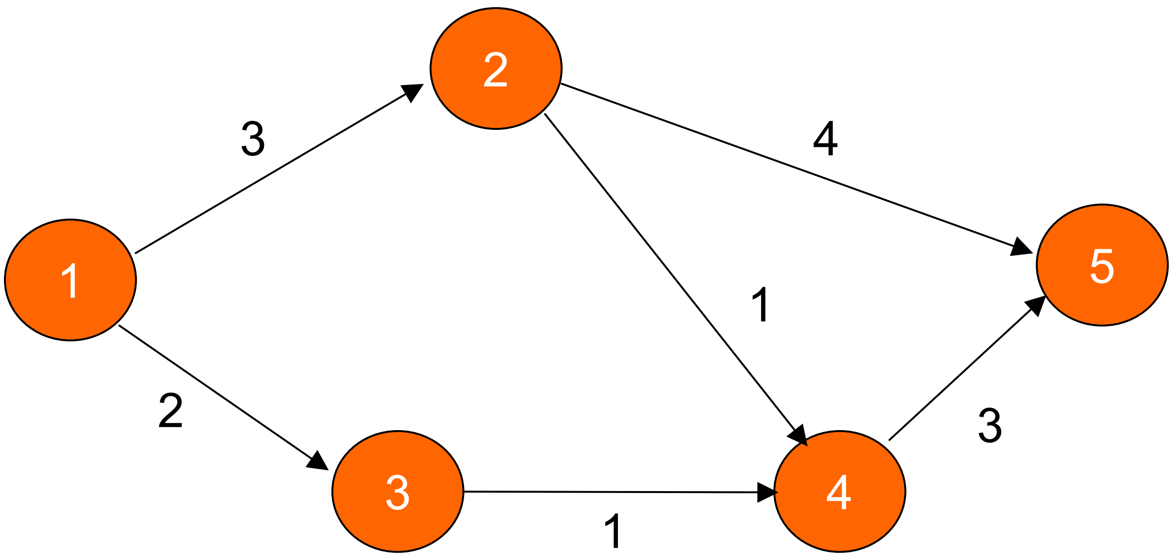
- Dada uma rede com custos (ou comprimentos) associados às sua arestas, determinar o caminho mais curto entre dois nós específicos (nós 1 e 5 abaixo).



O problema equivale a enviar uma unidade de fluxo do nó 1 ao nó 5 a custo mínimo

Fluxo de uma unidade a custo mínimo

- Dada uma determinada rede com custos nas arestas, transportar a custo mínimo uma unidade de fluxo entre os dois nós.



Caminho mais curto em uma rede

min 3 x12 + 2 x13 + x24 + 4 x25 + x34 + 3 x45

st

r1) x12 + x13 = 1

r5) x25 + x45 = 1

r2) x12 - x24 - x25 = 0

r3) x13 - x34 = 0

r4) x24 + x34 - x45 = 0

x12 >= 0

x13 >= 0

x24 >= 0

x25 >= 0

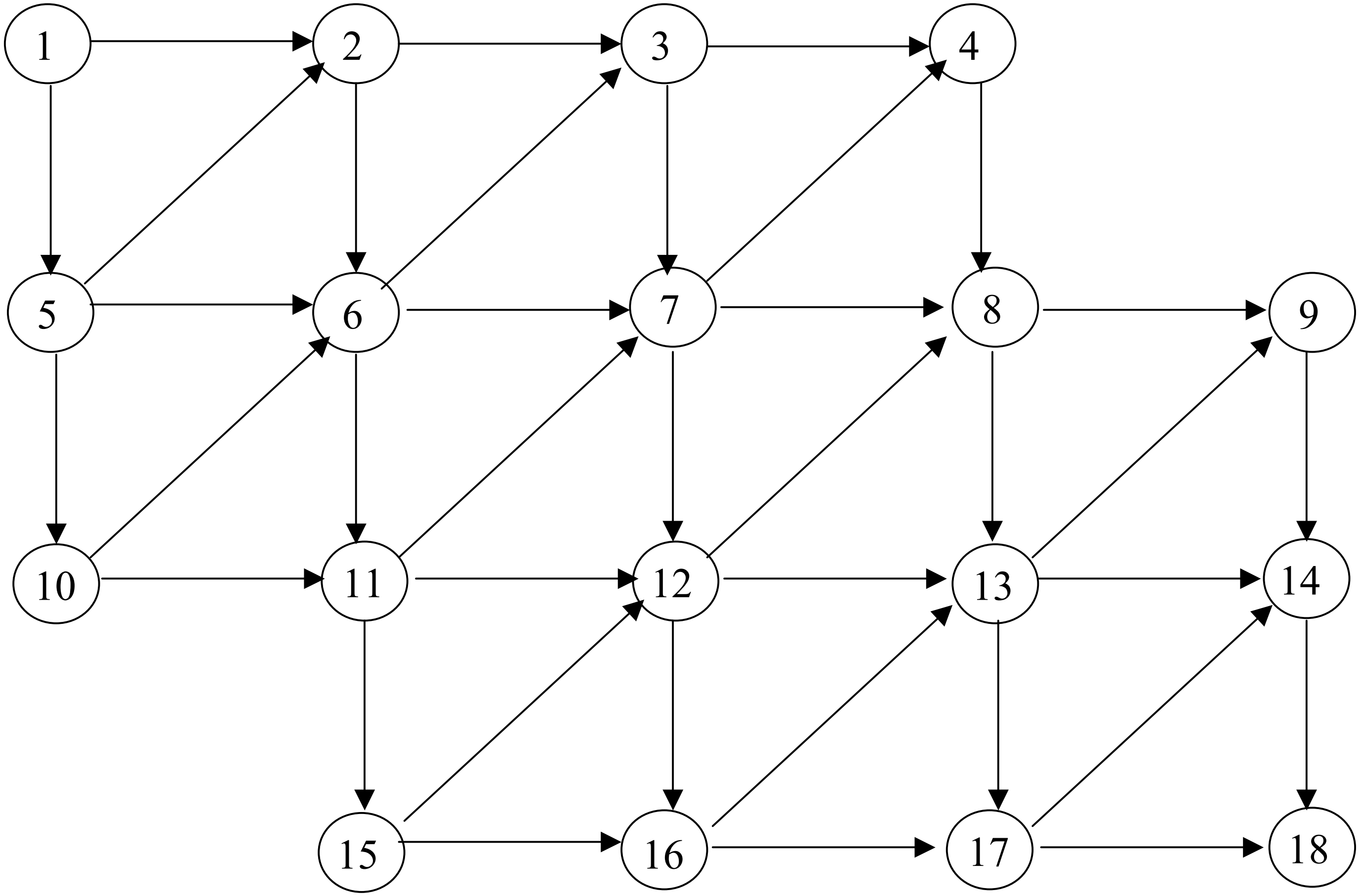
x34 >= 0

x45 >= 0

Exercício – Avaliação

- O grafo a seguir ilustra uma rede de distribuição: centros produtores, armazéns e centros de consumo. Uma empresa produz três tipos de produtos, que devem ser distribuídos da seguinte maneira:
  - Produto A: 50 unidades de produzidas em 1 devem ser enviadas para 18
  - Produto B: 50 unidades de produzidas em 5 devem ser enviadas para 14
  - Produto C: 40 unidades produzidas em 10 devem ser enviadas para 9

Exercício – Avaliação



Exercício – Avaliação

Os valores mínimo e máximo do fluxo total (isto é, considerando-se os três produtos) que pode transitar em cada arco da rede são dados a seguir:

- Arcos horizontais: capacidade mínima = 5, capacidade máxima = 40, custo unitário de transporte = 100
- Arcos verticais: capacidade mínima = 0, capacidade máxima = 20, custo unitário de transporte = 200
- Arcos inclinados: capacidade mínima = 0, capacidade máxima = 30, custo unitário de transporte = 300

Exercício – Avaliação

Existem ainda as seguintes restrições adicionais:

- Os nós 6, 7, 12 e 13 são armazéns e o fluxo total através de cada um deles não pode ser superior a 60 unidades.
- Em nenhum arco horizontal podem passar mais de 30 unidades do produto A.
- Em nenhum arco inclinado podem passar mais de 10 unidades do produto B.
- Em nenhum arco vertical podem passar mais de 10 unidades do produto C.

Exercício – Avaliação

Determine o fluxo ótimo de cada produto a ser transportado em cada arco, de modo a minimizar o custo total de transporte, utilizando um modelo de programação linear. Apresente os resultados, fornecendo:

- O arquivo usado como entrada (impressão) para o LINDO.
- O arquivo de saída (impressão) com os resultados do LINDO.
- Os valores dos fluxos em cada arco sobre uma cópia da rede na transparência 220, indicando também o valor da solução ótima (custo total de transporte ótimo).