Celso Carneiro Ribeiro

Introdução aos Modelos e Métodos de Otimização em Pesquisa Operacional

Parte III – Heurísticas

ONS Operador Nacional do Sistema Elétrico

2004

Parte III – Heurísticas

- Origens
- Motivação
- Algoritmos construtivos
- Métodos de melhoria ou de busca local
- Metaheurísticas:
  - Algoritmos genéticos
  - GRASP, ...
- Aplicações:
  - Programação de tabelas de campeonatos
  - Engenharia de tráfego e roteamento na Internet

Origens

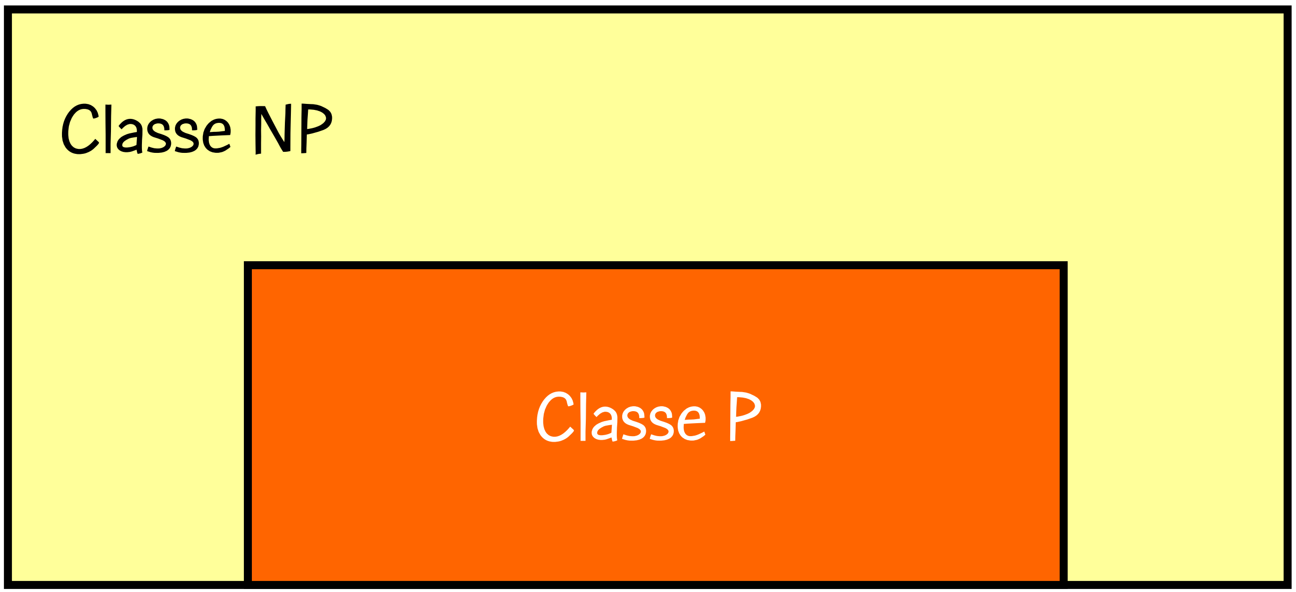
- Algoritmos aproximados para o problema do caixeiro viajante: métodos construtivos, busca local 2-opt, heurística de Lin-Kernighan (1973)
- Técnicas de inteligência artificial para problemas de busca em grafos:
  - Demonstração automática de teoremas, trajeto de robôs, problemas de otimização vistos como busca em grafos
  - Algoritmo A* ("versão" IA de B&B): Nilsson (1971)
  - Aplicações pioneiras no SE brasileiro (anos 70): modelos TANIA (expansão da transmissão) e VENUS (planejamento da expansão)

Motivação

- Visão simplificada do “mundo” dos problemas de decisão:

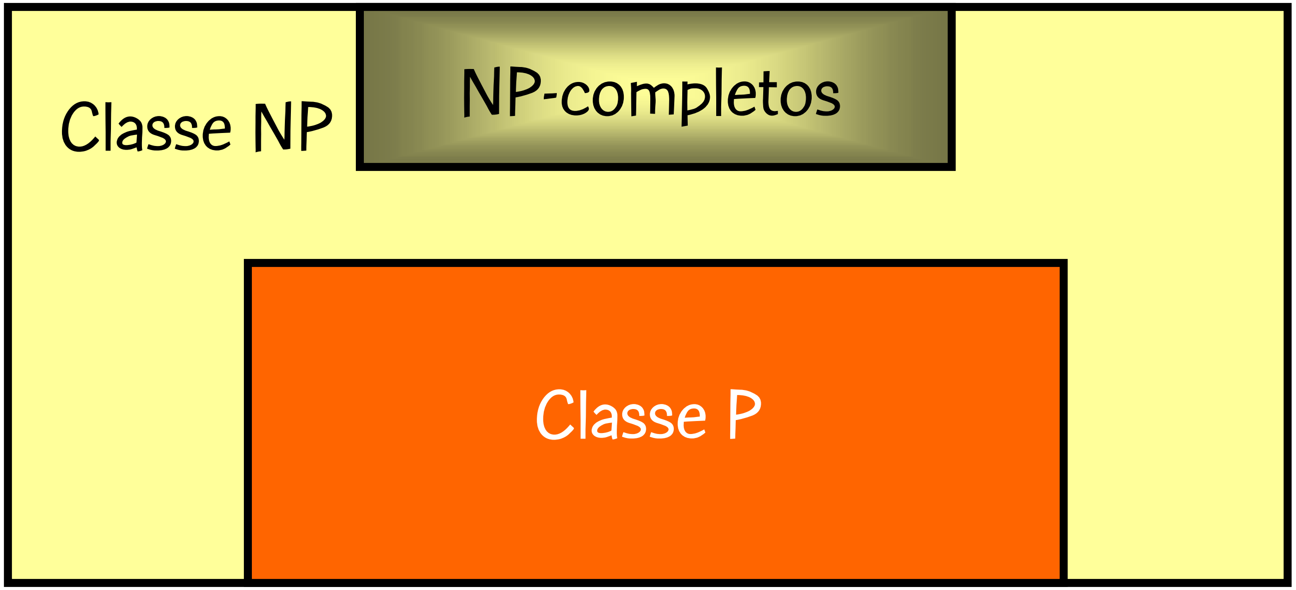
Motivação

- Visão simplificada do “mundo” dos problemas de decisão:



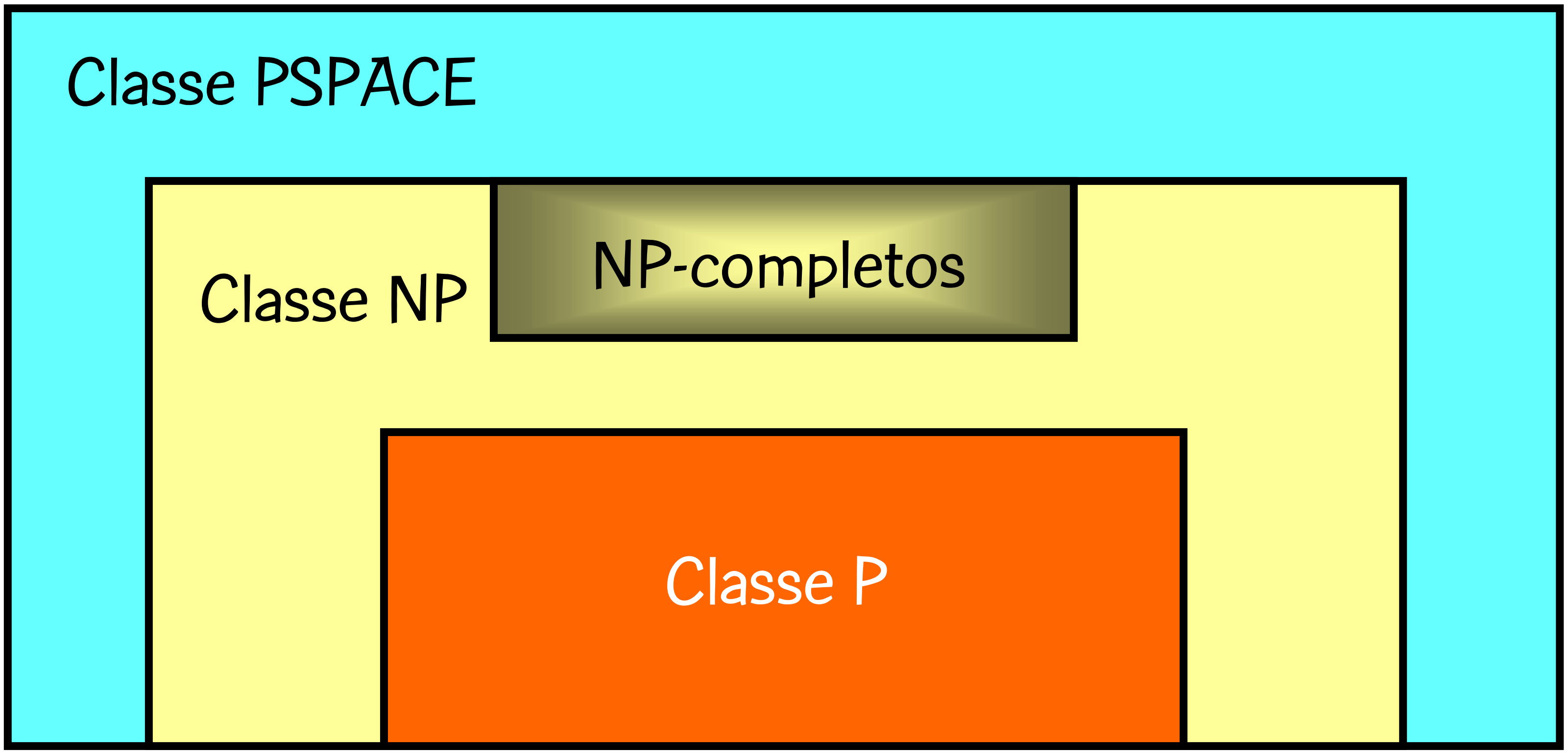
Motivação

- Visão simplificada do "mundo" dos problemas de decisão:



Motivação

- Visão simplificada do “mundo” dos problemas de decisão:



Motivação

- Como tratar na prática os problemas NP-completos?

1. Métodos exatos de complexidade super-polinomial (branch-and-bound, cortes, enumeração, programação dinâmica): se for necessário e se o porte dos problemas assim o permitir.
2. Processamento paralelo: clusters e grids permitem acelerações significativas na prática, utilizando recursos computacionais básicos e com custo reduzido.

Motivação

- Como tratar na prática os problemas NP-completos?

3. Heurísticas: qualquer método aproximado projetado com base nas propriedades estruturais ou nas características das soluções dos problemas, com complexidade reduzida em relação à dos algoritmos exatos e fornecendo, em geral, soluções viáveis de boa qualidade (sem garantia de qualidade)
   - Métodos construtivos
   - Busca local
   - Metaheurísticas

Motivação

- Avanços no estudo e desenvolvimento de heurísticas buscam:
  - Resolver problemas maiores
  - Resolver problemas em tempos menores
  - Obter melhores soluções
- Heurísticas e metaheurísticas permitem resolver problemas de grande porte em tempos realistas, fornecendo sistematicamente soluções ótimas ou muito próximas da otimalidade:
  - Exemplo: problema do caixeiro viajante com milhões de cidades

Bibliografia

- N. Nilsson, “Problem-solving methods in artificial intelligence”, 1971
- N. Nilsson, “Principles of artificial intelligence”, 1982
- J. Pearl, “Heuristics: Intelligent search strategies for computer problem solving”, 1985
- E. Lawler, J. Lenstra, A. Rinnooy Kan e D. Shmoys (eds.), “The traveling salesman problem”, 1985
- C. Reeves (ed.), “Modern heuristic techniques for combinatorial problems”, 1993

Bibliografia

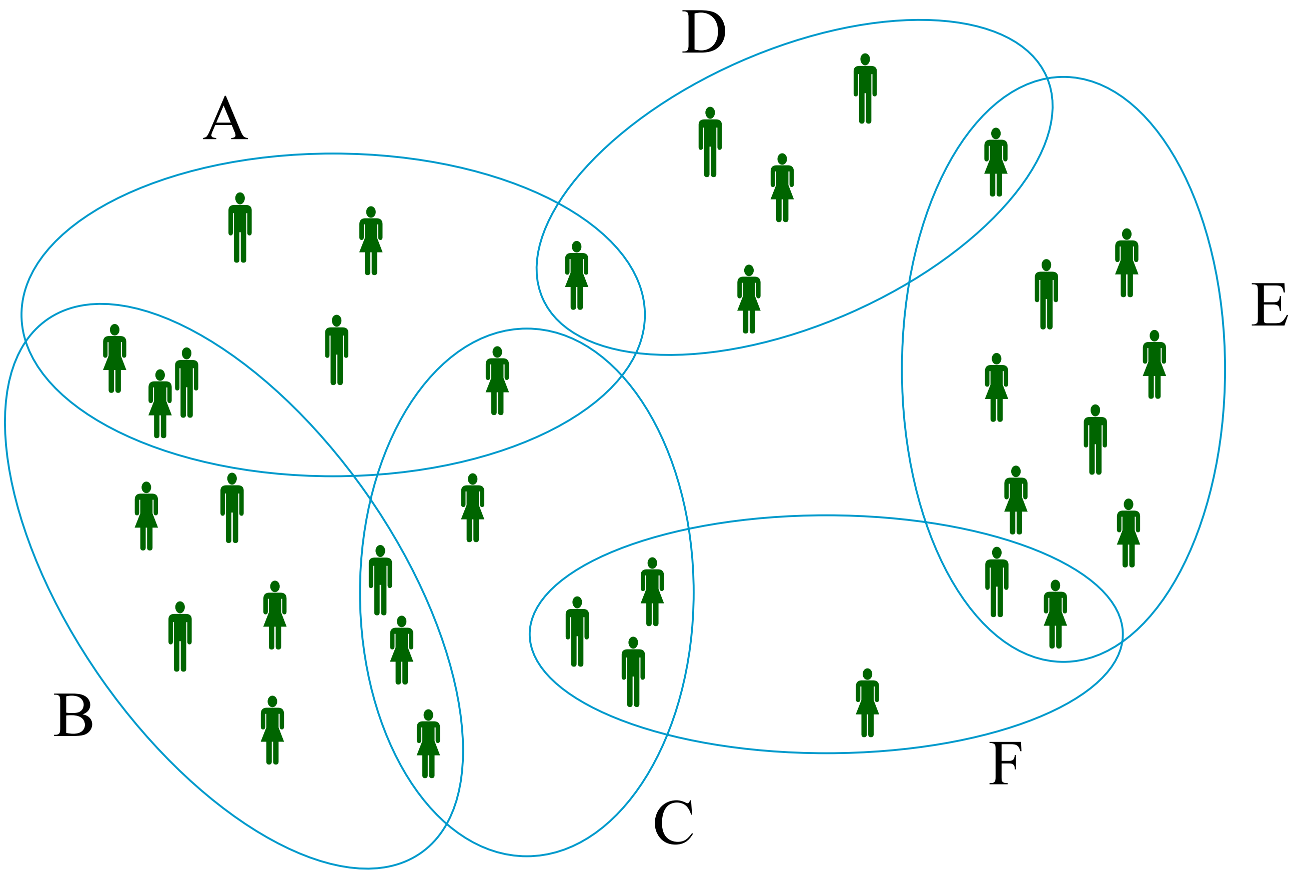
- J. Teghem e M. Pirlot (eds.), "Optimisation approchée en recherche opérationnelle", 2002
- C. Ribeiro e P. Hansen (eds.), "Essays and surveys in metaheuristics", 2002
- F. Glover e G. Kochenberger (eds.), "Handbook of metaheuristics", 2003
- C. Ribeiro, "Notas de aula do curso de metaheurísticas", http://www.inf.puc-rio.br/~celso/grupo_de_pesquisa.htm

Motivação

- Problema:
  - Alunos cursam disciplinas.
  - Cada disciplina tem uma prova.
  - Há um único horário em que são marcadas provas em cada dia.
  - Provas de duas disciplinas diferentes não podem ser marcadas para o mesmo dia se há alunos que cursam as duas disciplinas.
- Montar um calendário de provas:
  - satisfazendo as restrições de conflito e ...
  - ... minimizando o número de dias necessários para realizar todas as provas.

Motivação

- Modelagem por conjuntos:

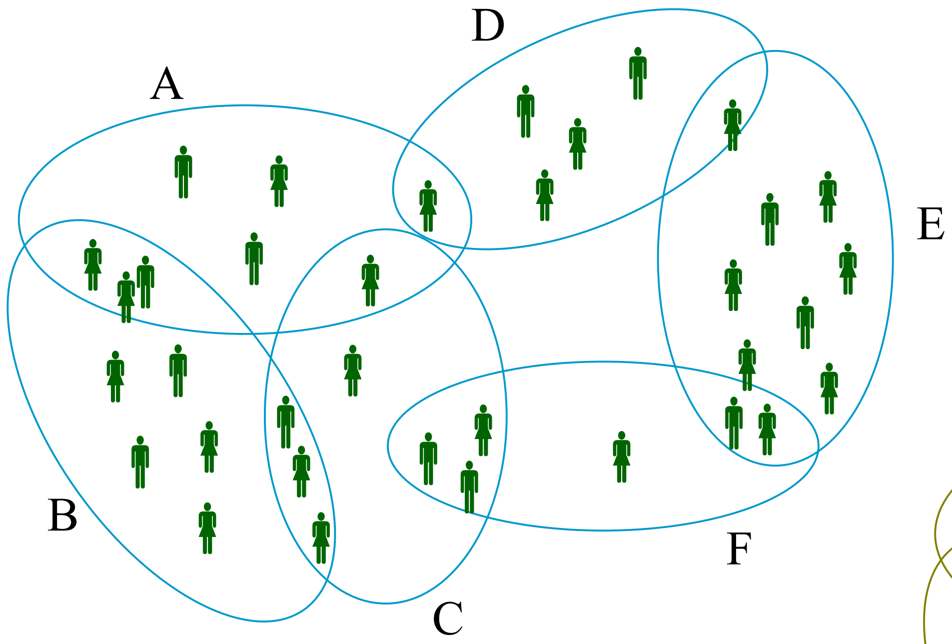


Motivação

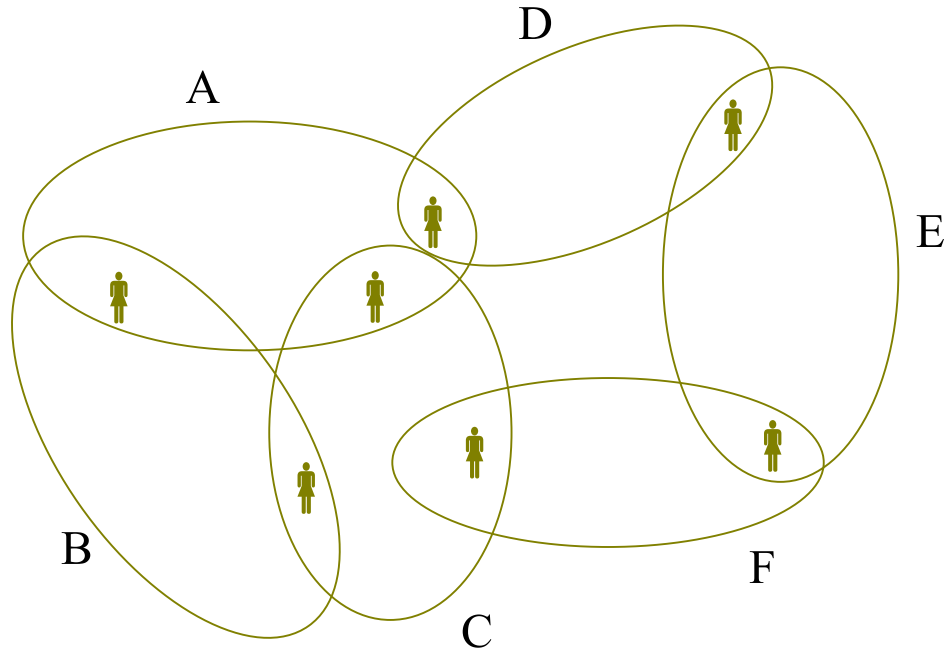
- Os alunos que fazem apenas uma disciplina influem na modelagem?
  - Não!
- O número de alunos que cursam simultaneamente um par de disciplinas influi na modelagem?
  - Não!
  - E se o objetivo fosse minimizar o número de alunos “sacrificados”?
  - Neste caso, sim!
- Este modelo pode ser simplificado?

Motivação

- Simplificação tratando-se apenas as interseções:

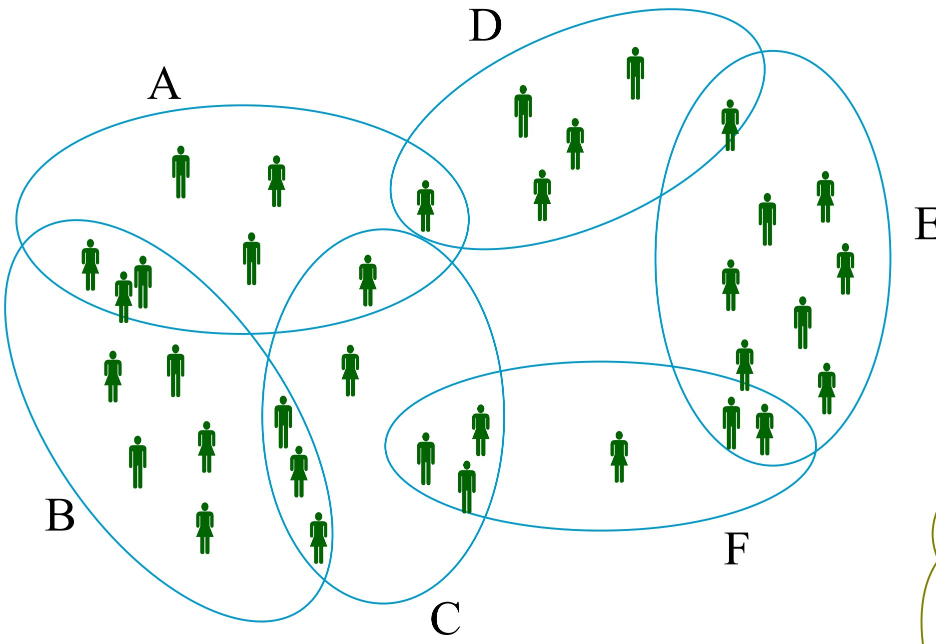


Considerar apenas as interseções não-vazias.



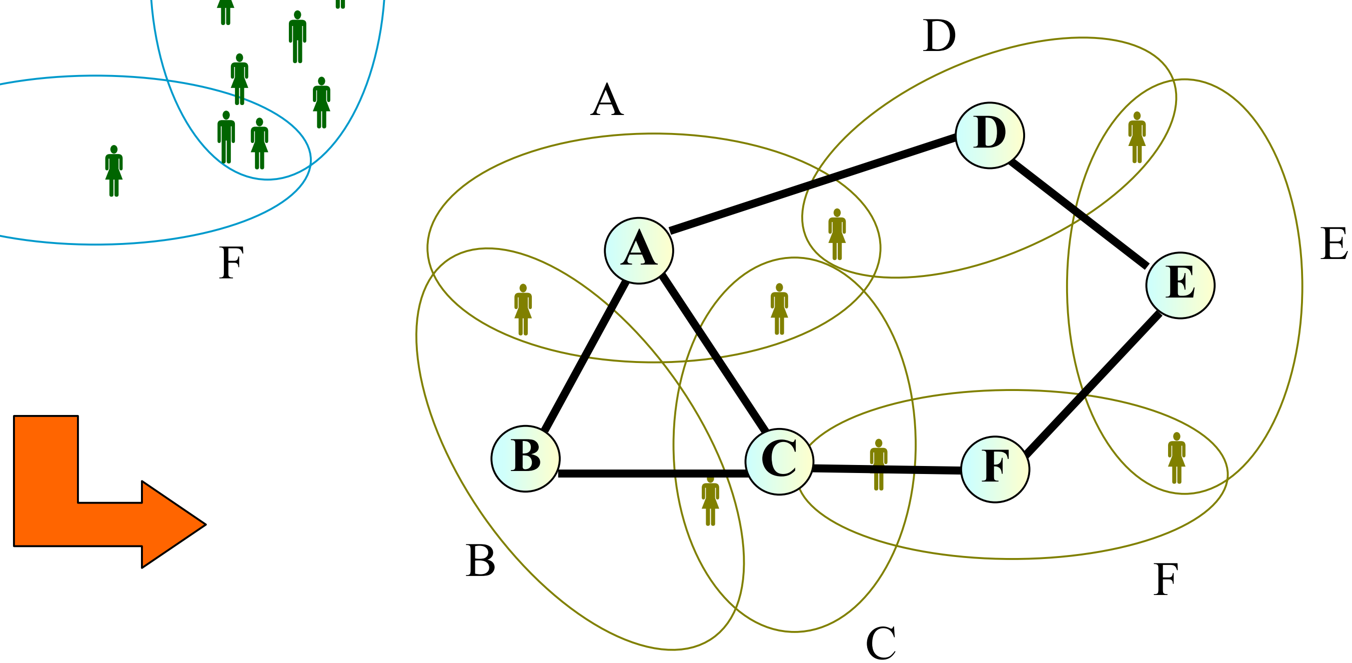
Motivação

- Simplificação com a utilização de um grafo de conflitos:



disciplinas → nós

conflitos → arestas

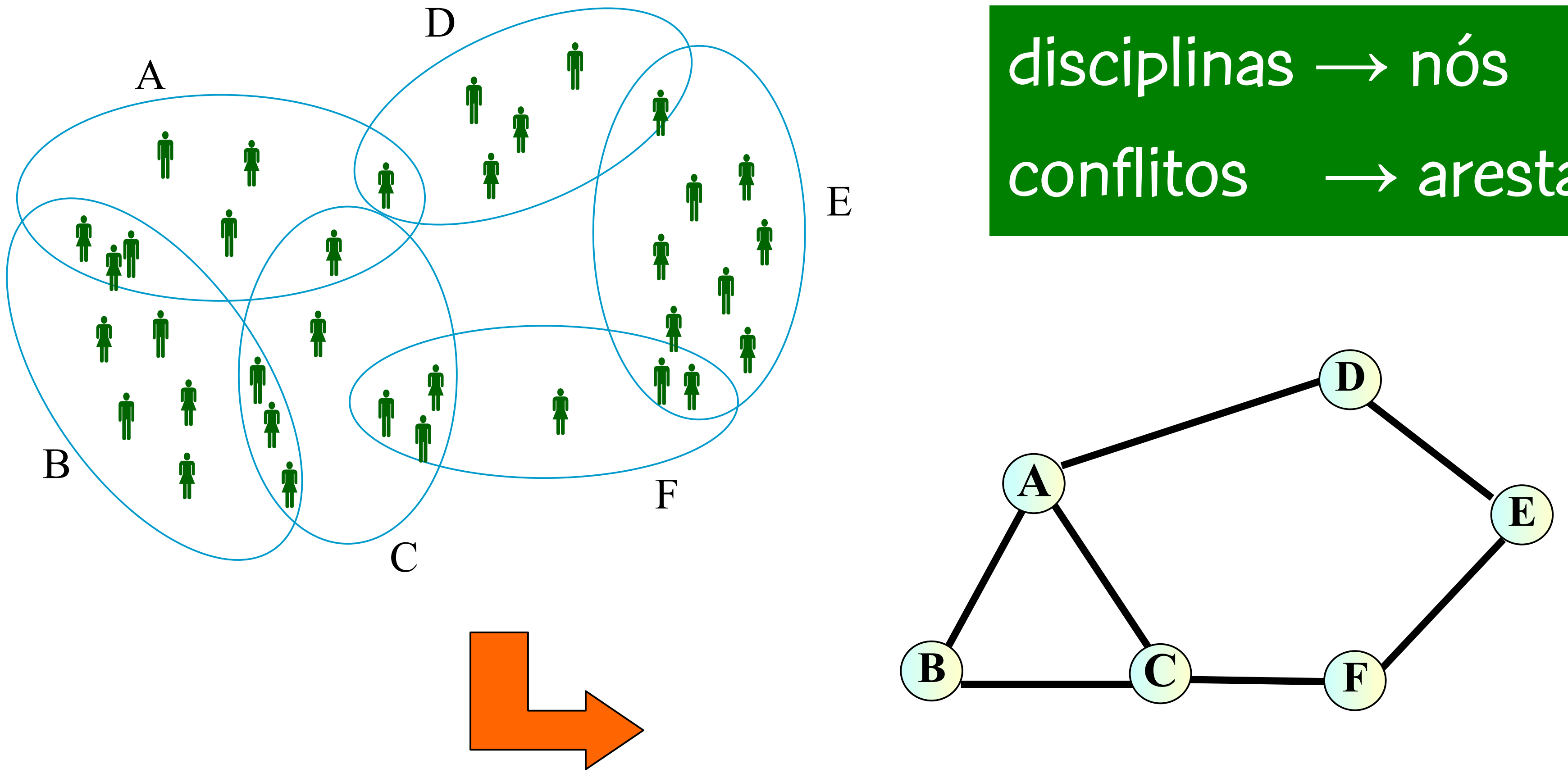


Motivação

- Simplificação com a utilização de um grafo de conflitos:

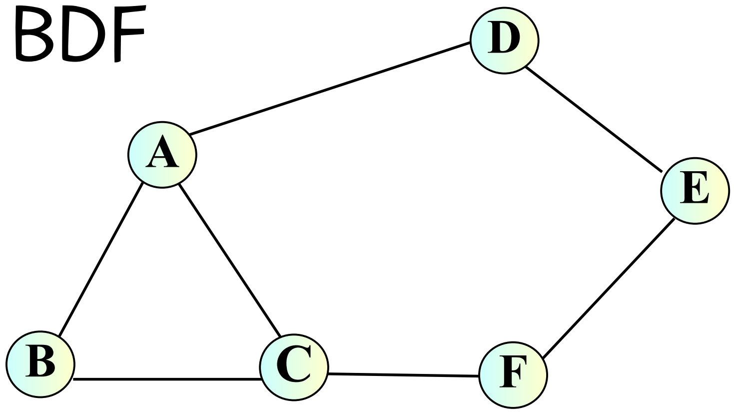
disciplinas → nós

conflitos → arestas



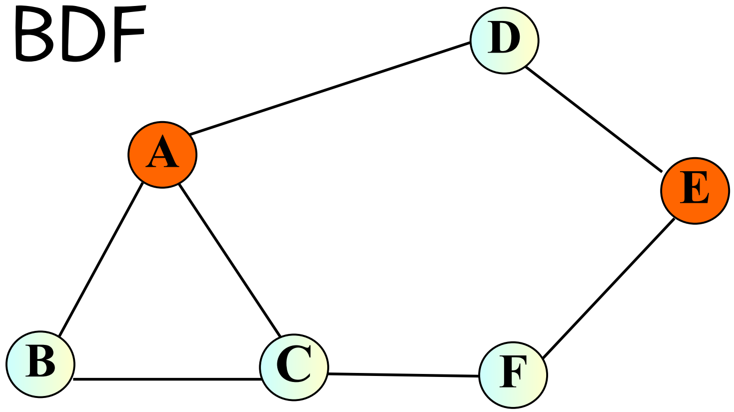
Motivação

- Como montar um calendário satisfazendo as restrições de conflito?
- Marcar para o primeiro dia qualquer combinação de disciplinas sem conflitos: A, B, C, D, E, F, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, DF, BDF



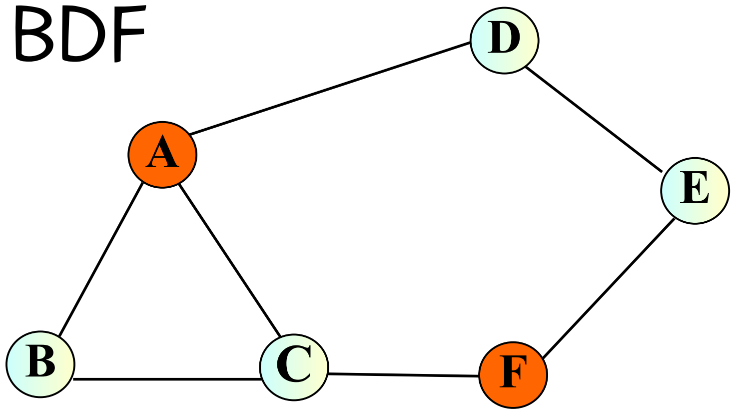
Motivação

- Como montar um calendário satisfazendo as restrições de conflito?
- Marcar para o primeiro dia qualquer combinação de disciplinas sem conflitos: A, B, C, D, E, F, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, DF, BDF



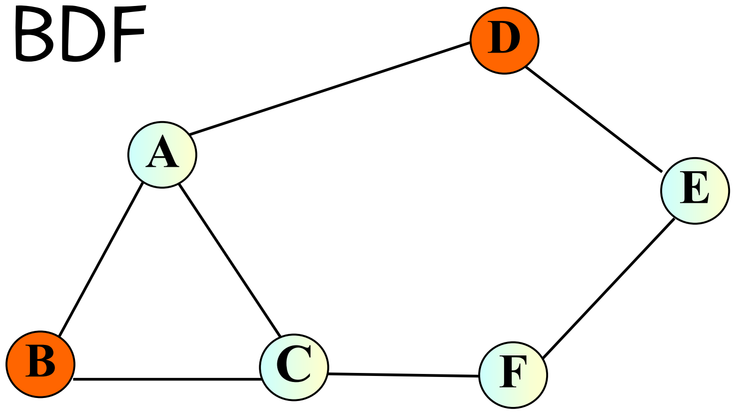
Motivação

- Como montar um calendário satisfazendo as restrições de conflito?
- Marcar para o primeiro dia qualquer combinação de disciplinas sem conflitos: A, B, C, D, E, F, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, DF, BDF



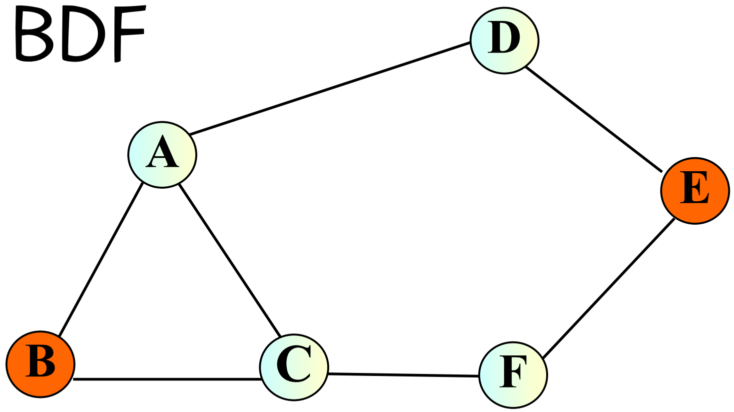
Motivação

- Como montar um calendário satisfazendo as restrições de conflito?
- Marcar para o primeiro dia qualquer combinação de disciplinas sem conflitos: A, B, C, D, E, F, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, DF, BDF



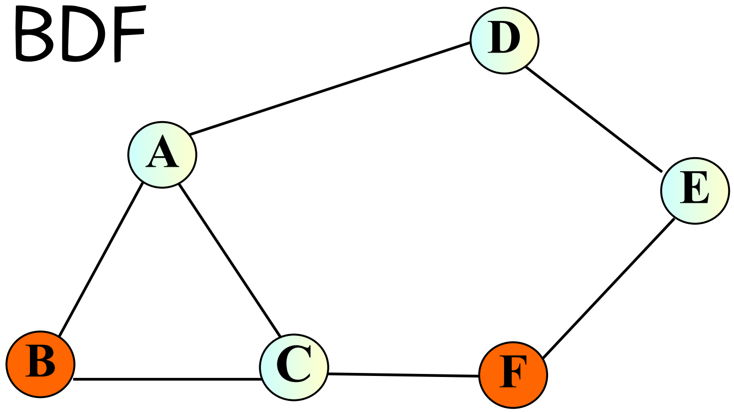
Motivação

- Como montar um calendário satisfazendo as restrições de conflito?
- Marcar para o primeiro dia qualquer combinação de disciplinas sem conflitos: A, B, C, D, E, F, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, DF, BDF



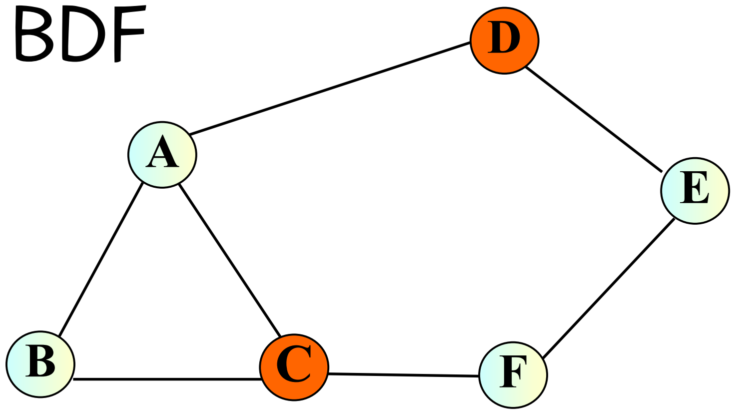
Motivação

- Como montar um calendário satisfazendo as restrições de conflito?
- Marcar para o primeiro dia qualquer combinação de disciplinas sem conflitos: A, B, C, D, E, F, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, DF, BDF



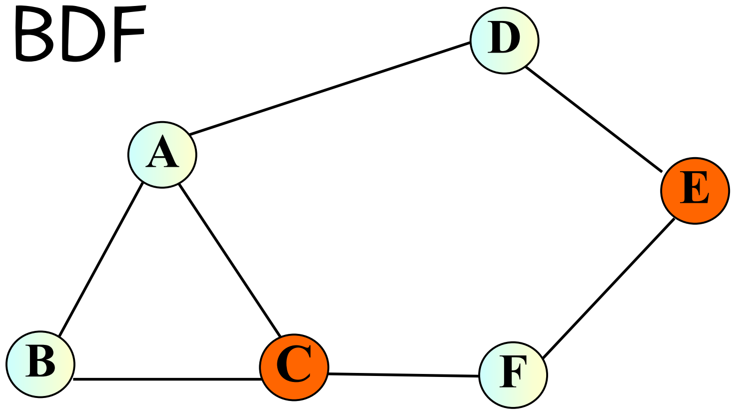
Motivação

- Como montar um calendário satisfazendo as restrições de conflito?
- Marcar para o primeiro dia qualquer combinação de disciplinas sem conflitos: A, B, C, D, E, F, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, DF, BDF



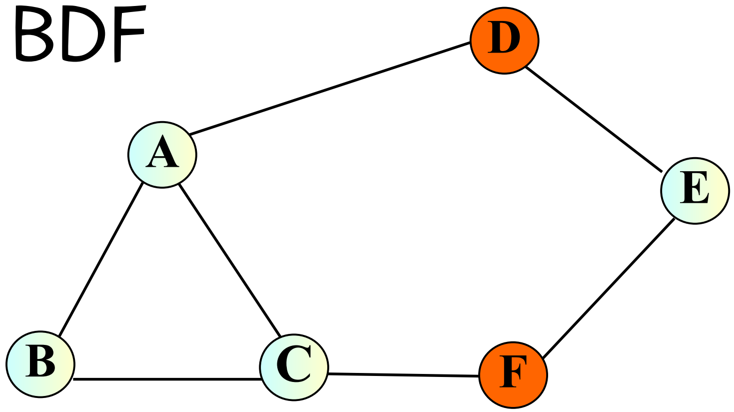
Motivação

- Como montar um calendário satisfazendo as restrições de conflito?
- Marcar para o primeiro dia qualquer combinação de disciplinas sem conflitos: A, B, C, D, E, F, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, DF, BDF



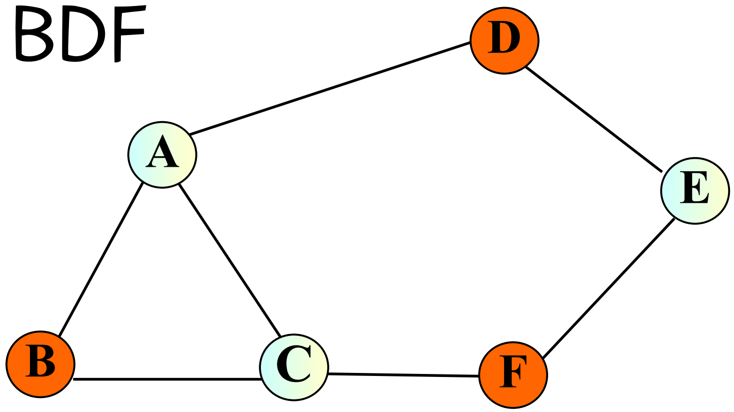
Motivação

- Como montar um calendário satisfazendo as restrições de conflito?
- Marcar para o primeiro dia qualquer combinação de disciplinas sem conflitos: A, B, C, D, E, F, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, DF, BDF



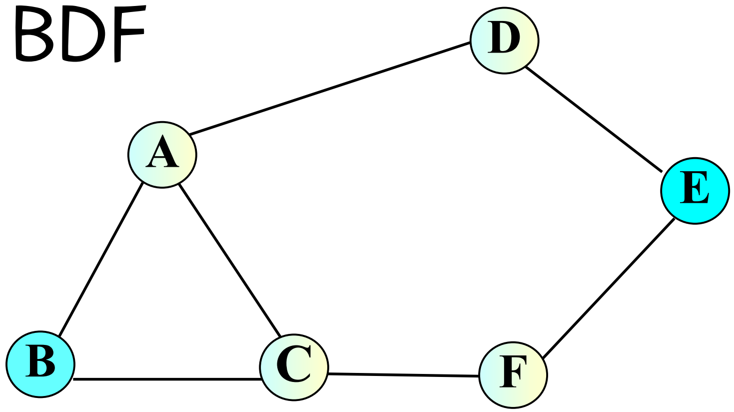
Motivação

- Como montar um calendário satisfazendo as restrições de conflito?
- Marcar para o primeiro dia qualquer combinação de disciplinas sem conflitos: A, B, C, D, E, F, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, DF, BDF



Motivação

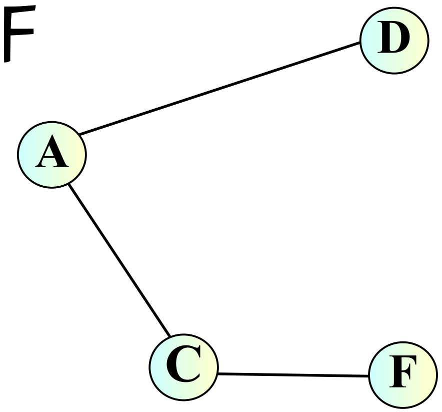
- Como montar um calendário satisfazendo as restrições de conflito?
- Marcar para o primeiro dia qualquer combinação de disciplinas sem conflitos: A, B, C, D, E, F, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, DF, BDF



- Escolher por exemplo o par de disciplinas B e E para o primeiro dia e retirá-las do grafo.

Motivação

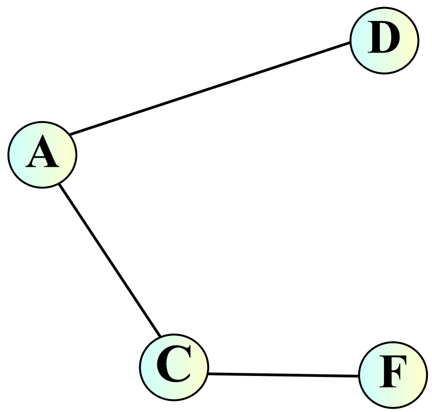
- Como montar um calendário satisfazendo as restrições de conflito?
- Marcar para o primeiro dia qualquer combinação de disciplinas sem conflitos: A, B, C, D, E, F, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, DF, BDF



- Escolher por exemplo o par de disciplinas B e E para o primeiro dia e retirá-las do grafo.

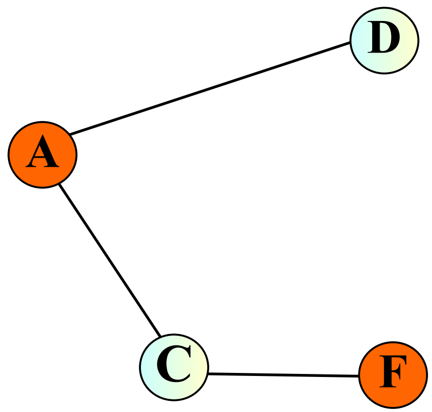
Motivação

- Marcar para o segundo dia qualquer combinação de disciplinas sem conflitos: A, C, D, F, AF, CD, DF



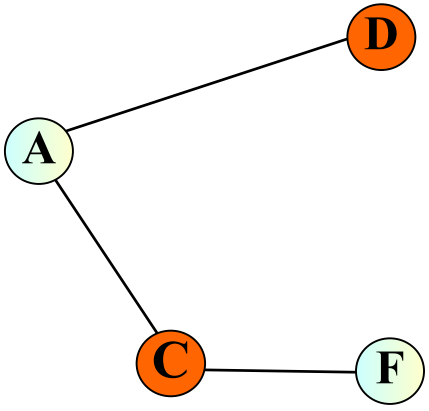
Motivação

- Marcar para o segundo dia qualquer combinação de disciplinas sem conflitos: A, C, D, F, AF, CD, DF



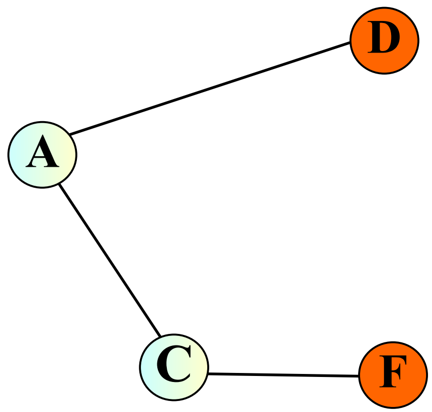
Motivação

- Marcar para o segundo dia qualquer combinação de disciplinas sem conflitos: A, C, D, F, AF, CD, DF



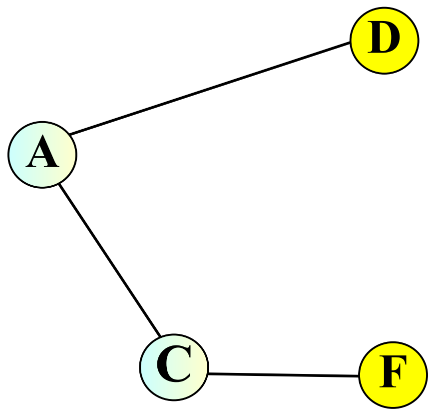
Motivação

- Marcar para o segundo dia qualquer combinação de disciplinas sem conflitos: A, C, D, F, AF, CD, DF



Motivação

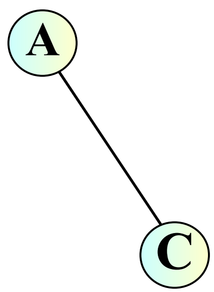
- Marcar para o segundo dia qualquer combinação de disciplinas sem conflitos: A, C, D, F, AF, CD, DF



- Escolher por exemplo o par de disciplinas D e F para o segundo dia e retirá-las do grafo.

Motivação

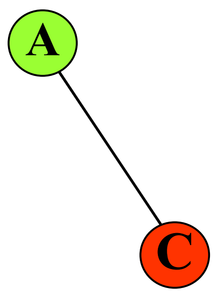
- Marcar para o segundo dia qualquer combinação de disciplinas sem conflitos: A, C, D, F, AF, CD, DF



- Escolher por exemplo o par de disciplinas D e F para o segundo dia e retirá-las do grafo.

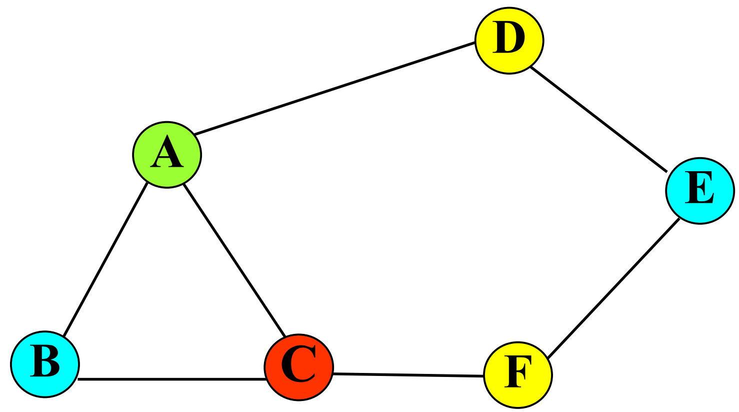
Motivação

- Marcar A ou C para o terceiro dia e a que sobrar para o quarto dia:



Motivação

- A solução assim construída utiliza quatro dias: B-E no primeiro dia, D-F no segundo dia, A no terceiro e C no quarto:

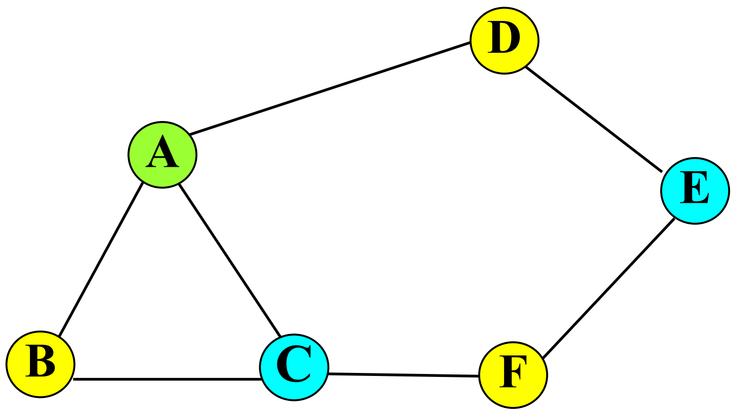


- Uma solução com quatro dias corresponde a colorir os nós do grafo de conflitos com quatro cores!

Motivação

- Esta solução utiliza o menor número possível de dias? ou ...
- É possível montar uma solução com menos dias? ou ...
- É possível colorir o grafo de conflitos com três cores?

Sim!



- É impossível colorir o grafo de conflitos com menos de três cores! (por que?)

Motivação

- Como montar um escalonamento com o menor número possível de dias?
- Recordando: um subconjunto independente de um grafo é um subconjunto de nós sem nenhuma aresta entre eles.
- Logo, um conjunto de disciplinas que forma um subconjunto independente dos nós do grafo de conflitos pode ter suas provas marcadas para o mesmo dia.
- Os nós deste subconjunto independente podem receber a mesma cor.

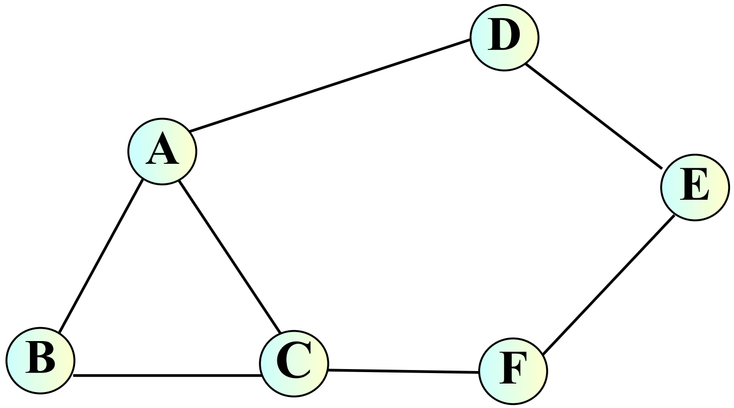
Motivação

- Quanto mais disciplinas forem marcadas para o primeiro dia, menos disciplinas sobram para os dias seguintes e, portanto, serão necessários menos dias para realizar as provas das disciplinas restantes.
- Então, marcar para o primeiro dia as provas das disciplinas correspondentes a um subconjunto independente máximo.
- Retirar os nós correspondentes a estas disciplinas do grafo de conflitos.
- Continuar procedendo da mesma maneira, até as provas de todas as disciplinas terem sido marcadas.

Motivação

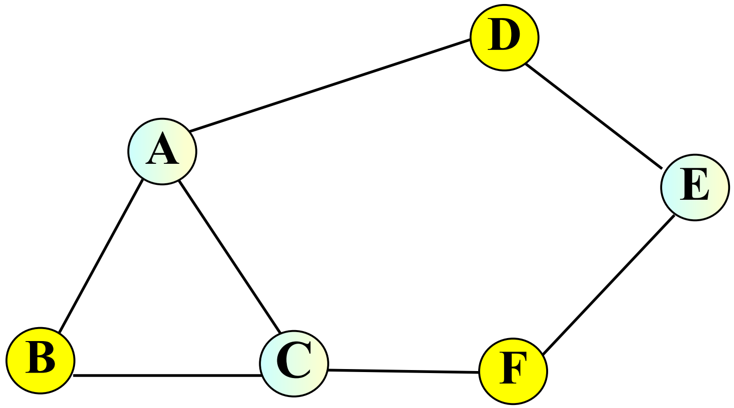
- Subconjunto independente máximo no grafo de conflito?

BDF



Motivação

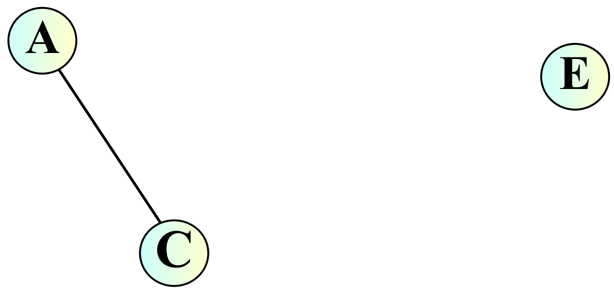
- Subconjunto independente máximo no grafo de conflito?
  BDF



- Eliminar os nós B, D e F do grafo de conflitos.

Motivação

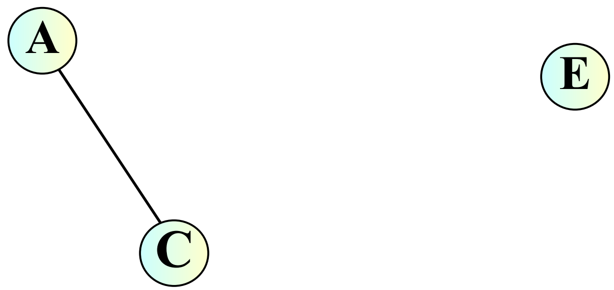
- Subconjunto independente máximo no grafo de conflito?
  BDF



- Eliminar os nós B, D e F do grafo de conflitos.

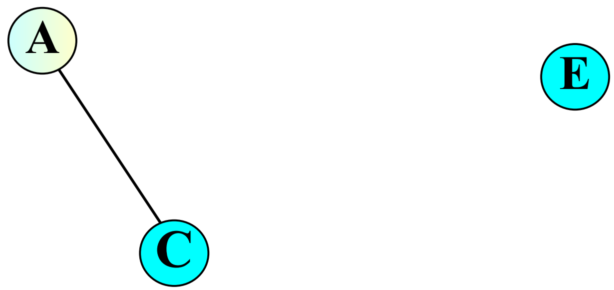
Motivação

- Subconjunto independente máximo no grafo de conflito?
  CE



Motivação

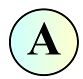
- Subconjunto independente máximo no grafo de conflito?
  CE



- Eliminar os nós C e E do grafo de conflitos.

Motivação

- Subconjunto independente máximo no grafo de conflito?
  CE

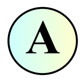


- Eliminar os nós C e E do grafo de conflitos.

Motivação

- Subconjunto independente máximo no grafo de conflito?

  A



Motivação

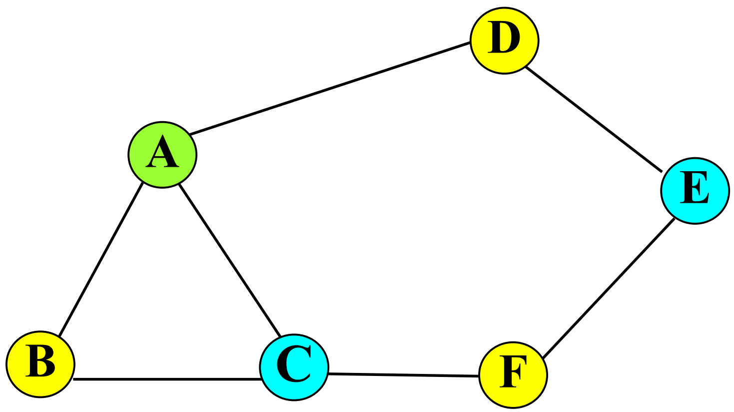
- Subconjunto independente máximo no grafo de conflito?

  A

- Eliminar o nó A do grafo de conflitos.
- Solução completa (todos nós coloridos).

Motivação

- A solução encontrada usa o número mínimo de cores para colorir o grafo, logo o número de dias para aplicar todas as provas é mínimo:



- Foi então proposto um algoritmo para colorir um grafo com o menor número de cores.

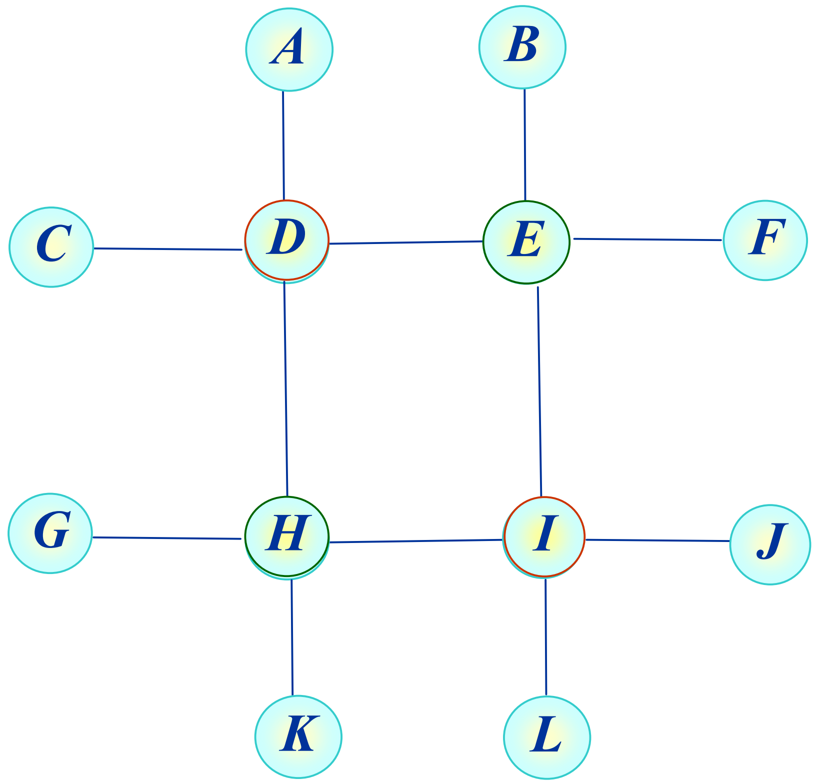
Motivação

- O passo básico deste algoritmo corresponde a determinar um subconjunto independente máximo.
- Entretanto, este subproblema a ser resolvido a cada iteração já é um problema NP-completo por si só, ou seja, cada subproblema é computacionalmente difícil.
- Além deste procedimento ser computacionalmente difícil, é possível garantir que este algoritmo sempre encontra a solução ótima com o número mínimo de cores?
  - Ou demonstrar que sim, ou dar um contra-exemplo.

Motivação

- Considerando-se o grafo abaixo, qual solução seria encontrada pelo algoritmo?

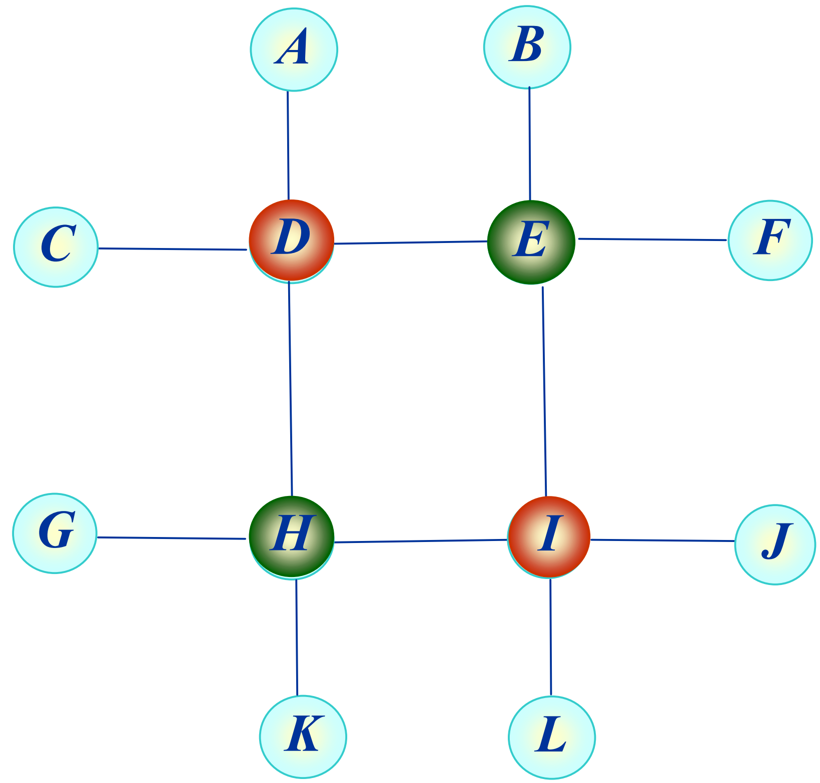
Os oito nós externos formam um subconjunto independente de cardinalidade máxima e podem todos ser coloridos com a mesma cor.



Motivação

- Considerando-se o grafo abaixo, qual solução seria encontrada pelo algoritmo?

Os oito nós externos formam um subconjunto independente de cardinalidade máxima e podem todos ser coloridos com a mesma cor.

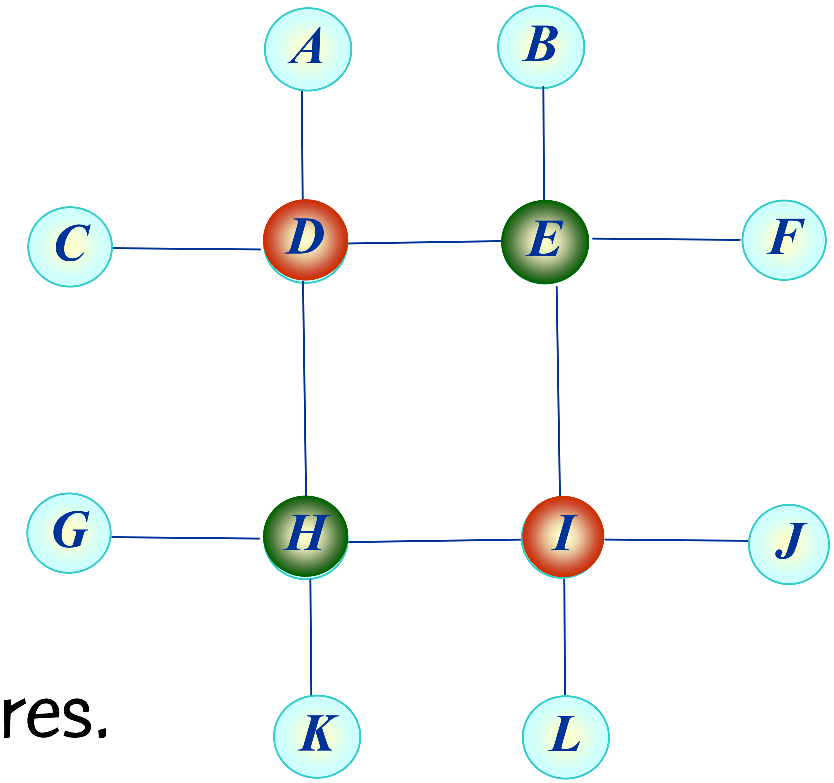


Motivação

- Considerando-se o grafo abaixo, qual solução seria encontrada pelo algoritmo?

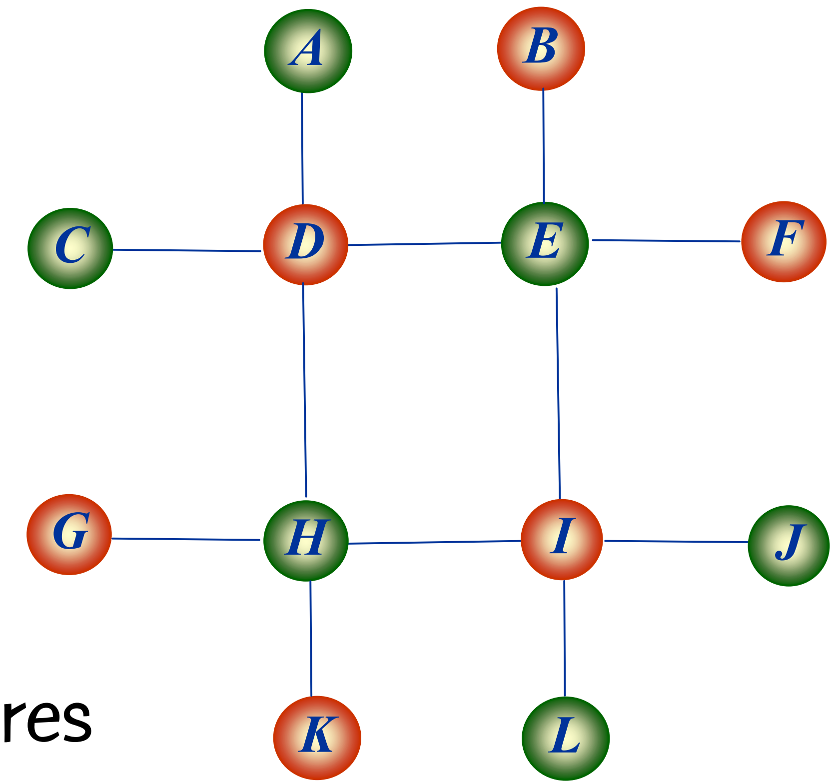
Esta solução é ótima, ou é possível colorir este grafo com menos cores?

<ins>Sim</ins>: o grafo pode ser colorido com apenas duas cores.



Motivação

- Considerando-se o grafo abaixo, qual solução seria encontrada pelo algoritmo?



Esta solução é ótima, ou é possível colorir este grafo com menos cores?

<u>Sim</u>: o grafo pode ser colorido com apenas duas cores

Motivação

- O algoritmo proposto nem sempre encontra a solução ótima (isto é, uma solução com o número mínimo de cores).
- Este algoritmo é então um algoritmo aproximado ou uma heurística para o problema de coloração de grafos.
- Algoritmos exatos vs. algoritmos aproximados:
  - qualidade da solução
  - tempo de processamento

Algoritmos construtivos

- Problema de otimização combinatória: Dado um conjunto finito $E = \{1,2, ...,n\}$ e uma função de custo $c: 2^E \rightarrow R$, encontrar $S^* \in F$ tal que $c(S^*) \leq c(S)\ \forall S \in F$, onde $F \in 2^E$ é o conjunto de soluções viáveis do problema (minimização).
- Conjunto discreto de soluções (vetores de variáveis 0-1, caminhos, ciclos, ...) com um número finito de elementos.
- Construção de uma solução: selecionar seqüencialmente elementos de E, eventualmente descartando alguns já selecionados, de tal forma que ao final se obtenha uma solução viável, i.e. pertencente a F.

Algoritmos construtivos

- Exemplo: problema da mochila

  E: conjunto de itens

  F: subconjuntos de E que satisfazem à restrição $\sum_{e \in S} a_e \leq b$

  $c(S) = \sum_{e \in S} c_e$

  c_e: lucro do item e

  a_e: peso do item e

  b: capacidade da mochila

Algoritmos construtivos

- Exemplo: problema do caixeiro viajante

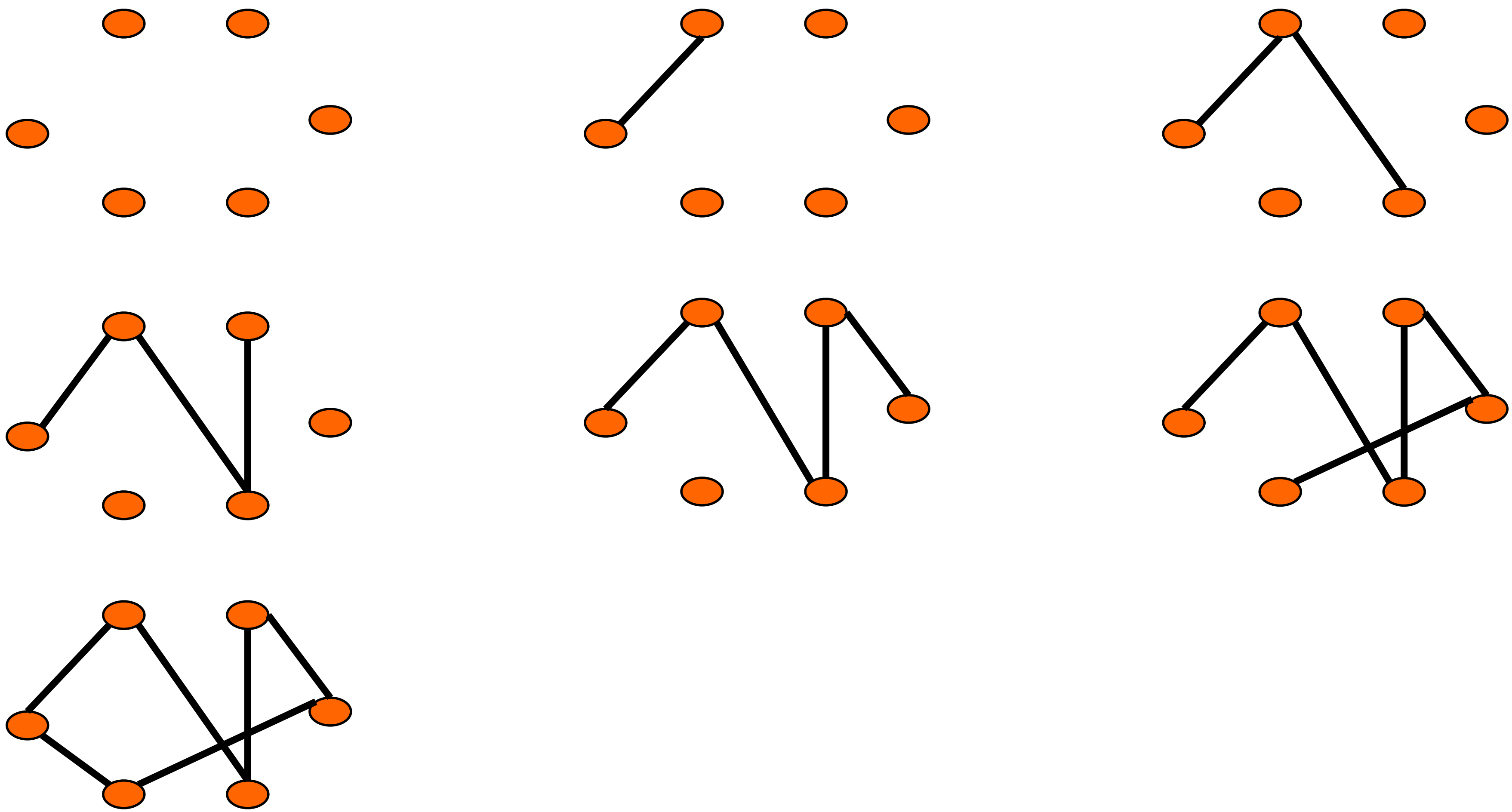
E: conjunto de arestas

F: subconjuntos de arestas que formam um circuito hamiltoniano (isto é, que visita cada cidade exatamente uma única vez)

$c(S) = \sum_{e \in S} c_e$

c_e: custo (comprimento) da aresta $e = (i,j)$

Algoritmos construtivos

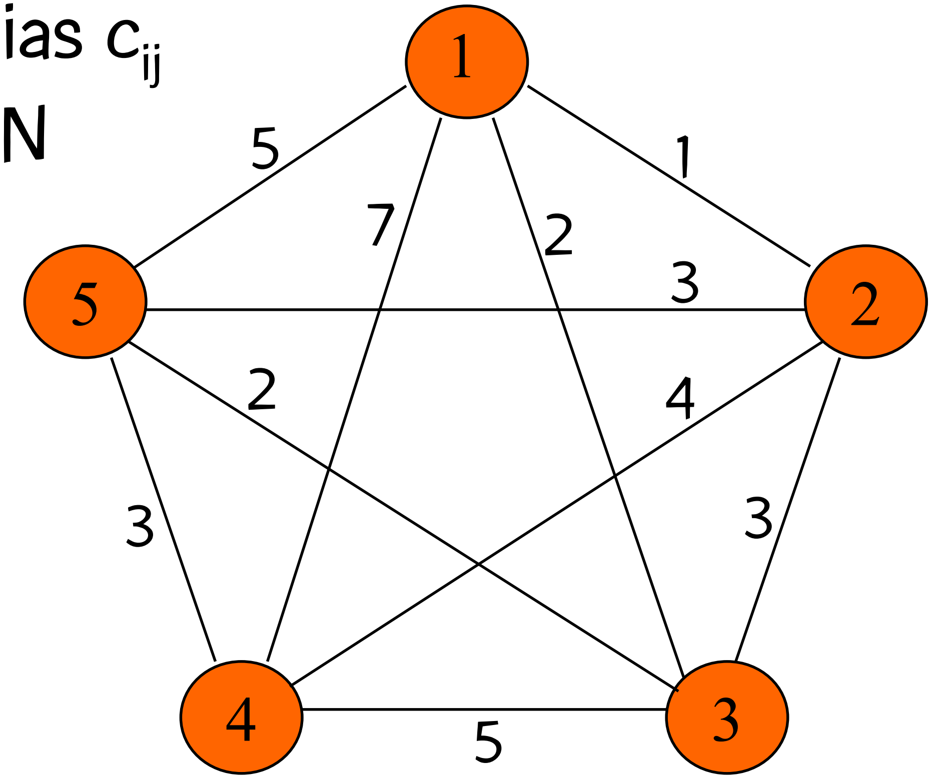


Problema do caixeiro viajante

Matrix de distâncias c_{ij}

Conjunto de nós N

$|N|=5$



Problema do caixeiro viajante

- Algoritmo do vizinho mais próximo:

Escolher o nó inicial i e fazer $N \leftarrow N-\{i\}$.

Enquanto $N \neq \emptyset$ fazer:

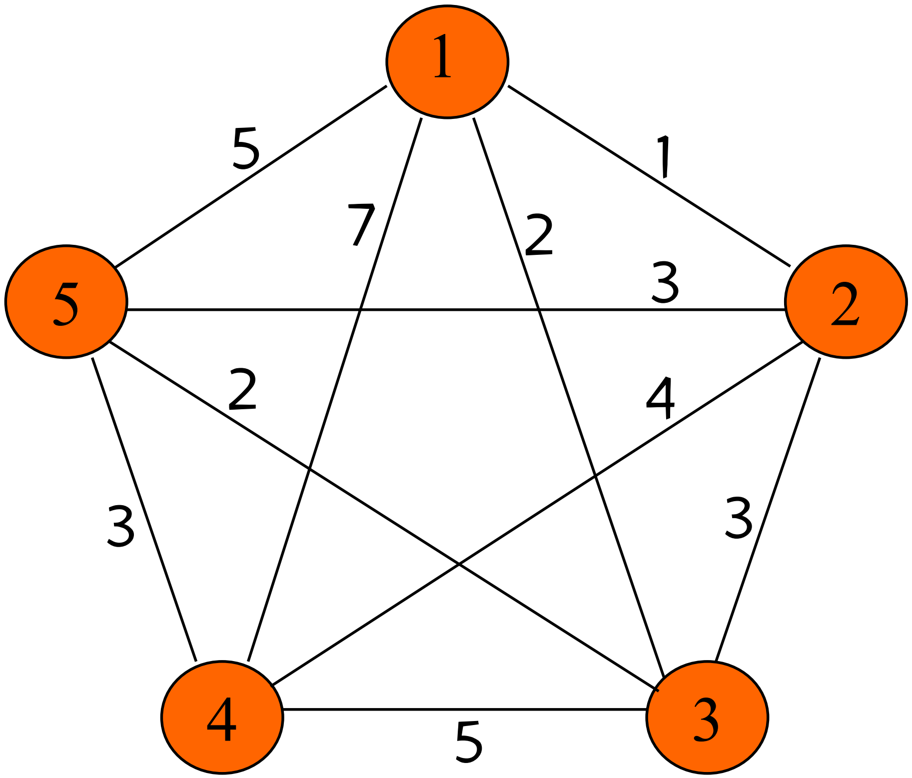
  Obter $j \in N$ tal que $c_{i,j} = \min_{k \in N} \{c_{i,k}\}$.

  $N \leftarrow N-\{j\}$

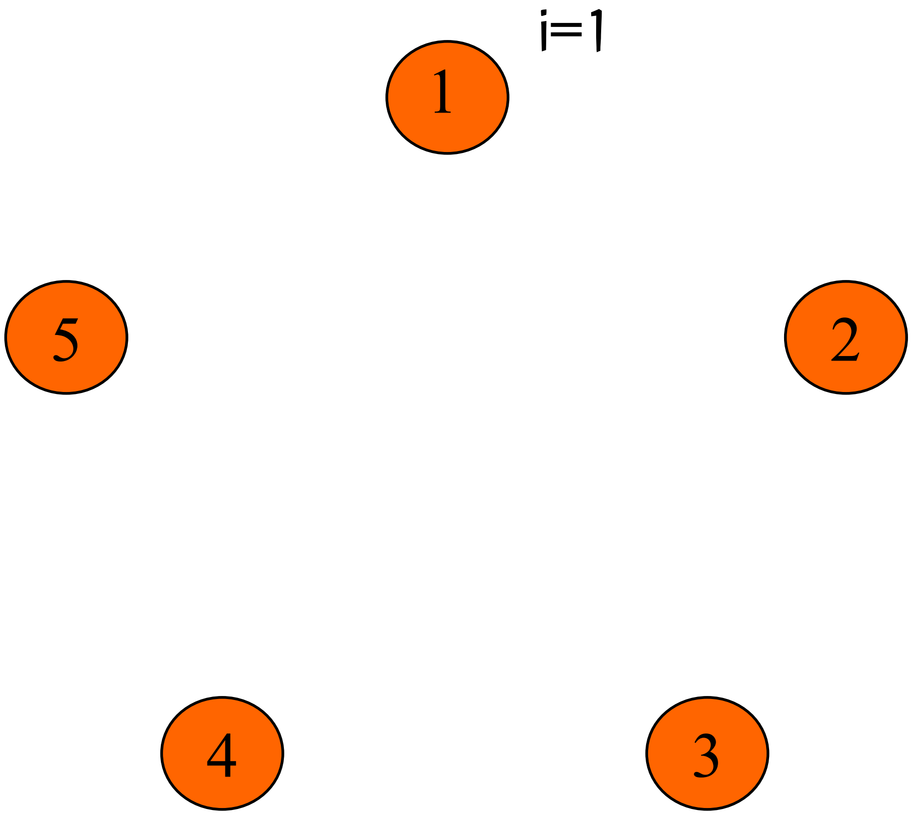
  $i \leftarrow j$

Fim-enquanto

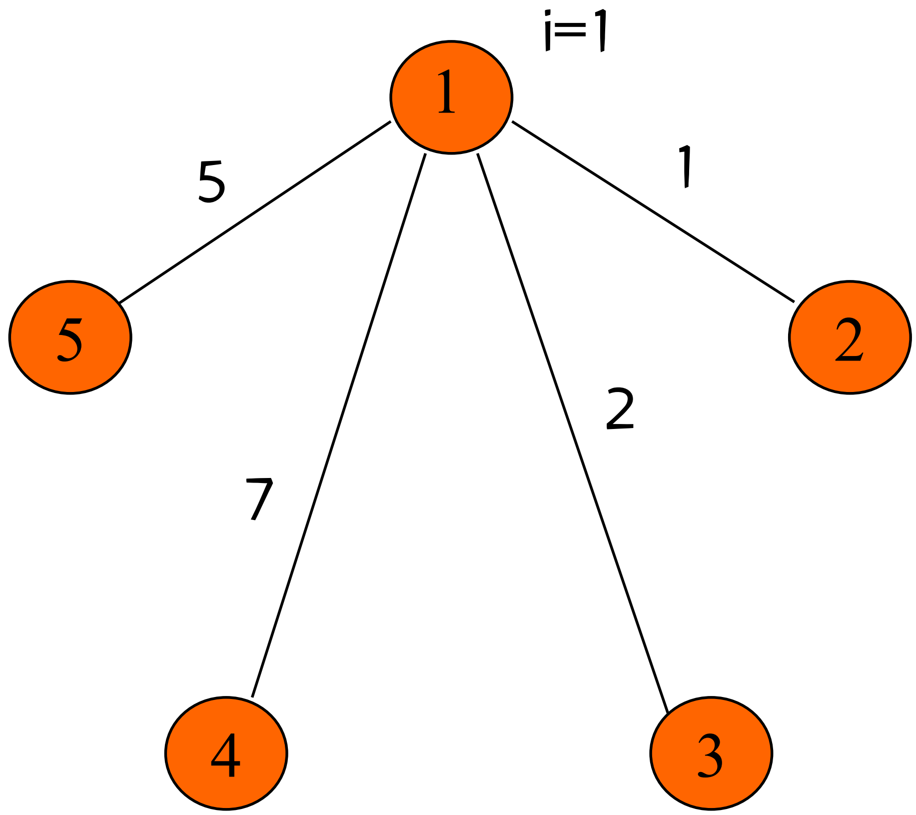
Problema do caixeiro viajante



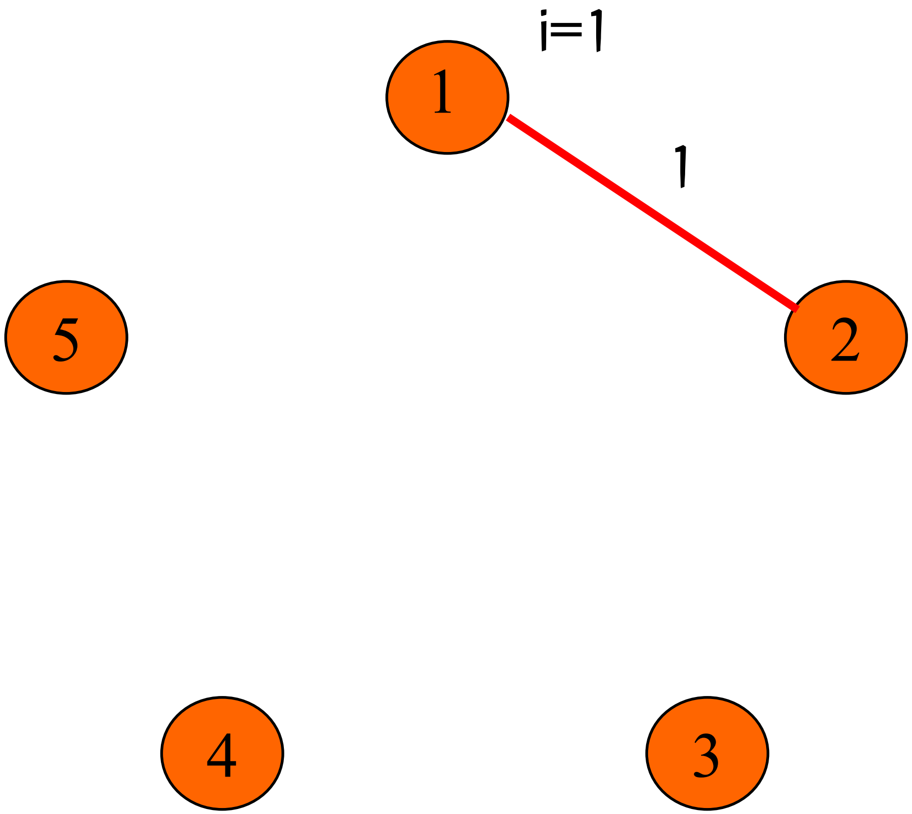
Problema do caixeiro viajante



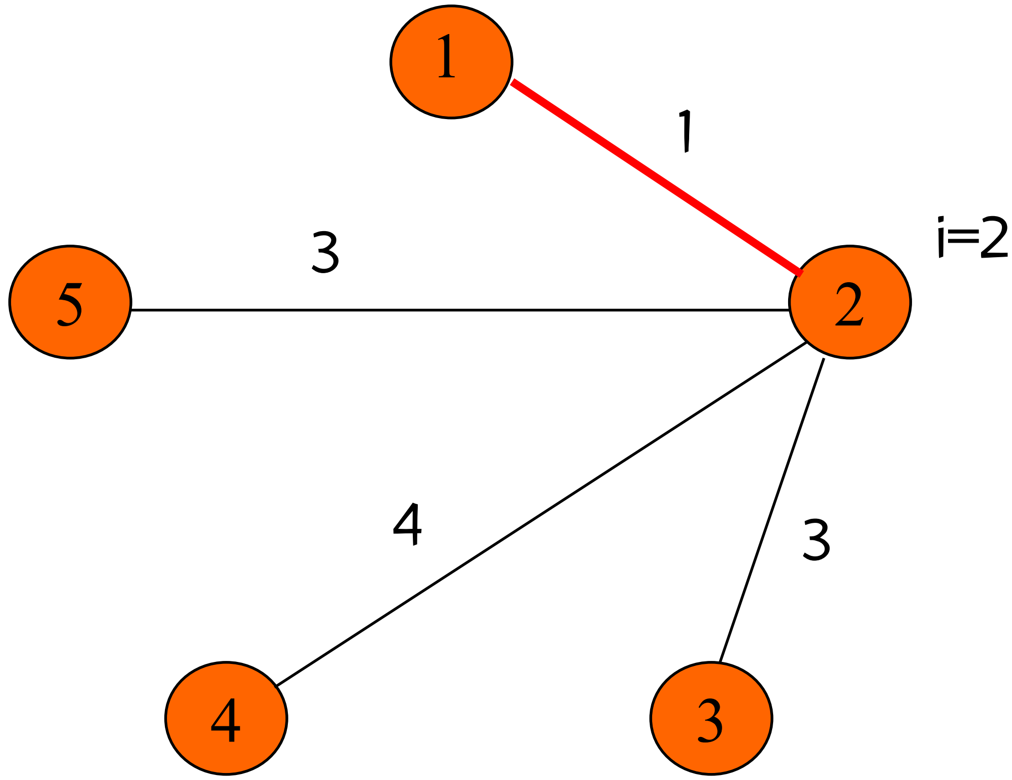
Problema do caixeiro viajante



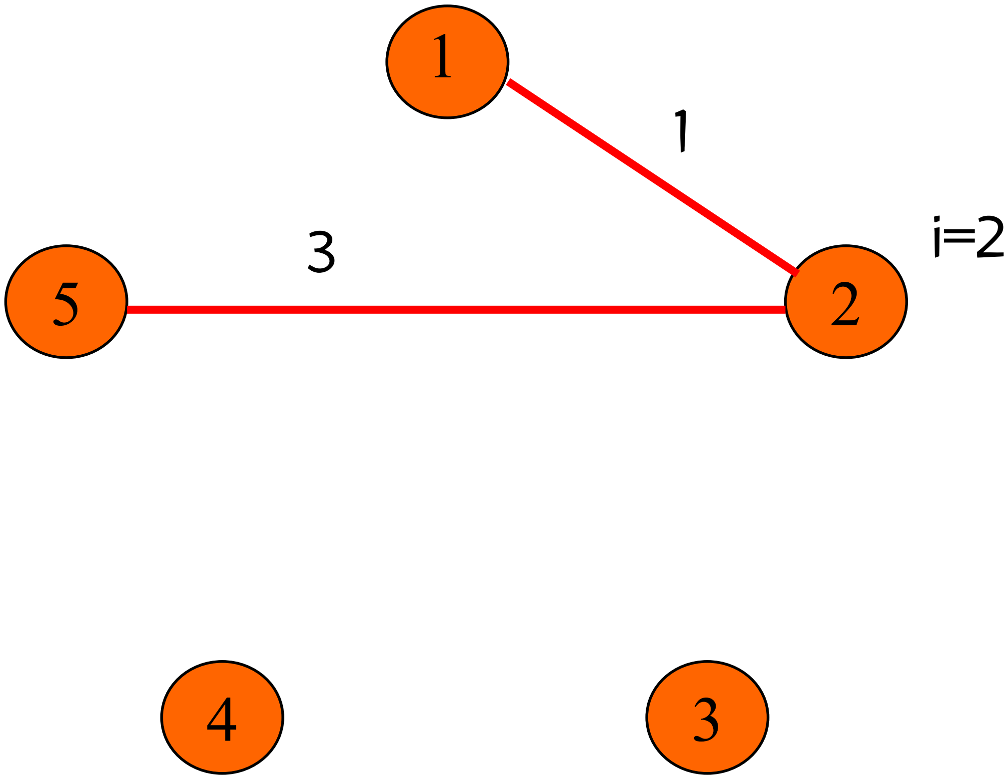
Problema do caixeiro viajante



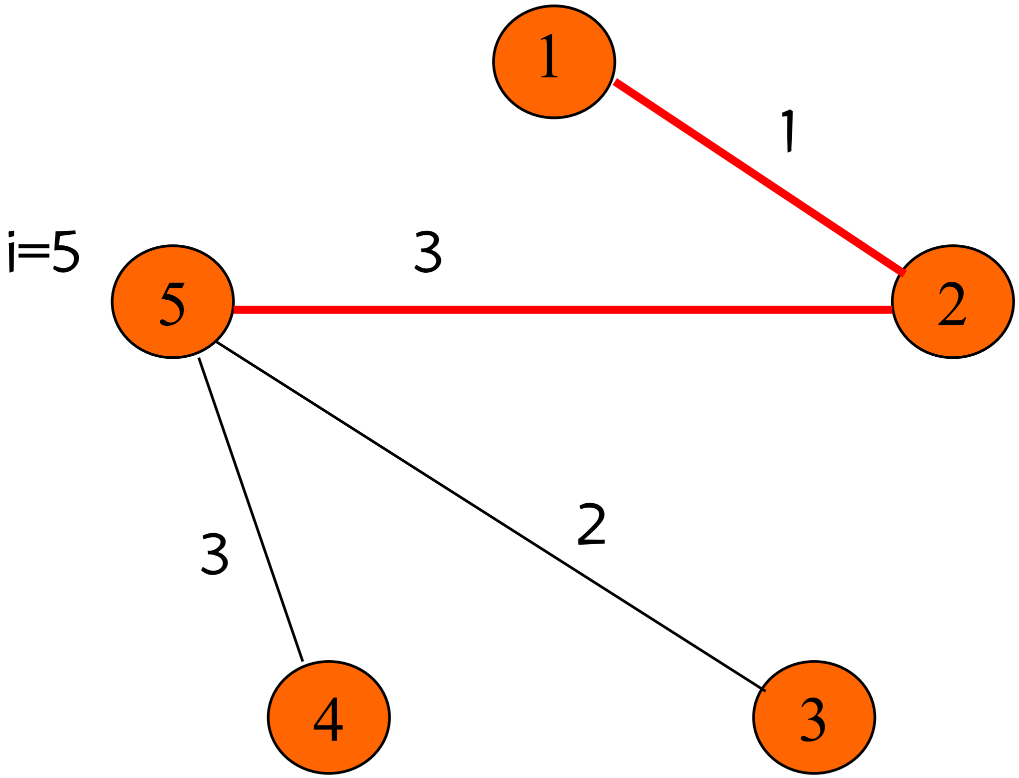
Problema do caixeiro viajante



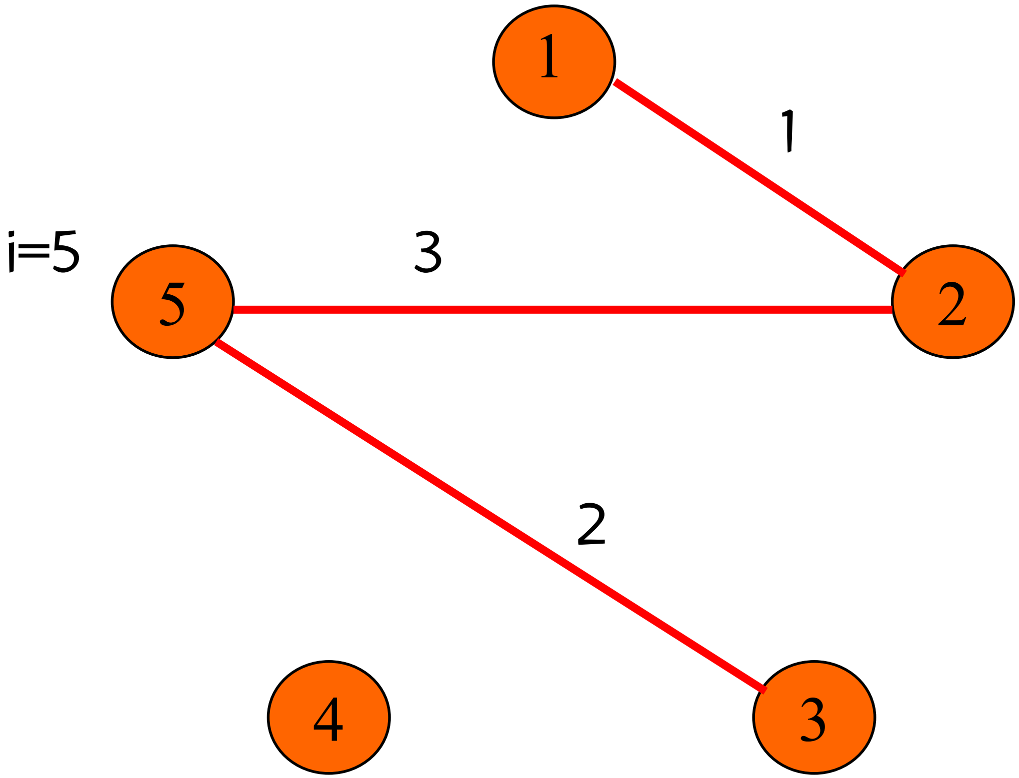
Problema do caixeiro viajante



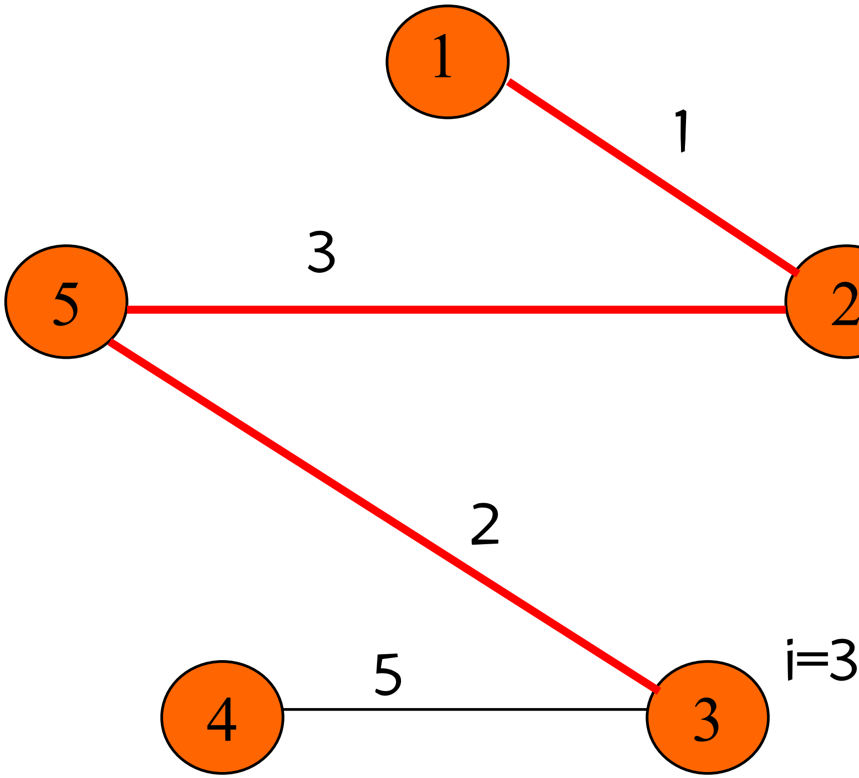
Problema do caixeiro viajante



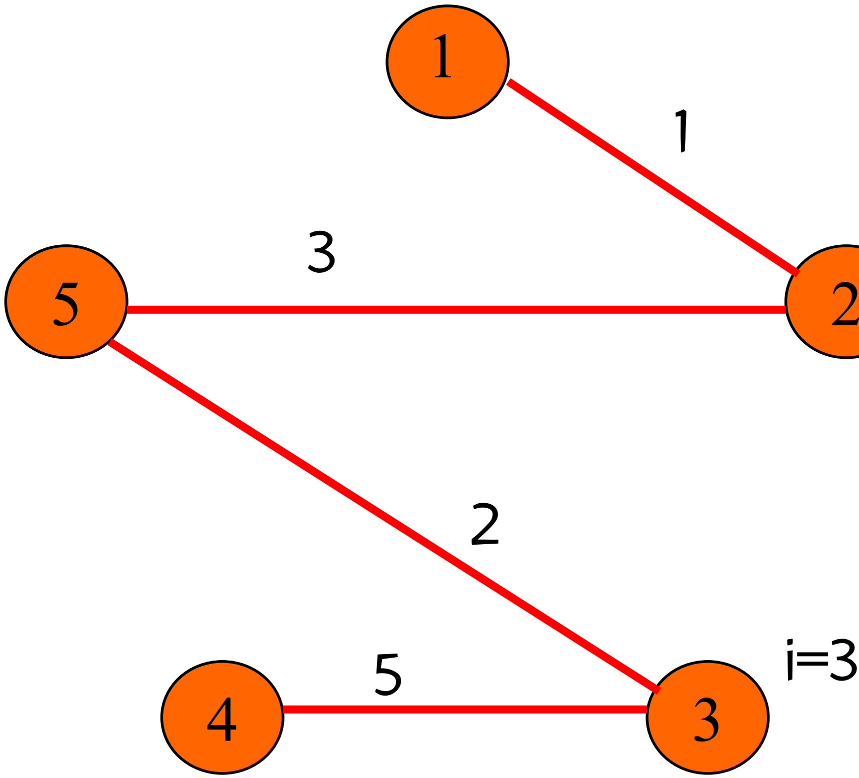
Problema do caixeiro viajante



Problema do caixeiro viajante

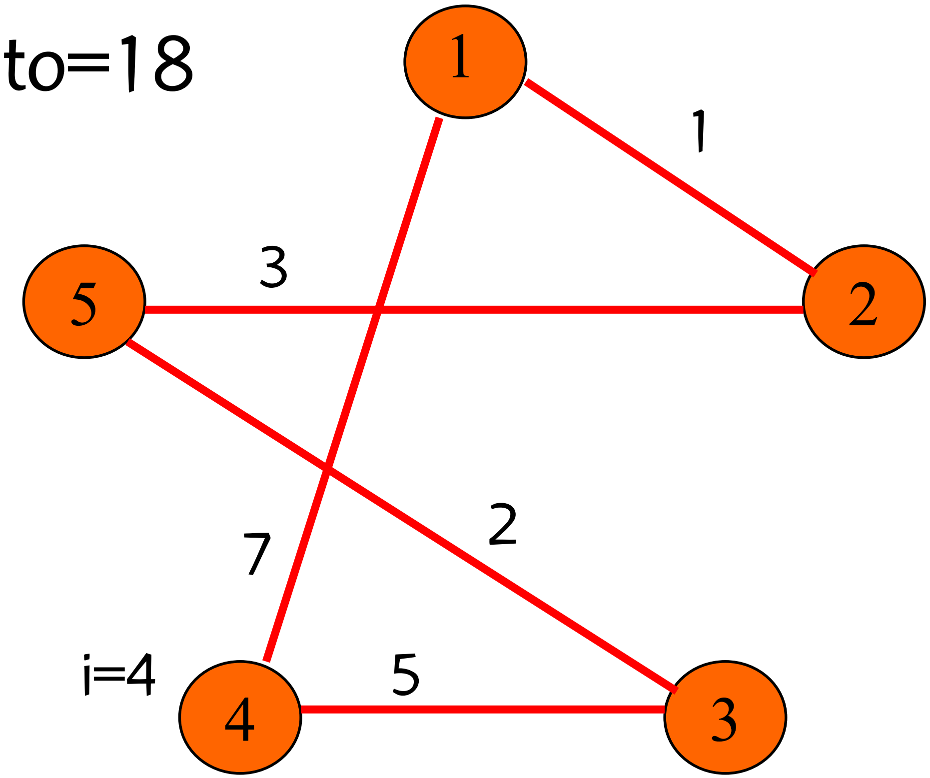


Problema do caixeiro viajante



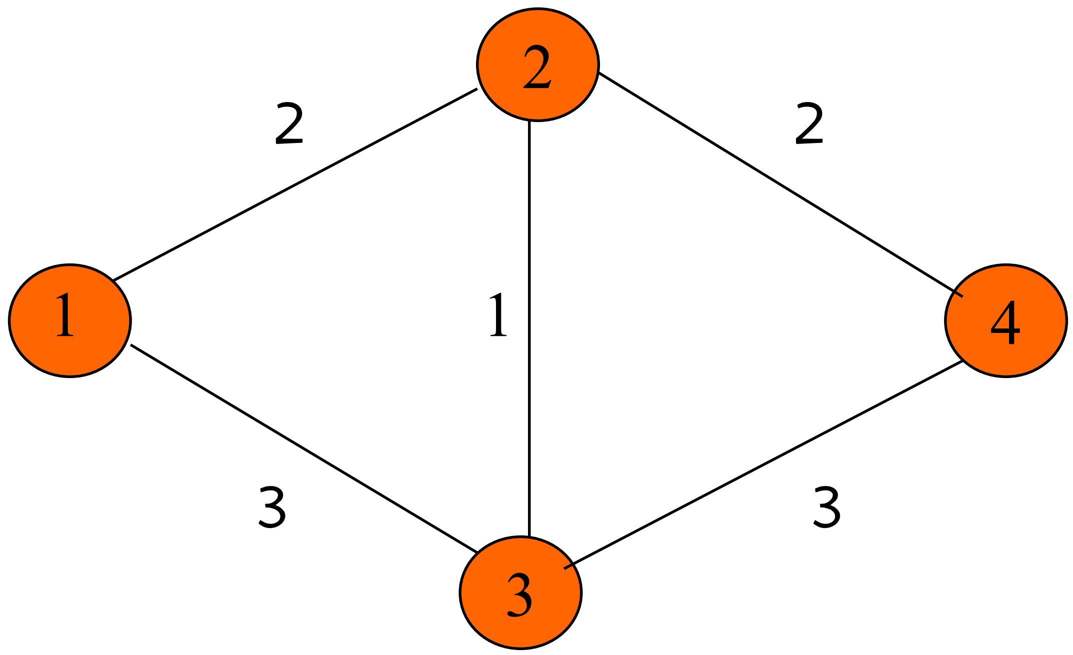
Problema do caixeiro viajante

comprimento=18



Problema do caixeiro viajante

- Algoritmos construtivos simples podem falhar mesmo para casos muito simples:



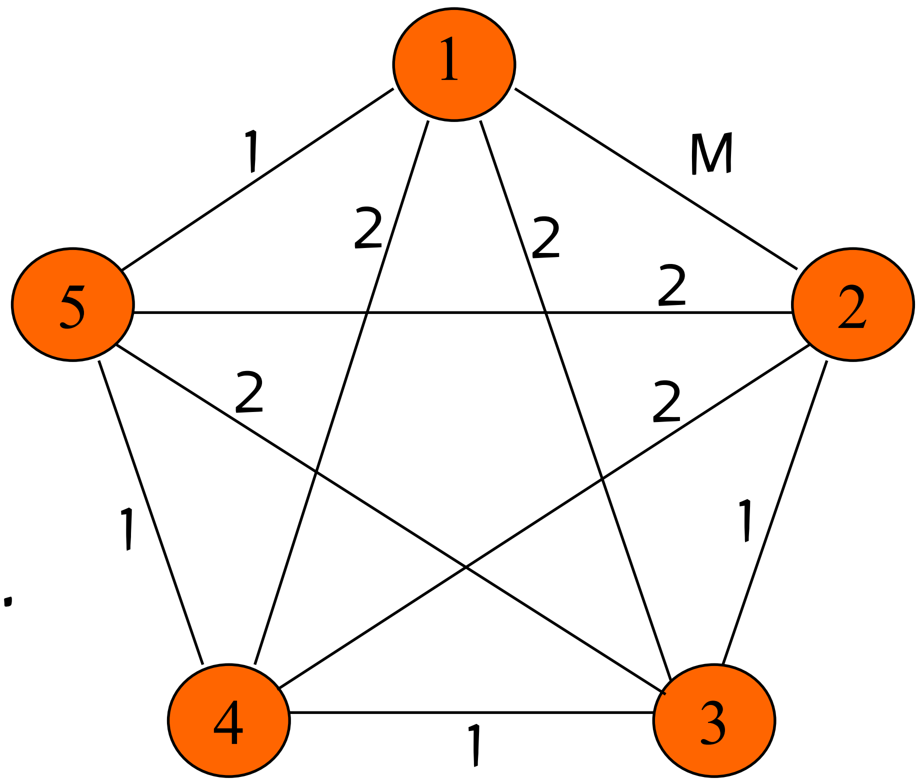
Problema do caixeiro viajante

- Podem encontrar soluções arbitrariamente ruins:

Heurística (1-5-4-3-2-1): M+4

Ótimo (1-5-2-3-4-1): 7

A solução ótima é encontrada se o algoritmo começa do nó 5.



Problema do caixeiro viajante

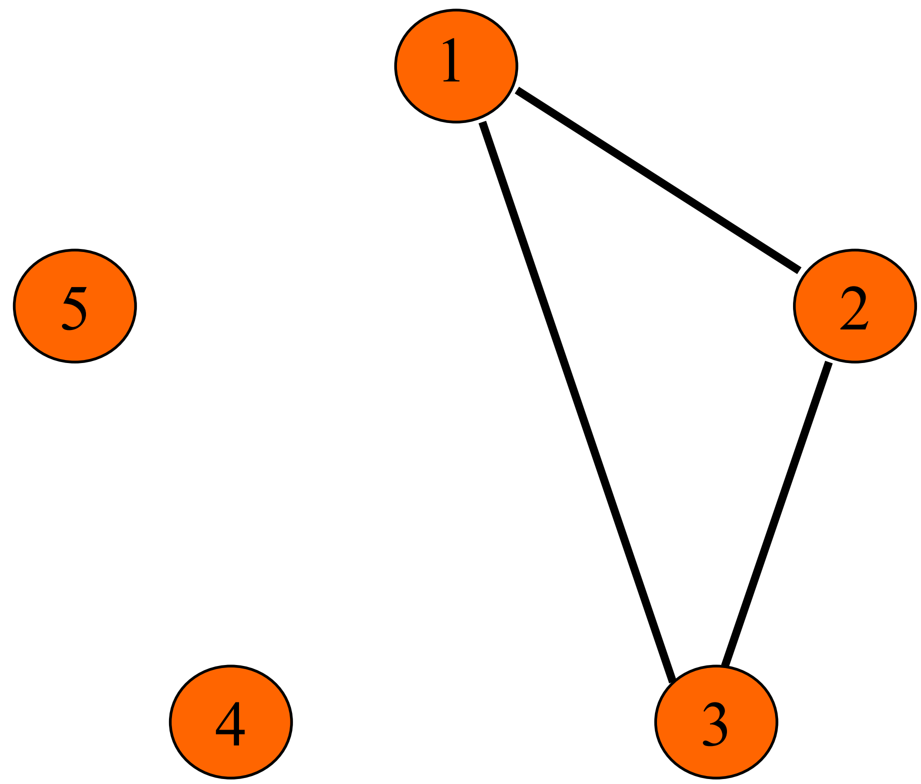
- Extensões e melhorias simples:
  - Repetir a aplicação do algoritmo a partir de cada nó do grafo e selecionar a melhor solução obtida.
    - Melhores soluções, mas tempo de processamento multiplicado por n.
  - A cada iteração selecionar a aresta mais curta a partir de alguma das extremidades em aberto do circuito, e não apenas a partir da última extremidade inserida: solução de comprimento 15 (tempos multiplicados por dois).
  - Critérios mais elaborados para (1) seleção do novo nó incorporado ao circuito a cada iteração e para (2) seleção da posição onde ele entra no circuito: algoritmo baseado no crescimento de um circuito até completá-lo.

Problema do caixeiro viajante

- Escolha do novo nó a ser incorporado ao circuito a cada iteração:
  - Selecionar o nó k fora do circuito parcial corrente, cuja aresta de menor comprimento que o liga a este circuito parcial corrente é mínima $\rightarrow$ algoritmo de inserção mais próxima
  - Selecionar o nó k fora do circuito parcial corrente, cuja aresta de menor comprimento que o liga a este circuito parcial corrente é máxima $\rightarrow$ algoritmo de inserção mais afastada

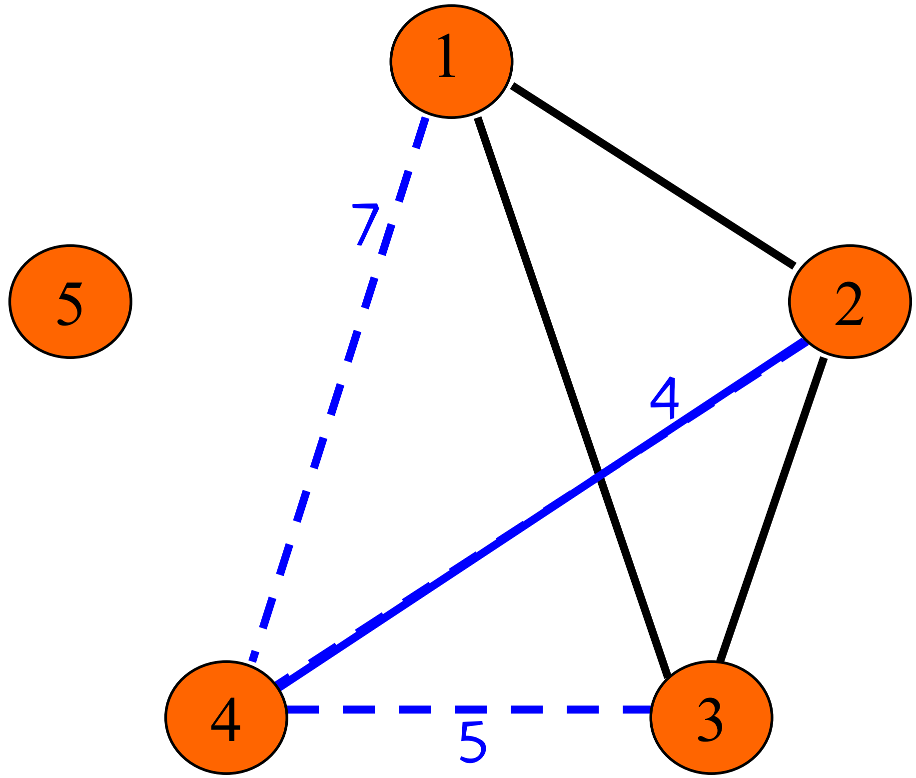
Problema do caixeiro viajante

- Escolha do novo nó a ser incorporado ao circuito a cada iteração pela inserção mais próxima
- Seleção do nó:



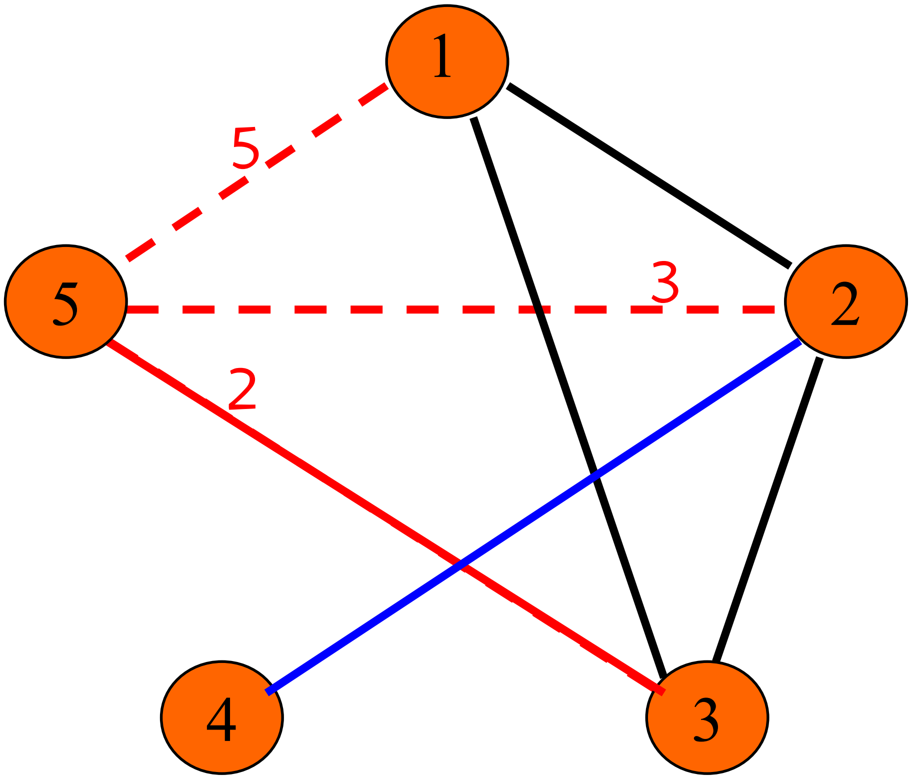
Problema do caixeiro viajante

- Escolha do novo nó a ser incorporado ao circuito a cada iteração pela inserção mais próxima
- Seleção do nó:
  - Distância mínima do nó 4: 4



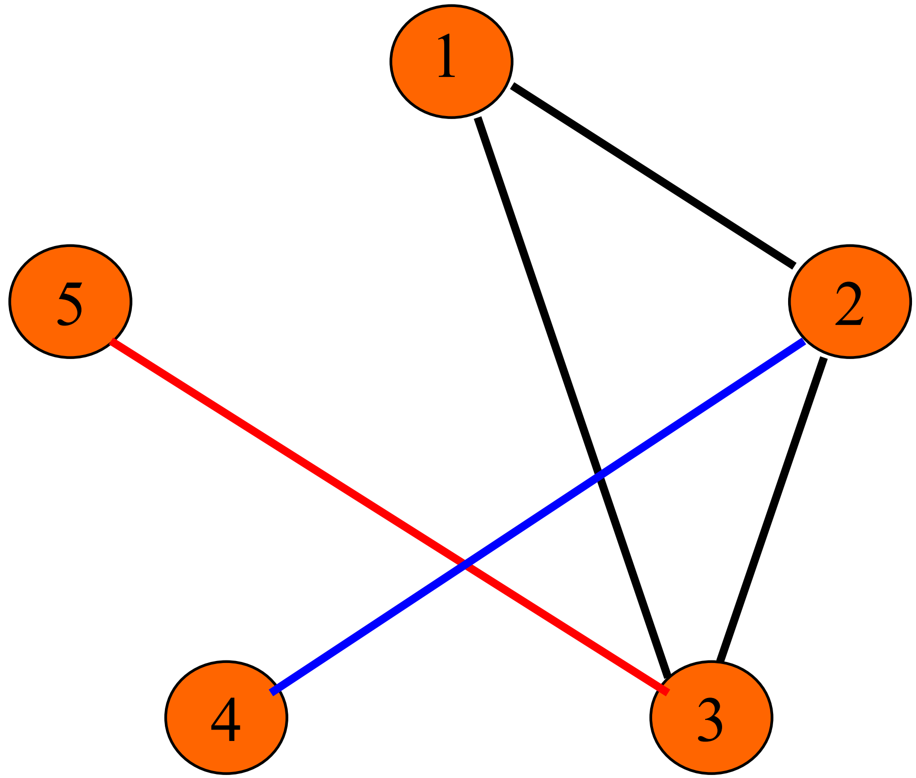
Problema do caixeiro viajante

- Escolha do novo nó a ser incorporado ao circuito a cada iteração pela inserção mais próxima
- Seleção do nó:
  - Distância mínima do nó 4: 4
  - Distância mínima do nó 5: 2



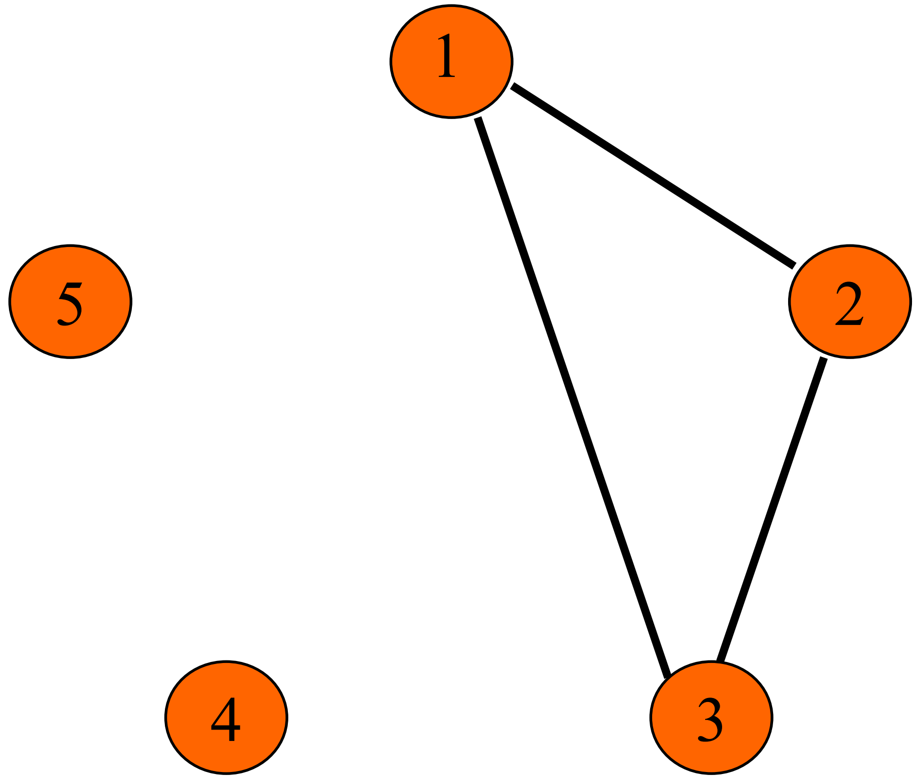
Problema do caixeiro viajante

- Escolha do novo nó a ser incorporado ao circuito a cada iteração pela inserção mais próxima
- Seleção do nó:
  - Distância mínima do nó 4: 4
  - Distância mínima do nó 5: 2
  - Nó selecionado: 5



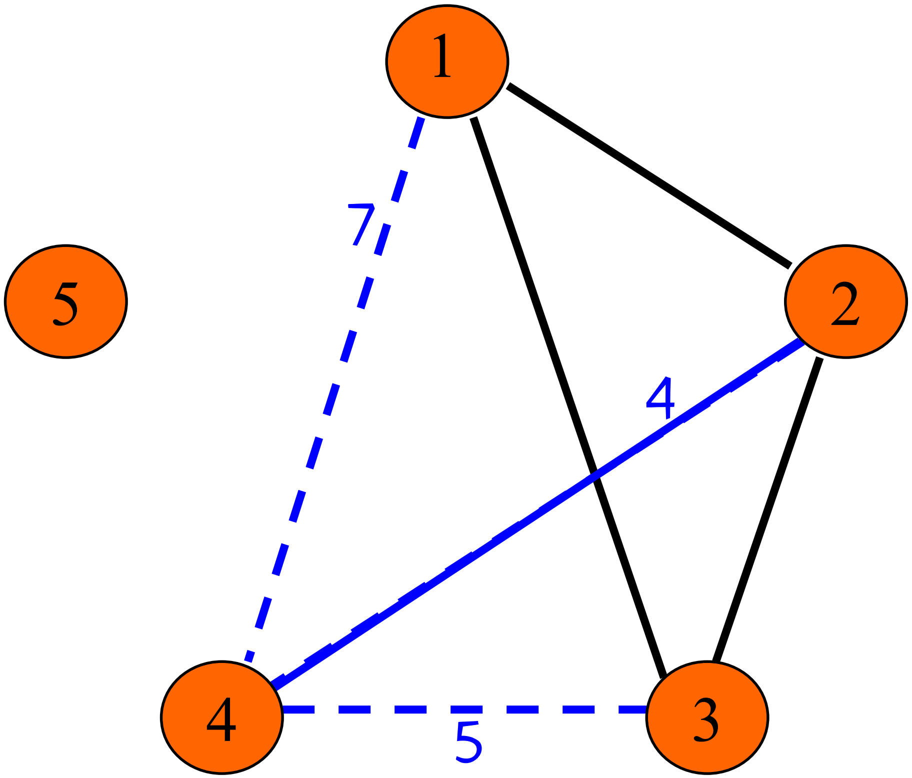
Problema do caixeiro viajante

- Escolha do novo nó a ser incorporado ao circuito a cada iteração pela inserção mais afastada
- Seleção do nó:



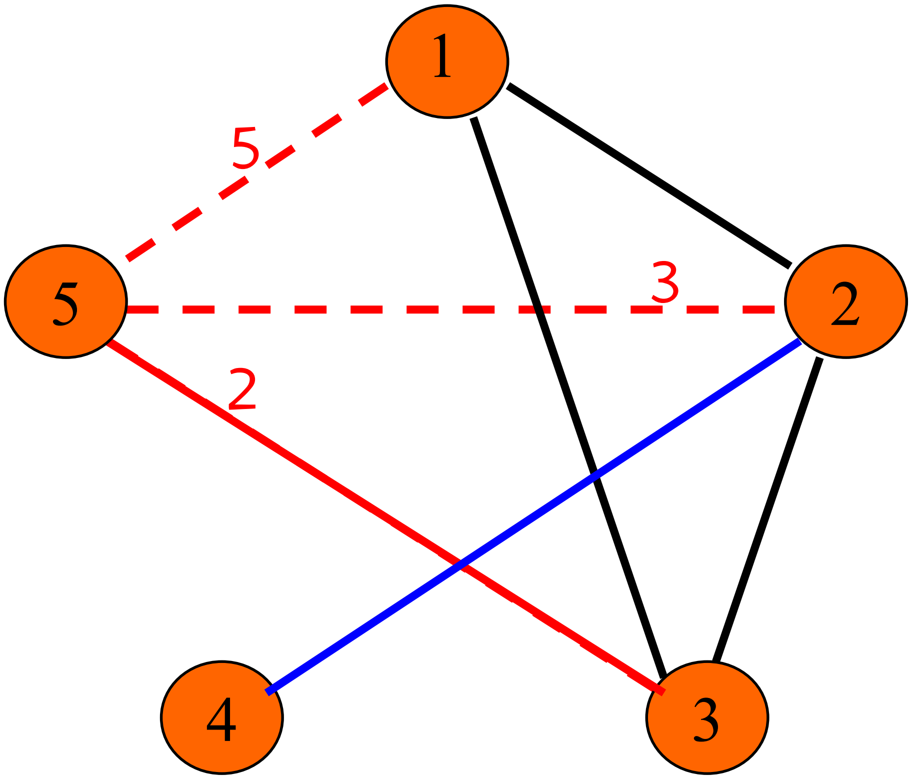
Problema do caixeiro viajante

- Escolha do novo nó a ser incorporado ao circuito a cada iteração pela inserção mais afastada
- Seleção do nó:
  - Distância mínima do nó 4: 4



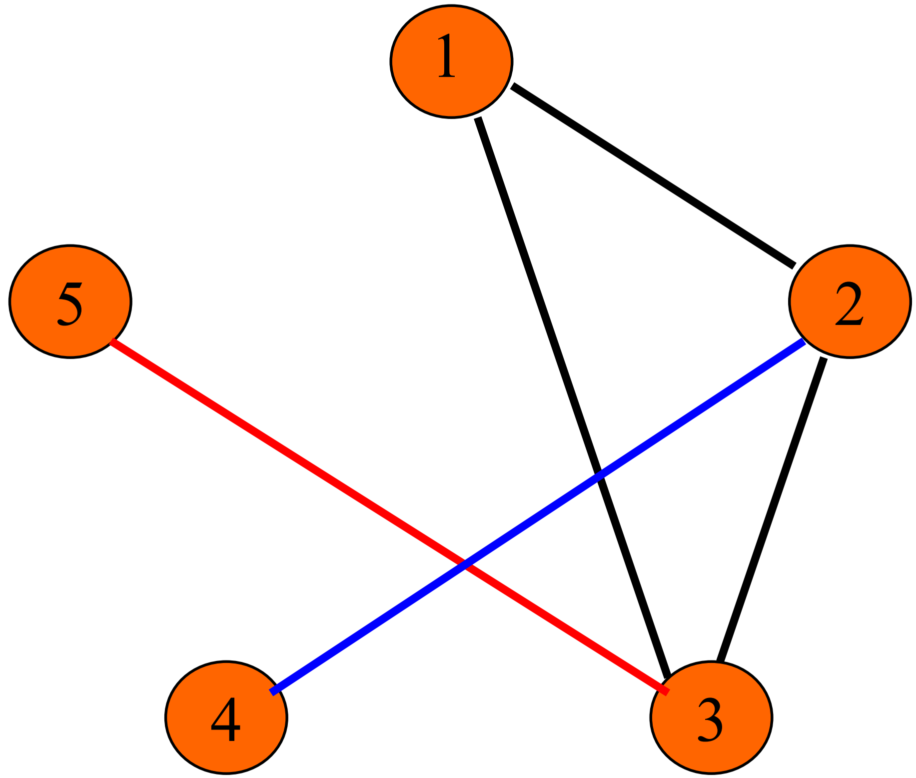
Problema do caixeiro viajante

- Escolha do novo nó a ser incorporado ao circuito a cada iteração pela inserção mais afastada
- Seleção do nó:
  - Distância mínima do nó 4: 4
  - Distância mínima do nó 5: 2



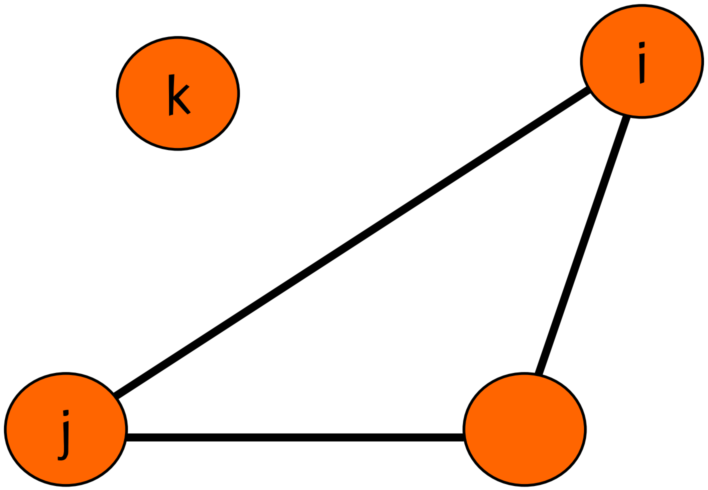
Problema do caixeiro viajante

- Escolha do novo nó a ser incorporado ao circuito a cada iteração pela inserção mais afastada
- Seleção do nó:
  - Distância mínima do nó 4: 4
  - Distância mínima do nó 5: 2
  - Nó selecionado: 4



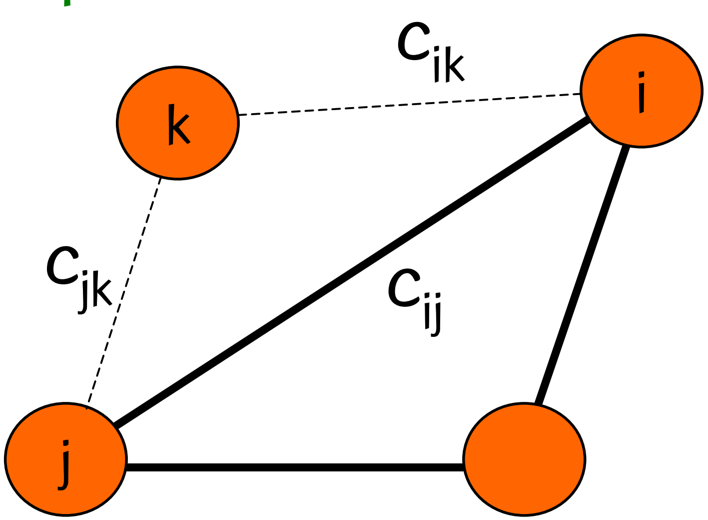
Problema do caixeiro viajante

- Escolha da posição onde o nó selecionado entra no circuito:
  - Suponha a entrada do nó k entre o nó i e o nó j.
  - Devem ser inseridas as areastas (i,k) e (j,k) no circuito parcial corrente, substituindo a aresta (i,j).
  - A variação no comprimento do circuito parcial corrente é dada por $\Delta_{ij}(k) = c_{ik} + c_{jk} - c_{ij}$.



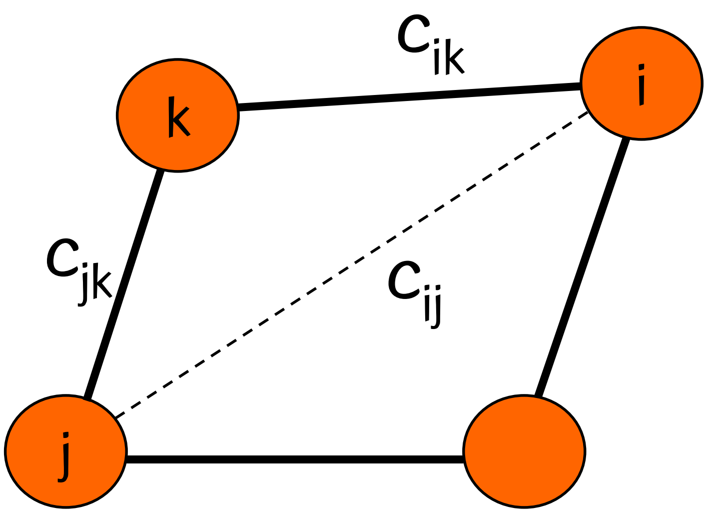
Problema do caixeiro viajante

- Escolha da posição onde o nó selecionado entra no circuito:
  - Suponha a entrada do nó k entre o nó i e o nó j.
  - Devem ser inseridas as areastas (i,k) e (j,k) no circuito parcial corrente, substituindo a aresta (i,j).
  - A variação no comprimento do circuito parcial corrente é dada por $\Delta_{ij}(k) = c_{ik} + c_{jk} - c_{ij}$.



Problema do caixeiro viajante

- Escolha da posição onde o nó selecionado entra no circuito:
  - Suponha a entrada do nó k entre o nó i e o nó j.
  - Devem ser inseridas as areastas (i,k) e (j,k) no circuito parcial corrente, substituindo a aresta (i,j).
  - A variação no comprimento do circuito parcial corrente é dada por $\Delta_{ij}(k) = c_{ik} + c_{jk} - c_{ij}$.



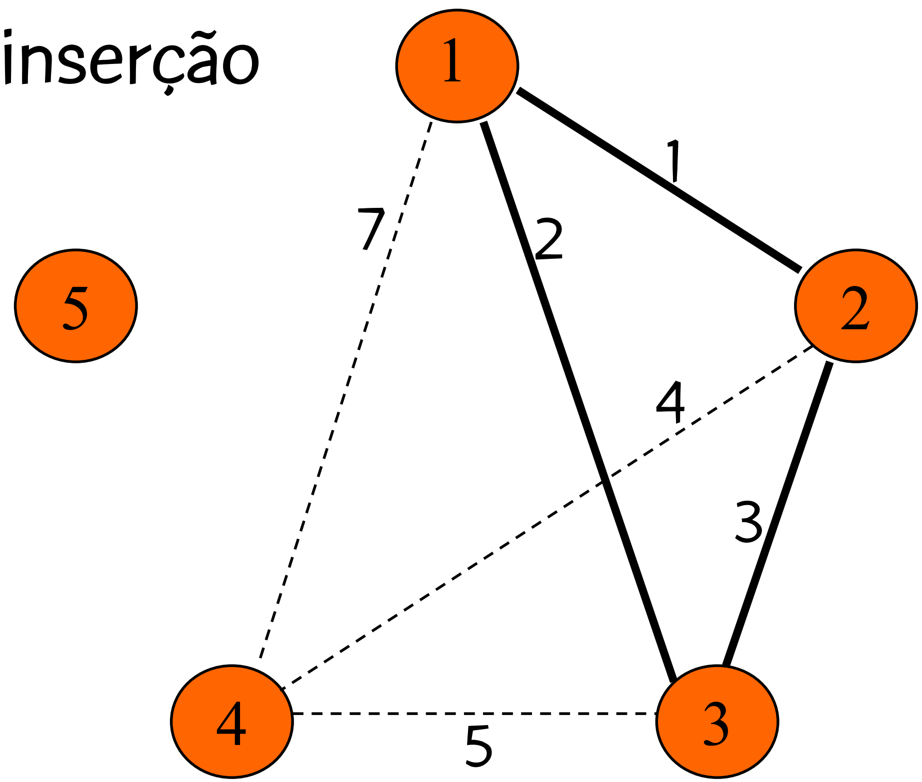
Problema do caixeiro viajante

- Escolha da posição onde o nó selecionado entra no circuito parcial corrente
- Exemplo: nó 4 escolhido para inserção

$\Delta_{12}(4) = 7+4-1 = 10$

$\Delta_{13}(4) = 7+5-2 = 10$

$\Delta_{23}(4) = 5+4-3 = 6$



Problema do caixeiro viajante

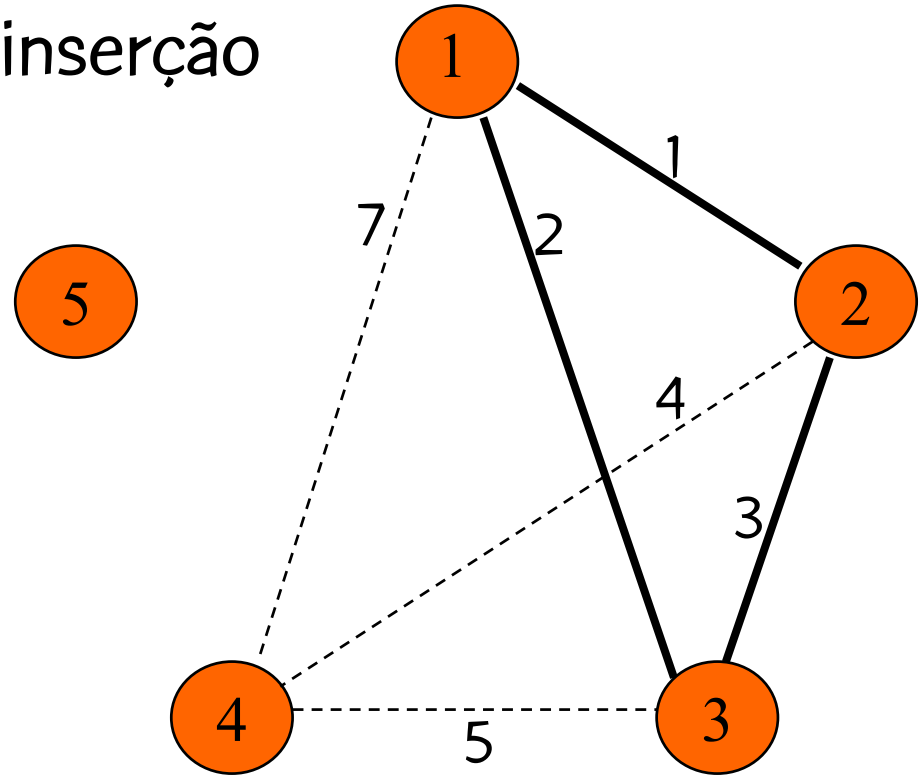
- Escolha da posição onde o nó selecionado entra no circuito parcial corrente
- Exemplo: nó 4 escolhido para inserção

$\Delta_{12}(4) = 7+4-1 = 10$

$\Delta_{13}(4) = 7+5-2 = 10$

$\Delta_{23}(4) = 5+4-3 = 6$

- Inserção mais próxima: entre os nós 2 e 3



Problema do caixeiro viajante

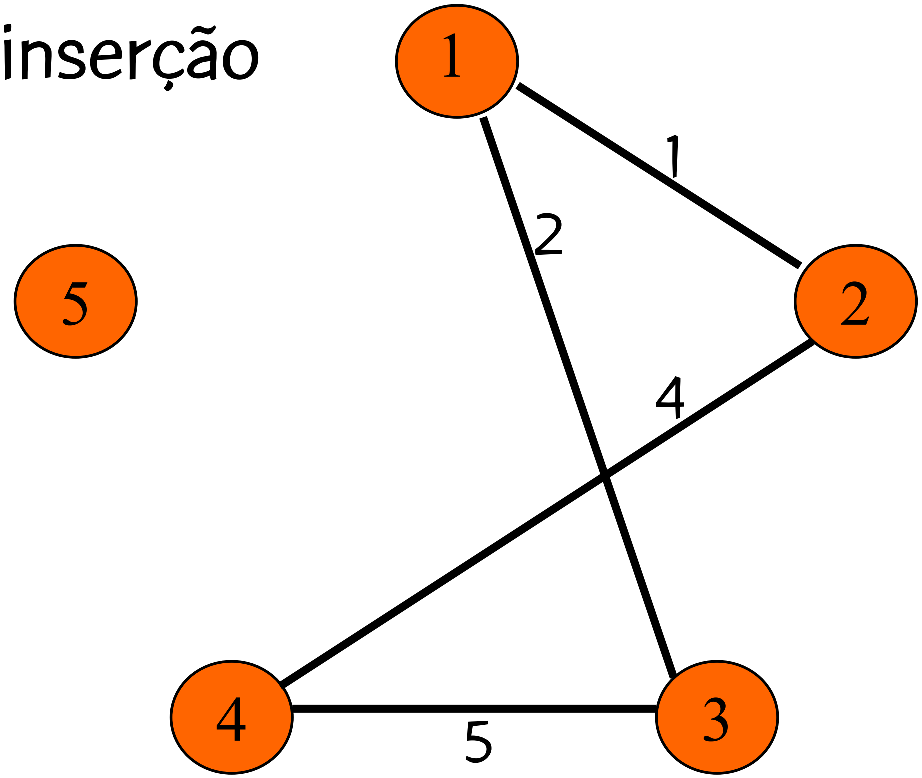
- Escolha da posição onde o nó selecionado entra no circuito parcial corrente
- Exemplo: nó 4 escolhido para inserção

$\Delta_{12}(4) = 7+4-1 = 10$

$\Delta_{13}(4) = 7+5-2 = 10$

$\Delta_{23}(4) = 5+4-3 = 6$

- Inserção mais próxima: entre os nós 2 e 3



Problema do caixeiro viajante

- Algoritmo de inserção mais próxima:

Escolher o nó inicial i, inicializar um circuito apenas com o nó i e fazer $N \leftarrow N\text{-}\{i\}$.

Enquanto $N \neq \emptyset$ fazer:

Encontrar o vértice k fora do circuito corrente cuja aresta de menor comprimento que o liga a ele é mínima.

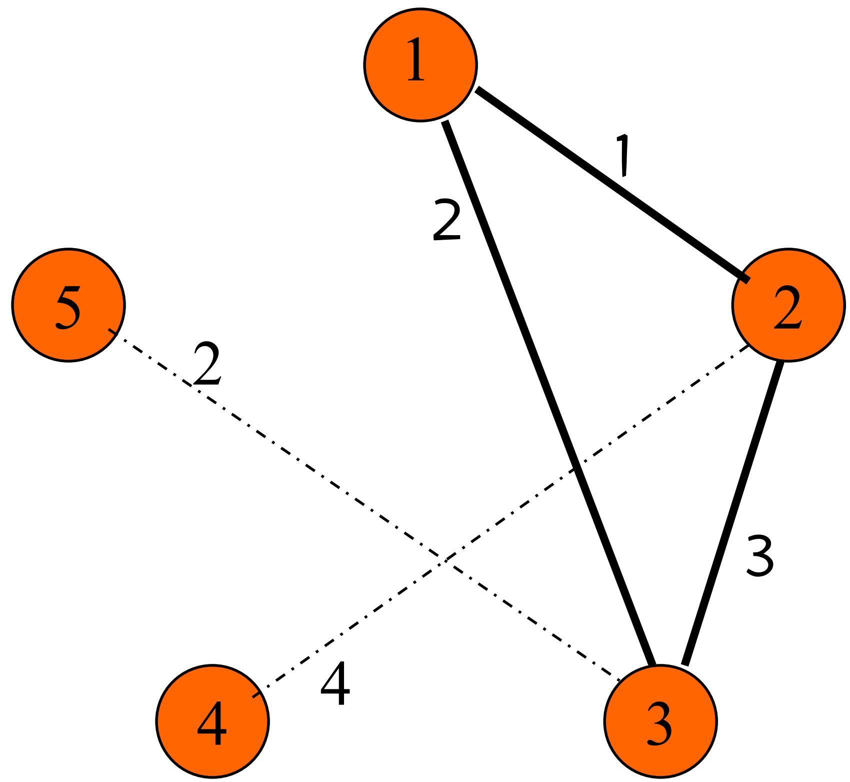
Encontrar o par de arestas (i,k) e (j,k) que ligam o vértice k ao ciclo minimizando $\Delta_{ij}(k) = c_{ik} + c_{jk} - c_{ij}$.

Inserir as arestas (i,k) e (j,k) e retirar a aresta (i,j).

Fazer $N \leftarrow N\text{-}\{k\}$.

Fim-enquanto

Problema do caixeiro viajante

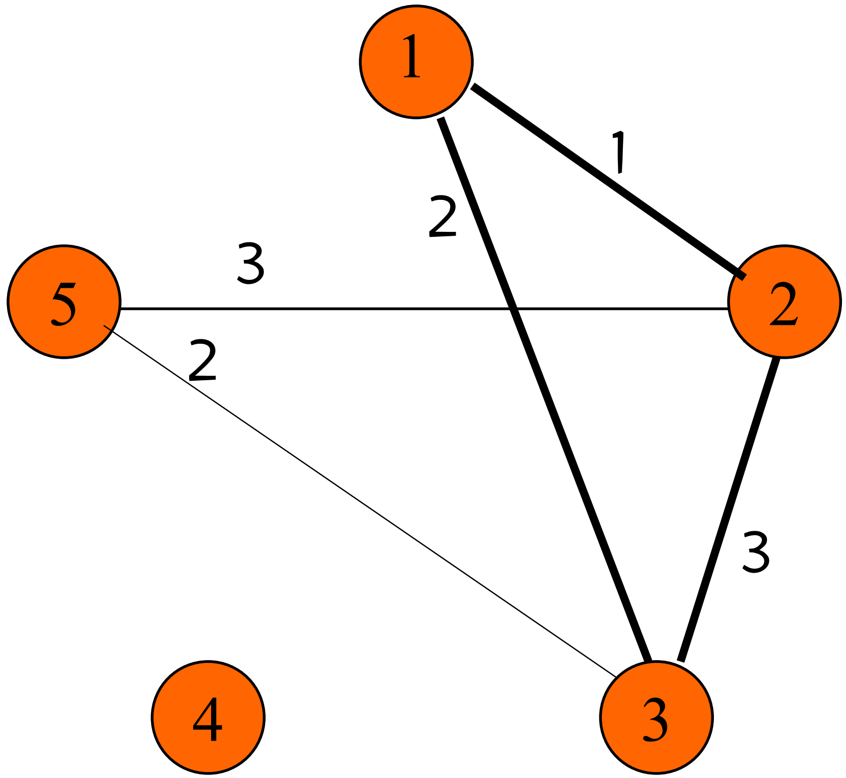


Problema do caixeiro viajante

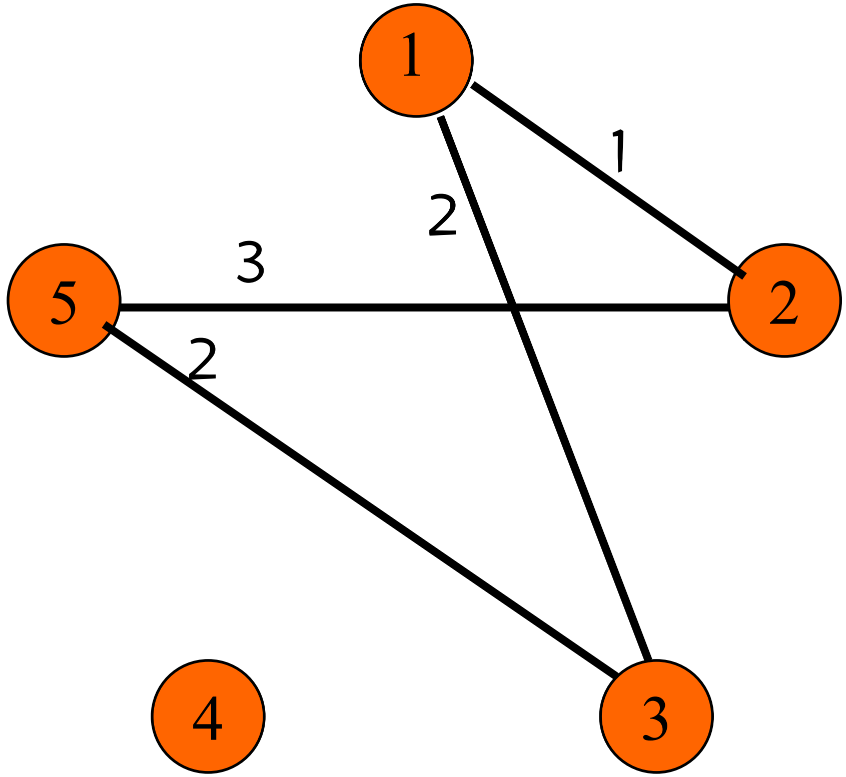
$\Delta_{12}(5) = 5+3-1 = 7$

$\Delta_{23}(5) = 2+3-3 = 2$

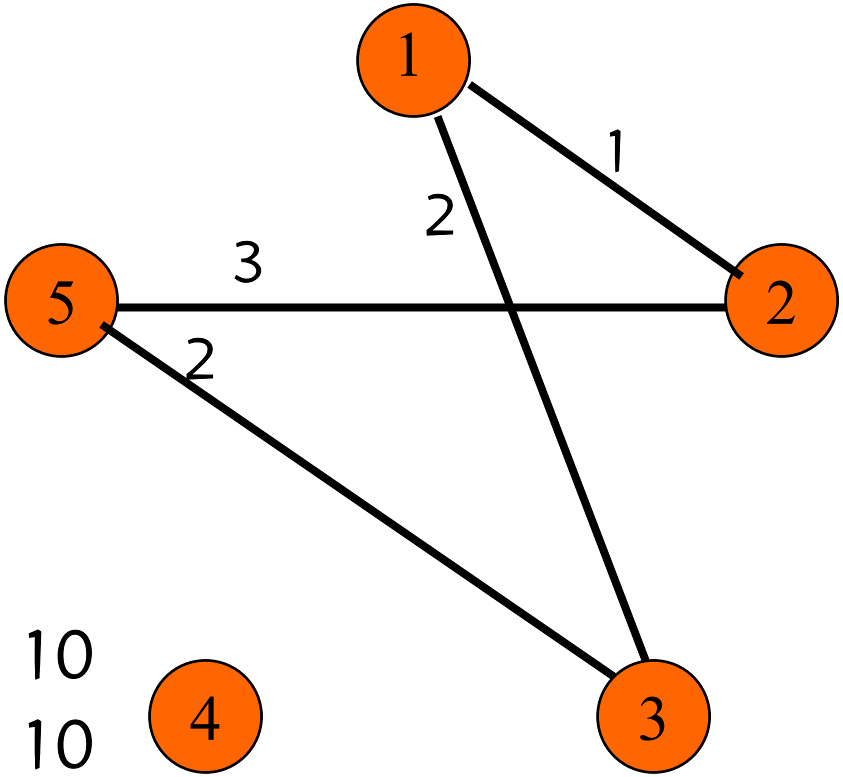
$\Delta_{13}(5) = 2+5-2 = 5$



Problema do caixeiro viajante



Problema do caixeiro viajante



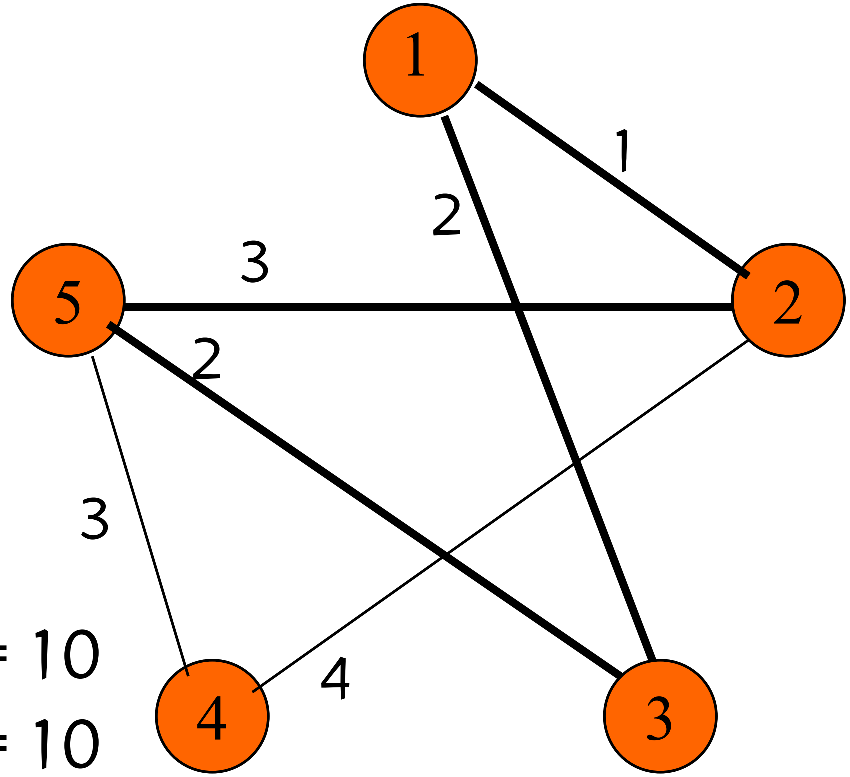
$\Delta_{12}(4) = 7+4-1 = 10$

$\Delta_{13}(4) = 7+5-2 = 10$

$\Delta_{35}(4) = 5+3-2 = 6$

$\Delta_{25}(4) = 4+3-3 = 4$

Problema do caixeiro viajante



$\Delta_{12}(4) = 7+4-1 = 10$

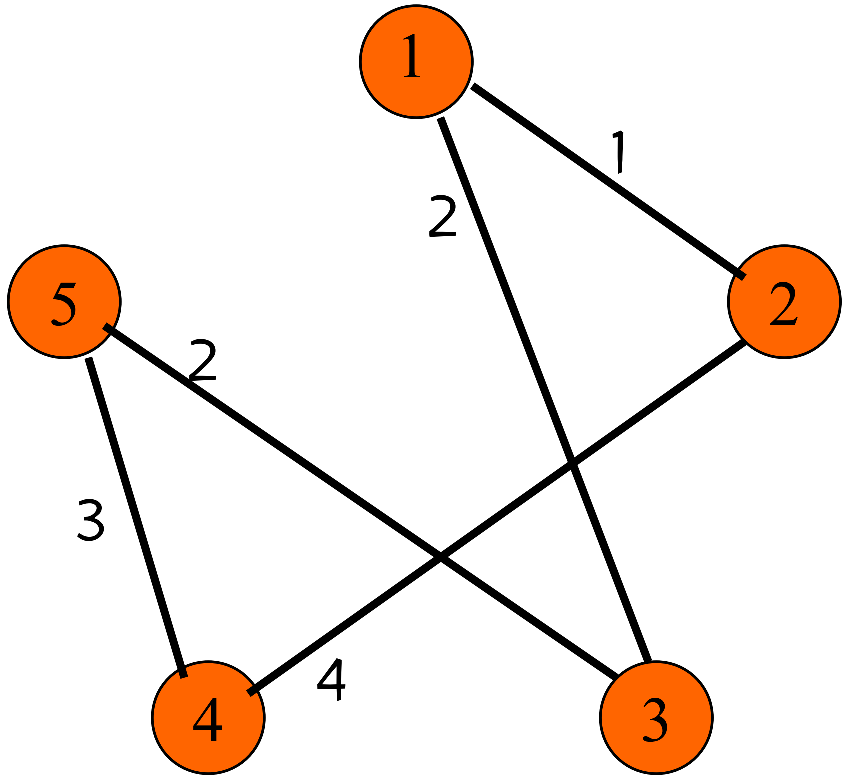
$\Delta_{13}(4) = 7+5-2 = 10$

$\Delta_{35}(4) = 5+3-2 = 6$

$\Delta_{25}(4) = 4+3-3 = 4$

Problema do caixeiro viajante

comprimento = 12



Problema do caixeiro viajante

- Comparação: na prática, o método de inserção mais afastada alcança melhores resultados do que o de inserção mais próxima.
- Melhoria simples: método de inserção mais barata
  - Por que separar em dois passos (1) a seleção do novo nó incorporado ao circuito a cada iteração e (2) a seleção da posição onde ele entra no circuito?
  - Fazer a escolha da melhor combinação em conjunto.
  - Melhores soluções, mas tempos de processamento maiores (cerca de n vezes maiores).

Problema do caixeiro viajante

- Algoritmo de inserção mais barata:

Escolher o nó inicial i, inicializar um circuito apenas com o nó i e fazer $N \leftarrow N-\{i\}$.

Enquanto $N \neq \emptyset$ fazer:

Encontrar o vértice k fora do circuito corrente e o par de arestas (i,k) e (j,k) que ligam o vértice k ao ciclo minimizando $\Delta_{ij}(k) = c_{ik} + c_{jk} - c_{ij}$.

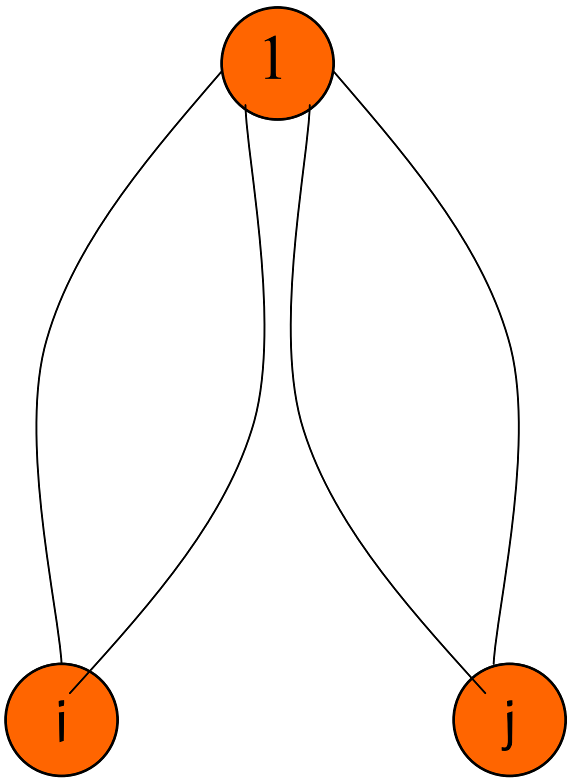
Inserir as arestas (i,k) e (j,k) e retirar a aresta (i,j).

Fazer $N \leftarrow N-\{k\}$.

Fim-enquanto

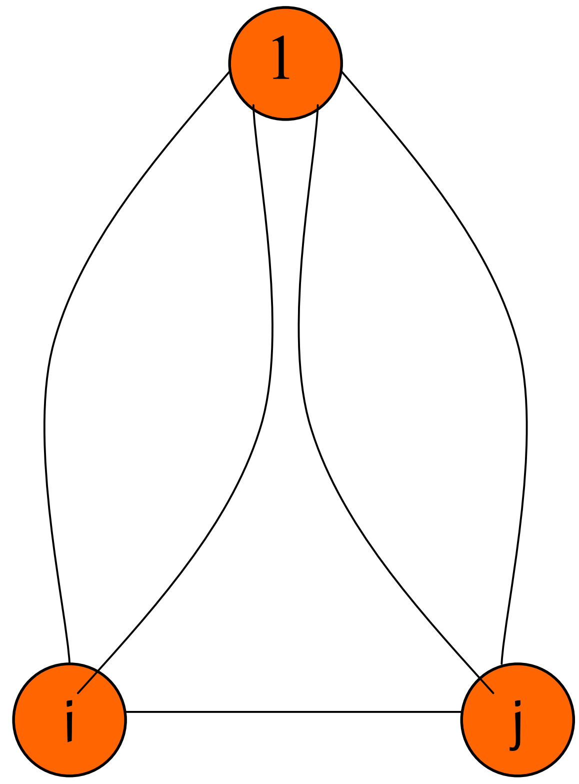
Problema do caixeiro viajante

- Outra idéia diferente: considerar a fusão de subcircuitos
- Considerar dois subcircuitos passando pelo nó 1 e pelos nós i e j.
- Conectá-los diretamente através da aresta (i,j).



Problema do caixeiro viajante

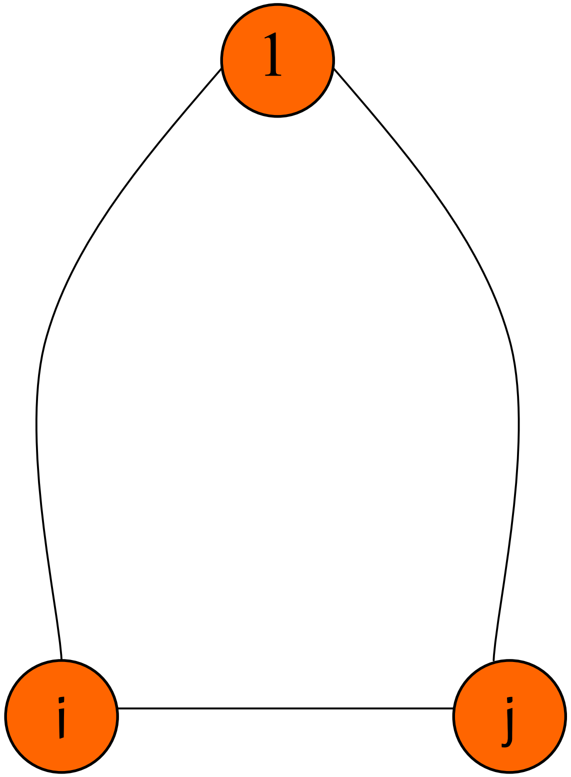
- Outra idéia diferente: considerar a fusão de subcircuitos
- Considerar dois subcircuitos passando pelo nó 1 e pelos nós i e j.
- Conectá-los diretamente através da aresta (i,j).
- Remover as arestas (1,i) e (1,j).



Problema do caixeiro viajante

- Outra idéia diferente: considerar a fusão de subcircuitos
- Considerar dois subcircuitos passando pelo nó 1 e pelos nós i e j.
- Conectá-los diretamente através da aresta (i,j).
- Remover as arestas (1,i) e (1,j).
- Economia realizada:

  $s_{ij} = c_{1i} + c_{1j} - c_{ij}$



Problema do caixeiro viajante

- Algoritmo das economias:

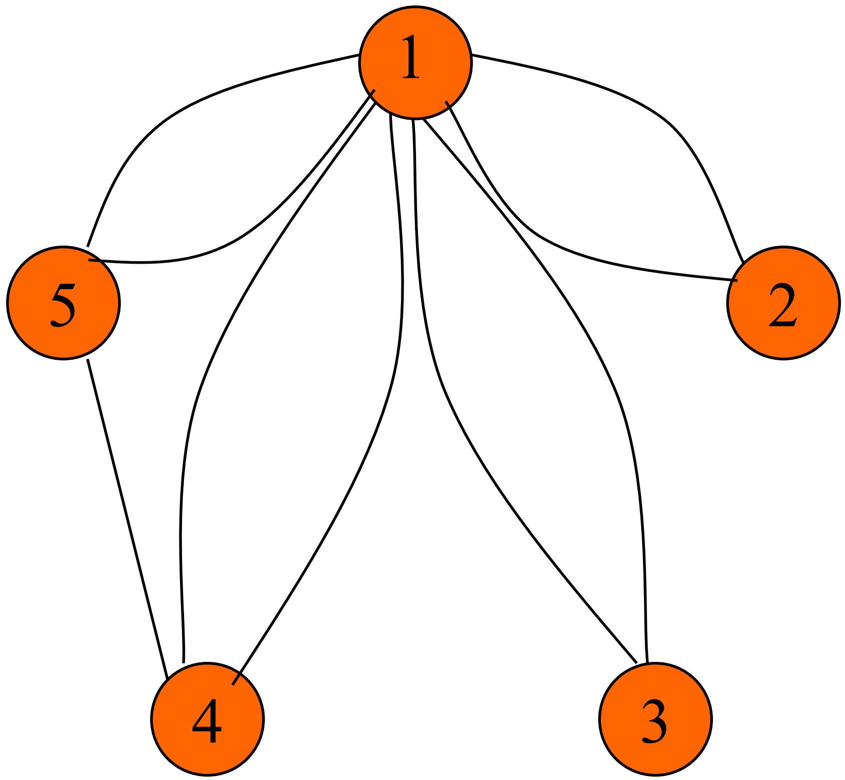
Escolher um nó inicial i (e.g., i = 1).

Construir subcircuitos de comprimento 2 envolvendo o nó inicial (e.g., i = 1) e cada um dos demais nós de N.

Calcular as economias $s_{ij} = c_{1i} + c_{1j} - c_{ij}$ obtidas pela fusão dos subcircuitos contendo i e j e ordená-las em ordem decrescente.

Percorrer a lista de economias e fundir os subcircuitos possíveis: a cada iteração, maximizar a distância economizada sobre a solução anterior, combinando-se dois subcircuitos e substituindo-os por uma nova aresta.

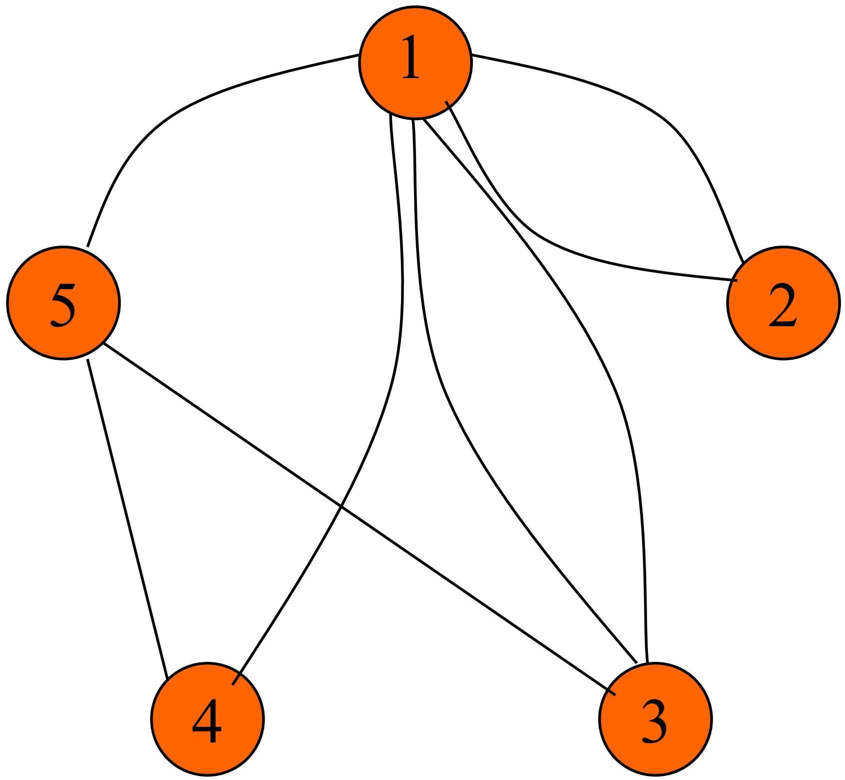
Problema do caixeiro viajante



$s_{45} = 9$
$s_{35} = 5$
$s_{34} = 4$
$s_{24} = 4$
$s_{25} = 3$
$s_{23} = 0$

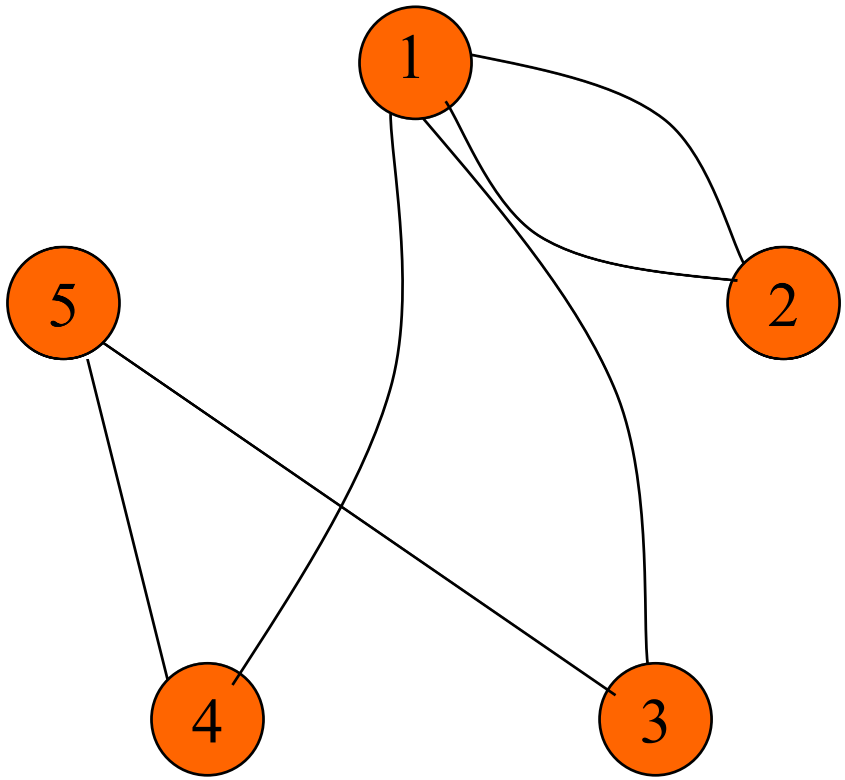
Problema do caixeiro viajante

$s_{45} = 9$
$s_{35} = 5$
$s_{34} = 4$
$s_{24} = 4$
$s_{25} = 3$
$s_{23} = 0$



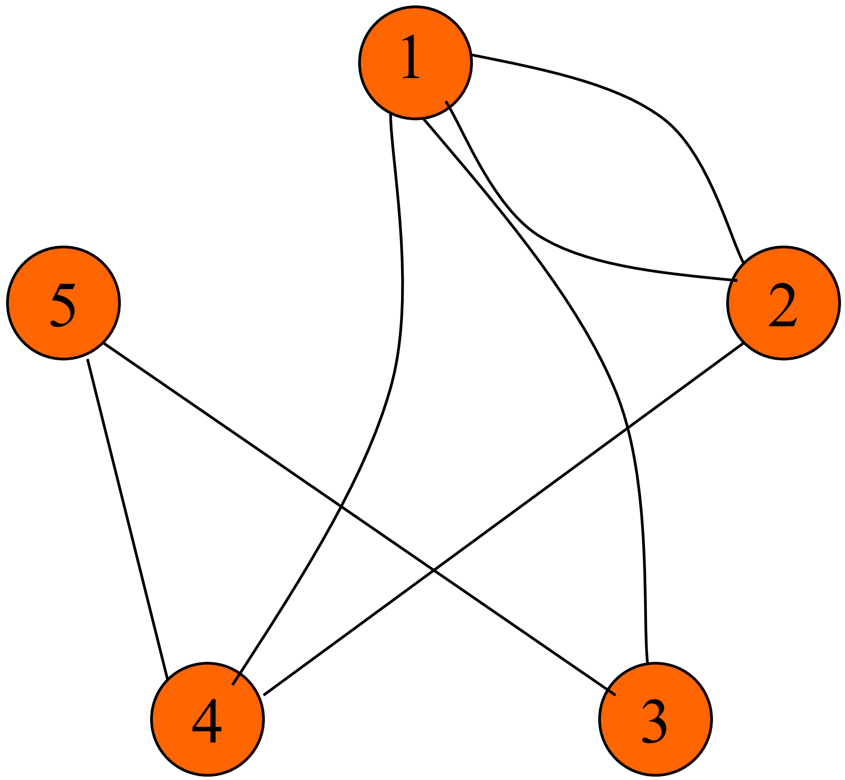
Problema do caixeiro viajante

$s_{45} = 9$
$s_{35} = 5$
$s_{34} = 4$
$s_{24} = 4$
$s_{25} = 3$
$s_{23} = 0$



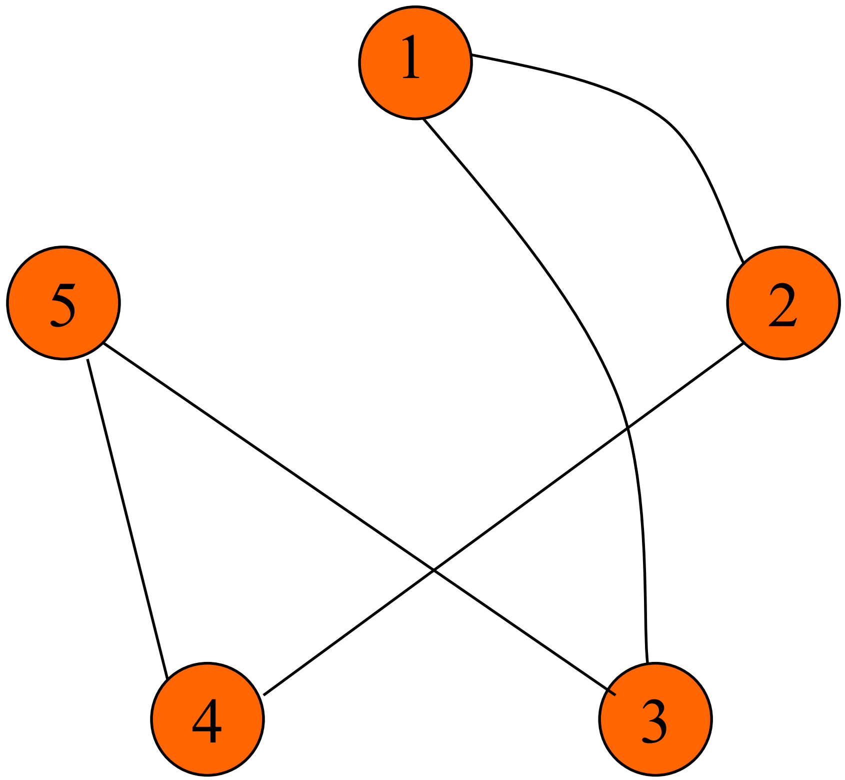
Problema do caixeiro viajante

$s_{45} = 9$
$s_{35} = 5$
$s_{34} = 4$
$s_{24} = 4$
$s_{25} = 3$
$s_{23} = 0$



Problema do caixeiro viajante

$s_{45} = 9$
$s_{35} = 5$
$s_{34} = 4$
$s_{24} = 4$
$s_{25} = 3$
$s_{23} = 0$



comprimento = 12

Problema de Steiner em grafos

- Grafo não-orientado $G=(V,E)$

  V: vértices

  E: arestas

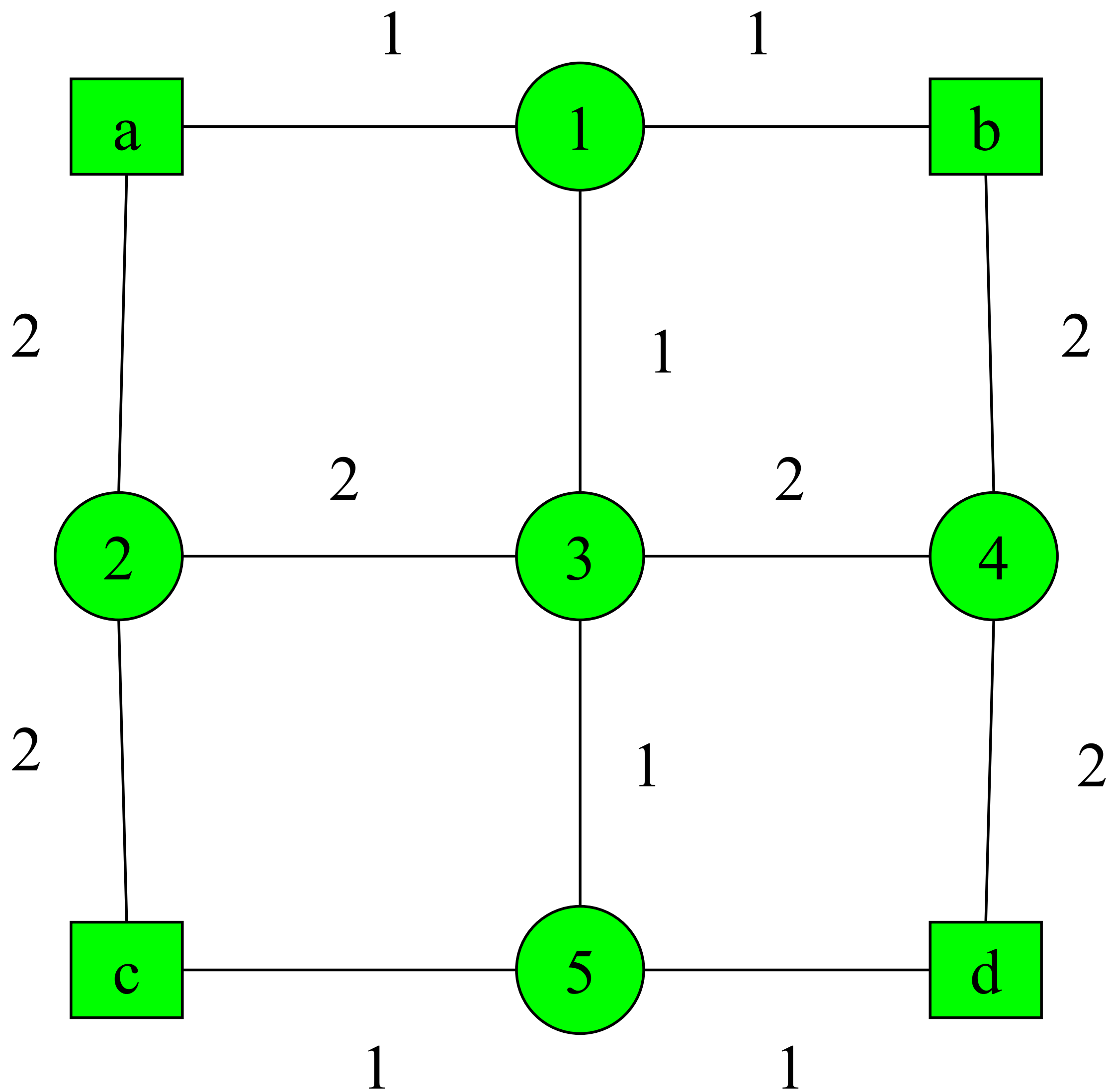
  T: vértices terminais (obrigatórios)

  c_e: peso (positivo) da aresta $e \in E$
- Problema: conectar os nós terminais com custo (peso) mínimo, eventualmente utilizando os demais nós como passagem.

Problema de Steiner em grafos

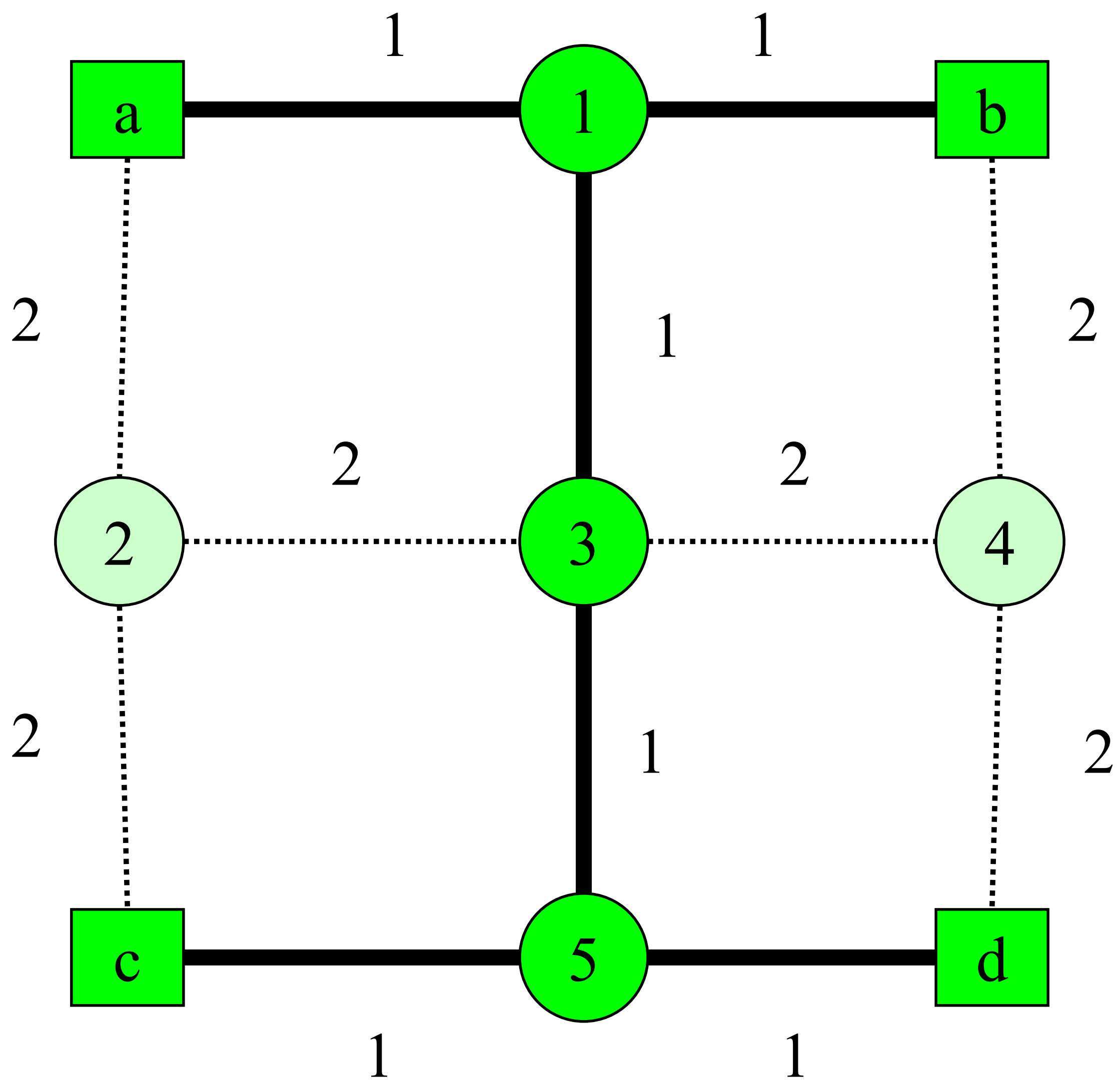
- Vértices de Steiner: vértices opcionais que fazem parte da solução ótima
- Aplicações: projeto de redes de computadores (conectar um conjunto de clientes através de concentradores, cujos locais devem ser determinados), redes de telecomunicações, problema da filogenia em biologia, etc.

Problema de Steiner em grafos



Problema de Steiner em grafos

Mínimo: 6



Problema de Steiner em grafos

- Heurística da rede de distâncias:

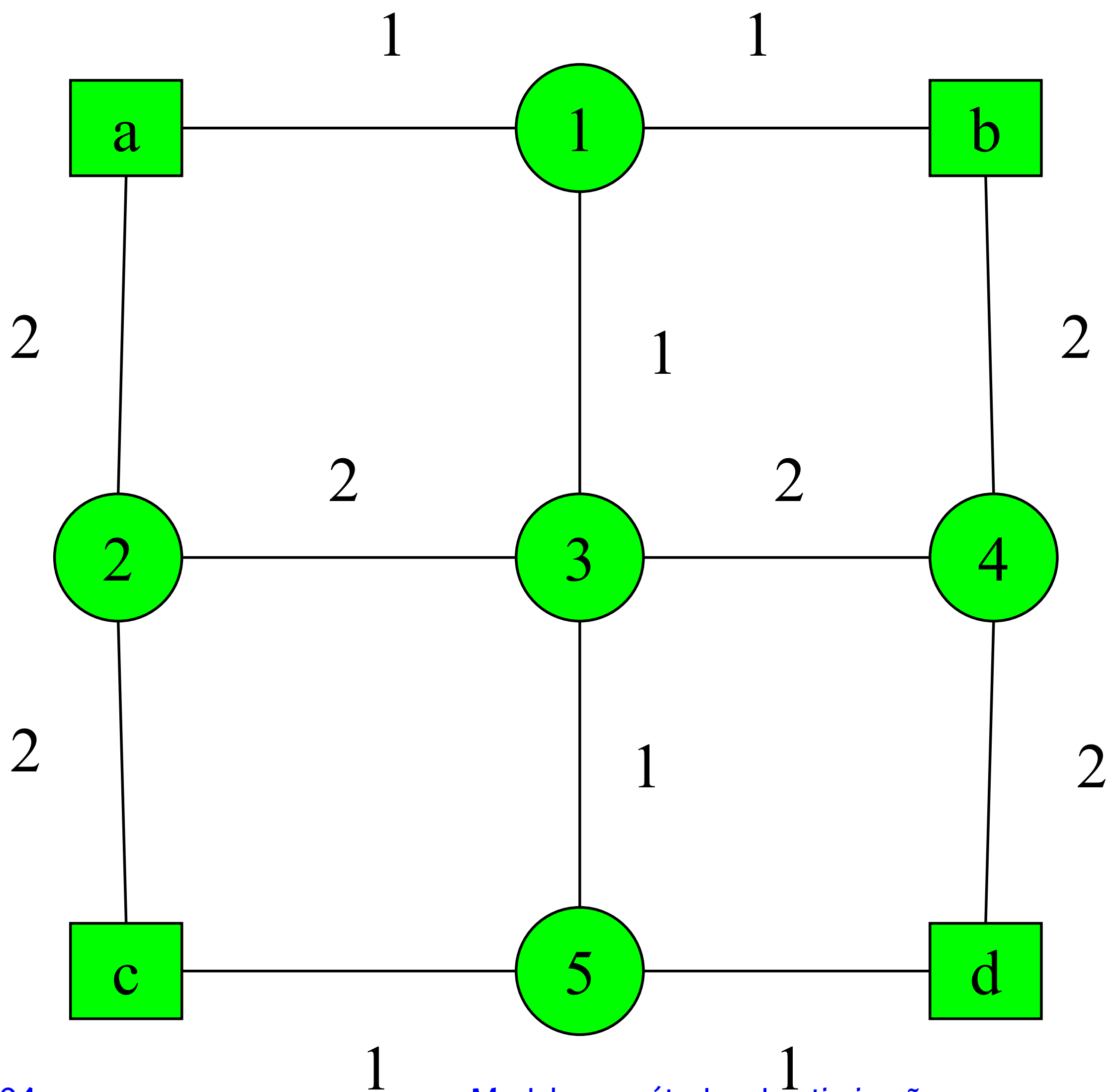
Calcular os caminhos mais curtos entre cada par de terminais do grafo.

Criar a rede de distâncias formada pelos nós obrigatórios e pelas arestas correspondentes aos caminhos mais curtos.

Obter a árvore geradora de peso mínimo dos nós da rede de distâncias.

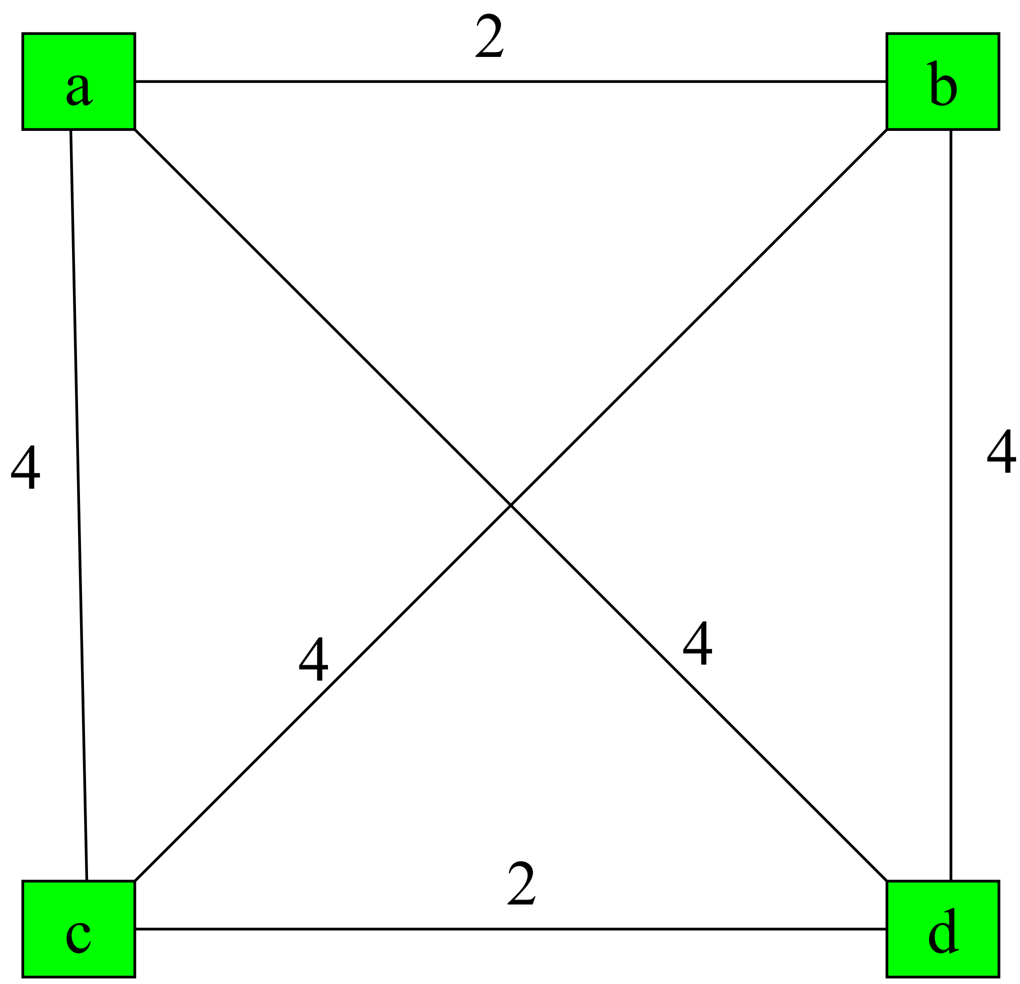
Expandir as arestas da árvore geradora.

Problema de Steiner em grafos



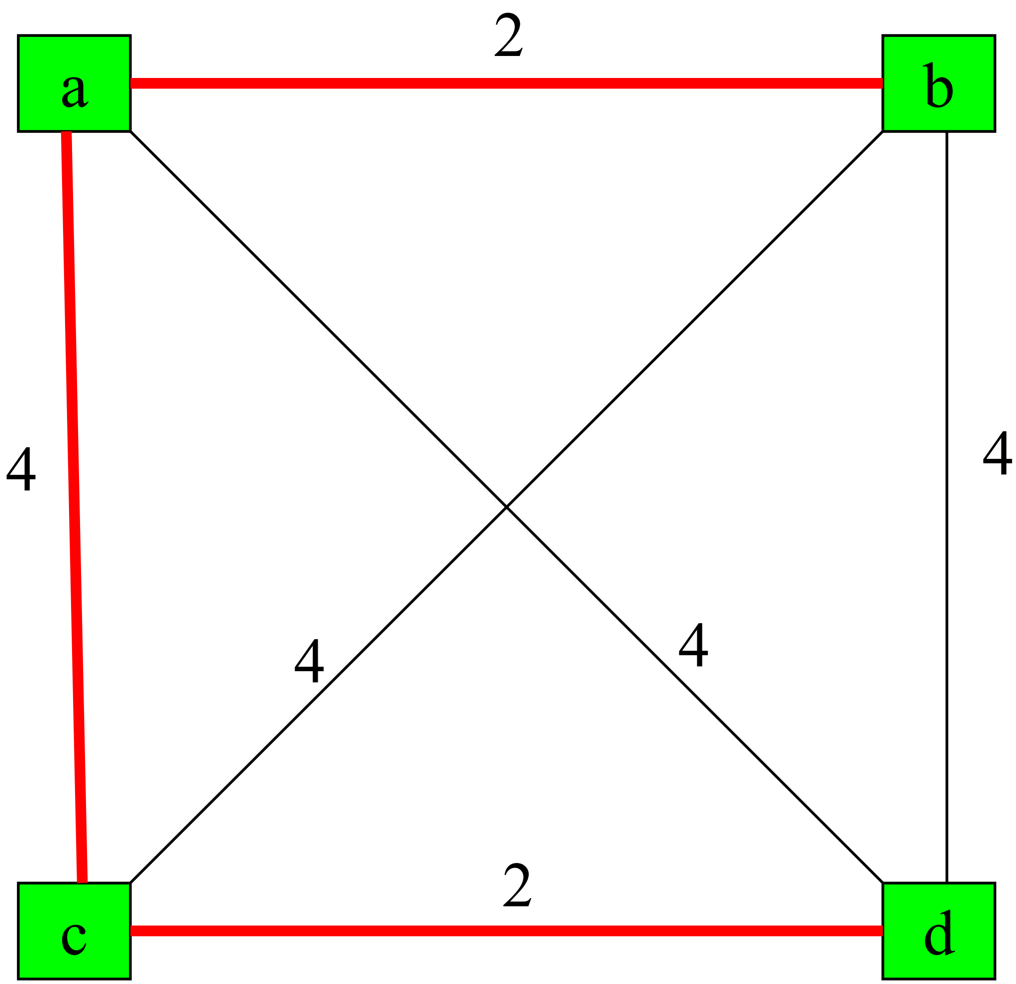
C_{ab}: a,1,b (2)
C_{ac}: a,2,c (4)
C_{ad}: a,1,3,5,d (4)
C_{bc}: b,1,3,5,c (4)
C_{bd}: b,4,d (4)
C_{cd}: c,5,d (2)

Problema de Steiner em grafos



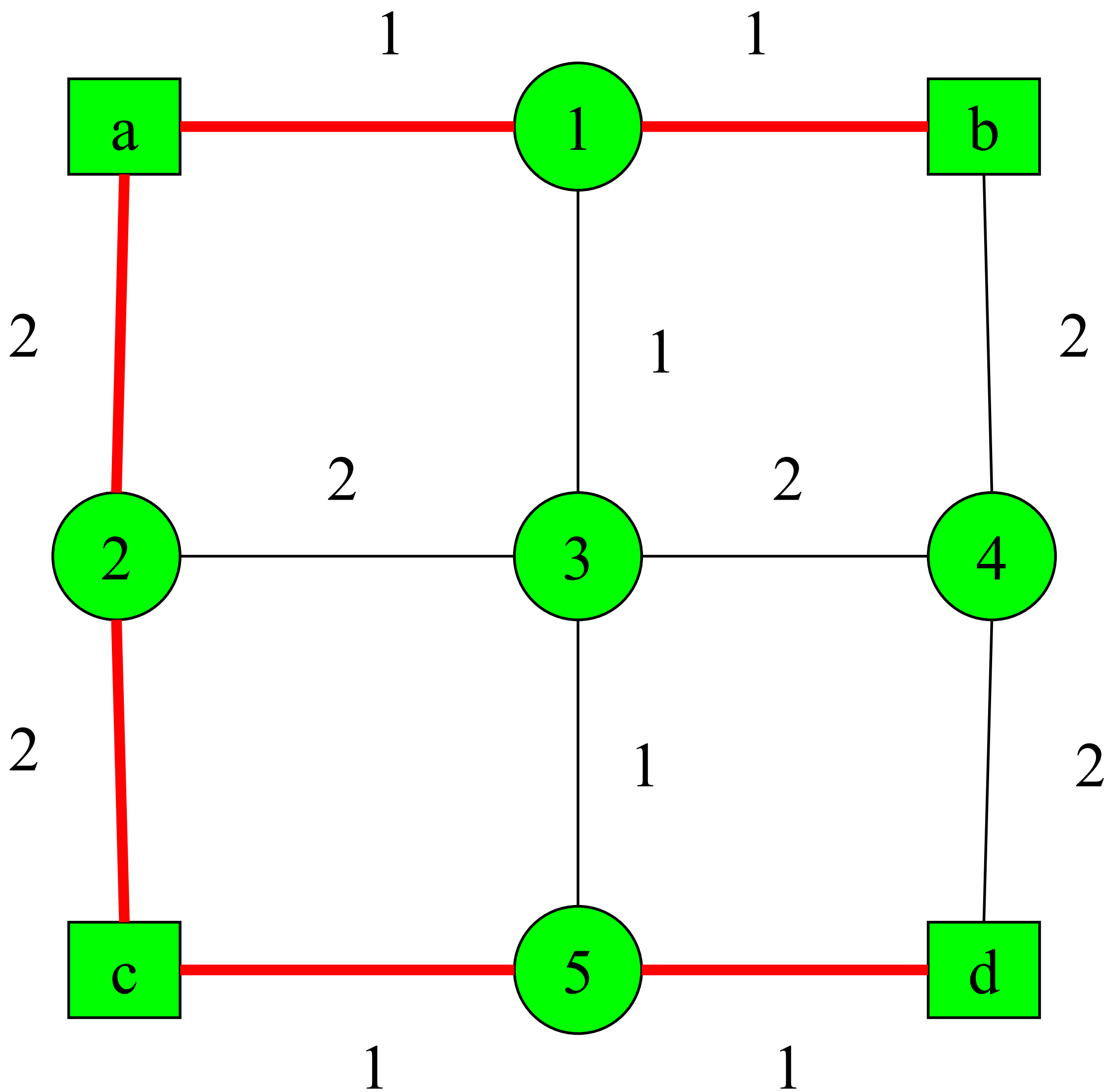
C_{ab}: a,1,b (2)
C_{ac}: a,2,c (4)
C_{ad}: a,1,3,5,d (4)
C_{bc}: b,1,3,5,c (4)
C_{bd}: b,4,d (4)
C_{cd}: c,5,d (2)

Problema de Steiner em grafos



C_{ab}: a,1,b (2)
C_{ac}: a,2,c (4)
C_{ad}: a,1,3,5,d (4)
C_{bc}: b,1,3,5,c (4)
C_{bd}: b,4,d (4)
C_{cd}: c,5,d (2)

Problema de Steiner em grafos



C_{ab}: a,1,b (2)

C_{ac}: a,2,c (4)

C_{ad}: a,1,3,5,d (4)

C_{bc}: b,1,3,5,c (4)

C_{bd}: b,4,d (4)

C_{cd}: c,5,d (2)

Peso: 8

Problema de Steiner em grafos

- Heurística dos caminhos mais curtos:

Calcular o caminho mais curto de entre cada par de terminais.

Sejam s um nó terminal, Solução $\leftarrow$ {s}, S $\leftarrow$ {s}, k $\leftarrow$ 0.

Enquanto S $\neq$ T fazer:

  Obter o terminal s mais próximo de Solução e o caminho correspondente C.

  Fazer S $\leftarrow$ S $\cup$ {s} e Solução $\leftarrow$ Solução $\cup$ C.

Fim-enquanto

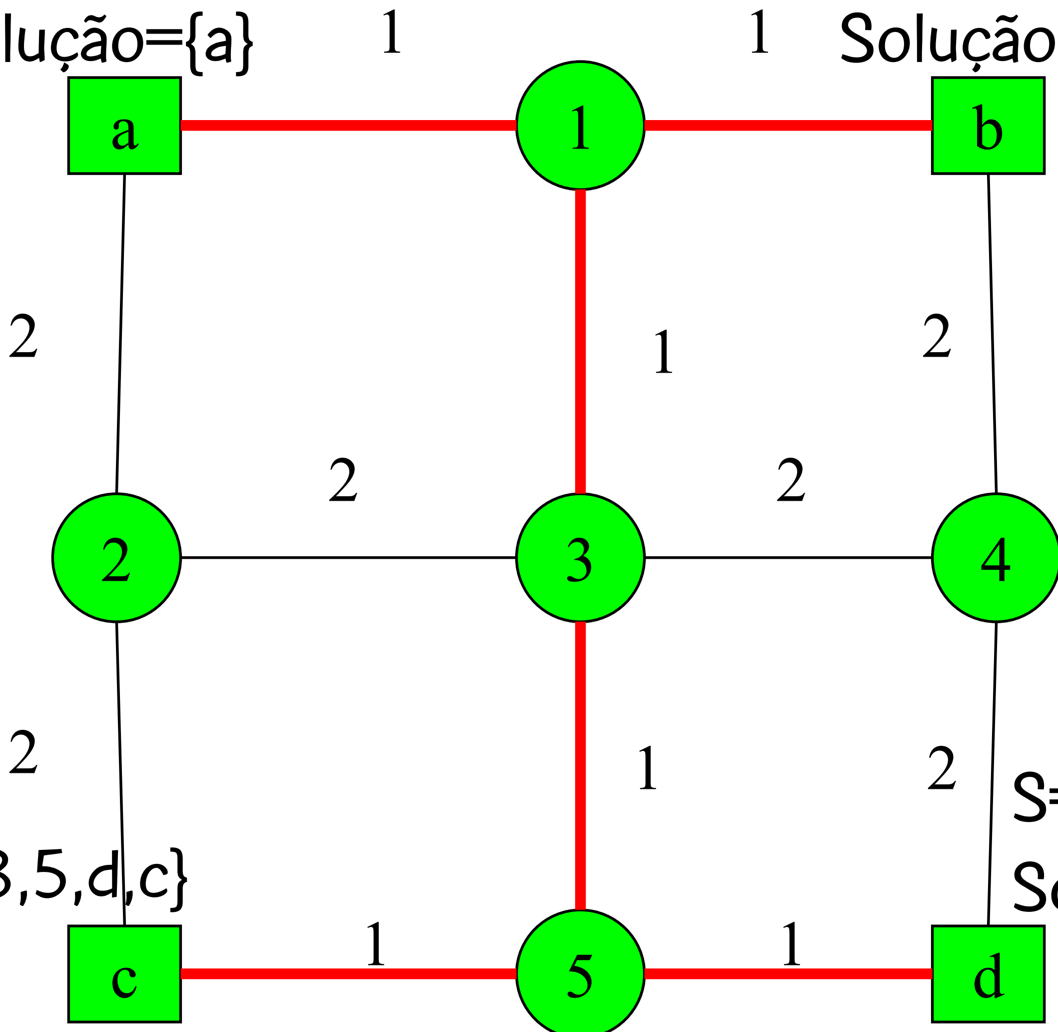
Problema de Steiner em grafos

S={a}

Solução={a}

S={a,b}

Solução={a,1,b}



Peso: 6

S={a,b,d,c}

Solução={a,1,b,3,5,d,c}

S={a,b,d}

Solução={a,1,b,3,5,d}

Algoritmos gulosos

- Algoritmos gulosos:

  A construção de uma solução gulosa consiste em selecionar seqüencialmente o elemento de E que minimiza o incremento no custo da solução parcial mantendo sua viabilidade, terminando quando se obtém uma solução viável (problema de minimização).

  O incremento no custo da solução parcial é chamado de função gulosa.

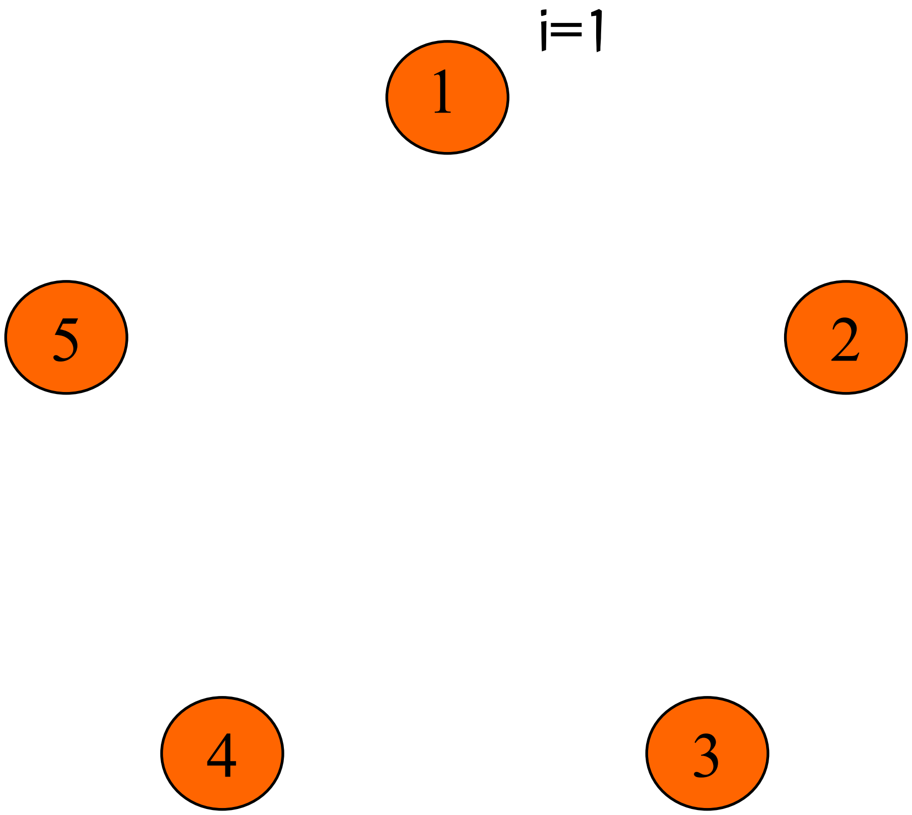
Algoritmos gulosos

- Cada elemento que entra na solução, nela permanece até o final.
- Algoritmo guloso para o problema da mochila:
  - Ordenar os itens em ordem decrescente da razão c_j/a_j.
  - Selecionar os itens que cabem na mochila segundo esta ordem.
- Algoritmo do vizinho mais próximo para o PCV
- Cuidado: nem sempre encontram a solução ótima exata, são portanto heurísticas para estes problemas!

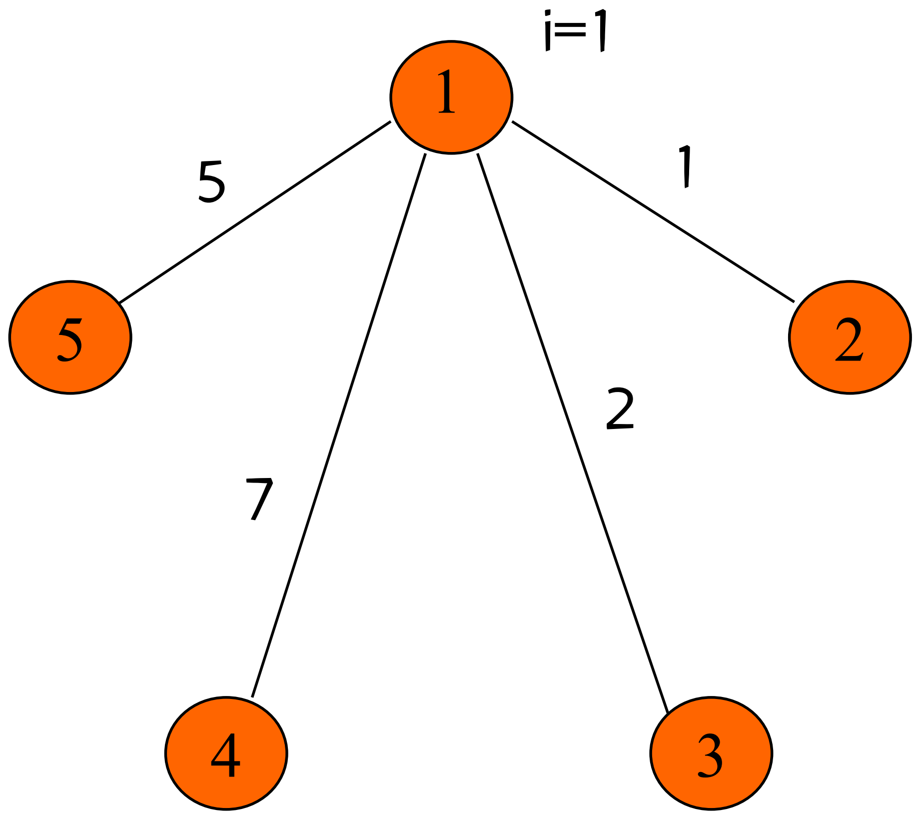
Algoritmos gulosos randomizados

- Um algoritmo guloso encontra sempre a mesma solução para um dado problema.
- Randomização das escolhas gulosas permite alcançar diversidade nas soluções encontradas, se o algoritmo for aplicado diversas vezes.
- Algoritmo guloso randomizado:
  - Criar uma lista de candidatos a cada iteração com os melhores elementos ainda não selecionados e fazer uma escolha aleatória entre eles.
- Aplicar o algoritmo repetidas vezes, obtendo soluções diferentes a cada aplicação e salvando a melhor.

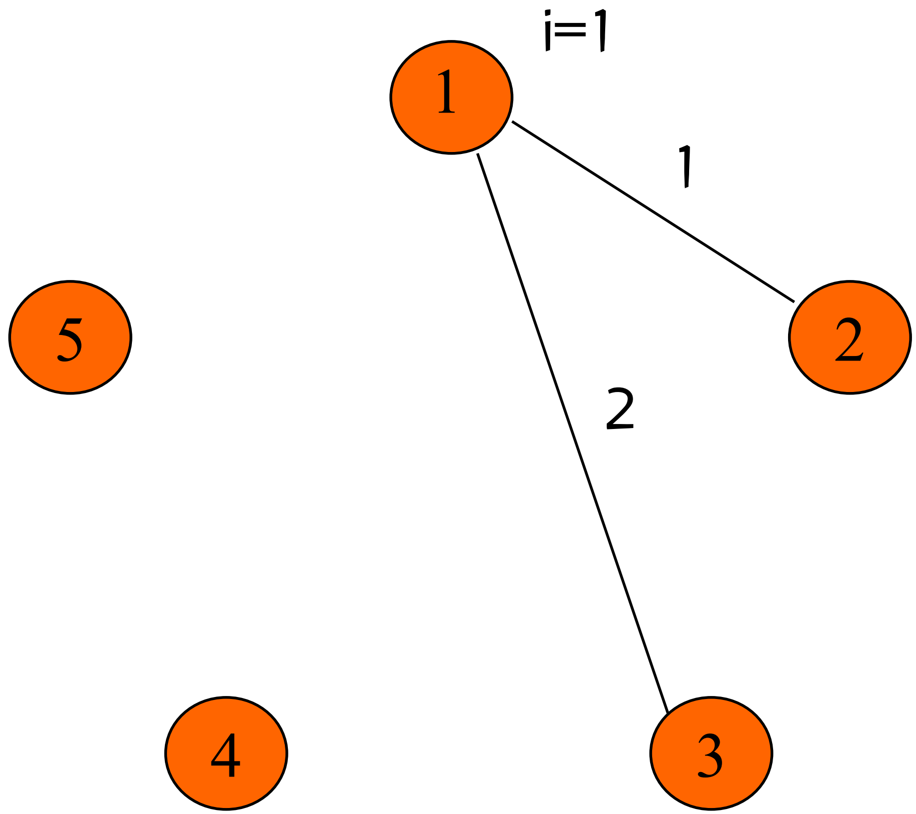
Problema do caixeiro viajante



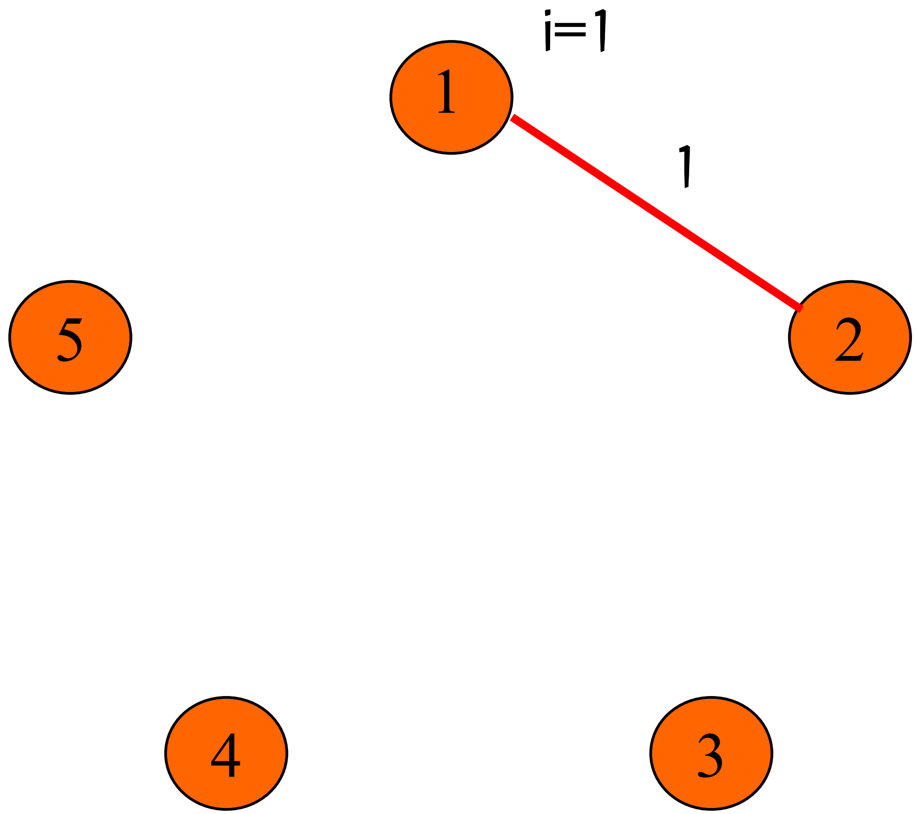
Problema do caixeiro viajante



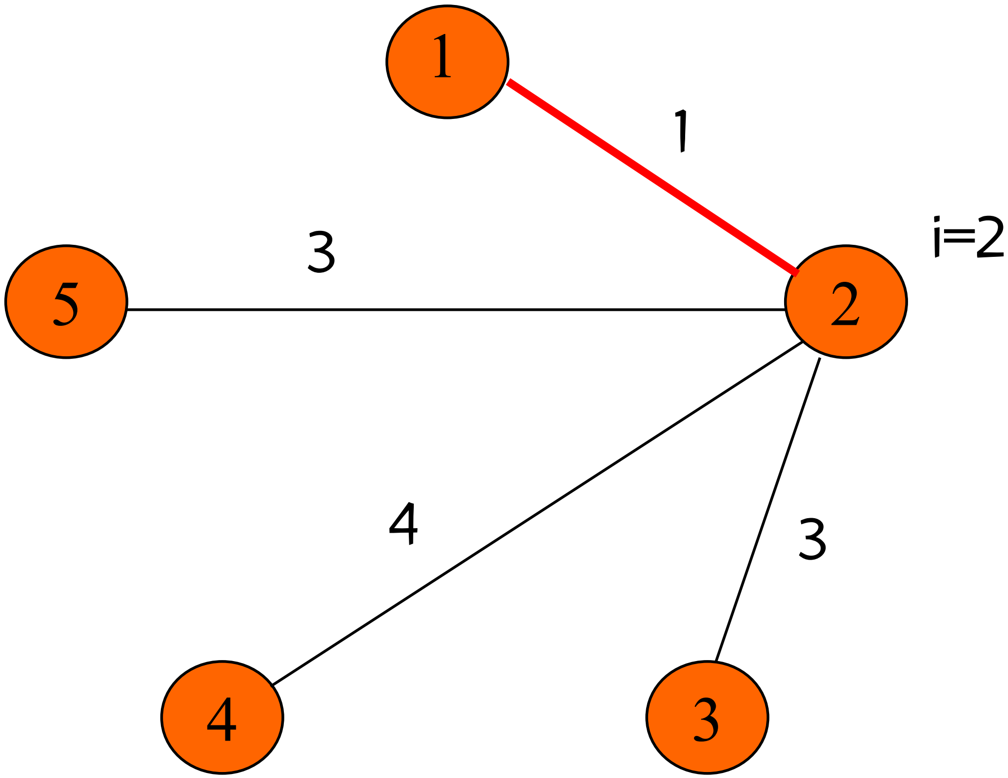
Problema do caixeiro viajante



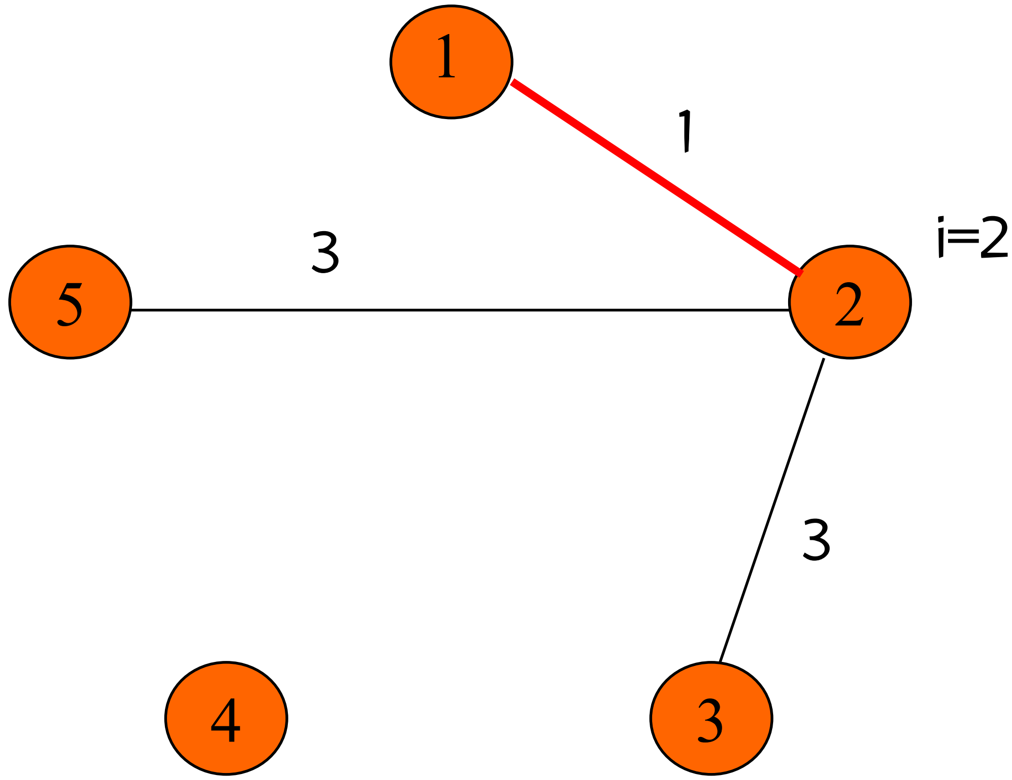
Problema do caixeiro viajante



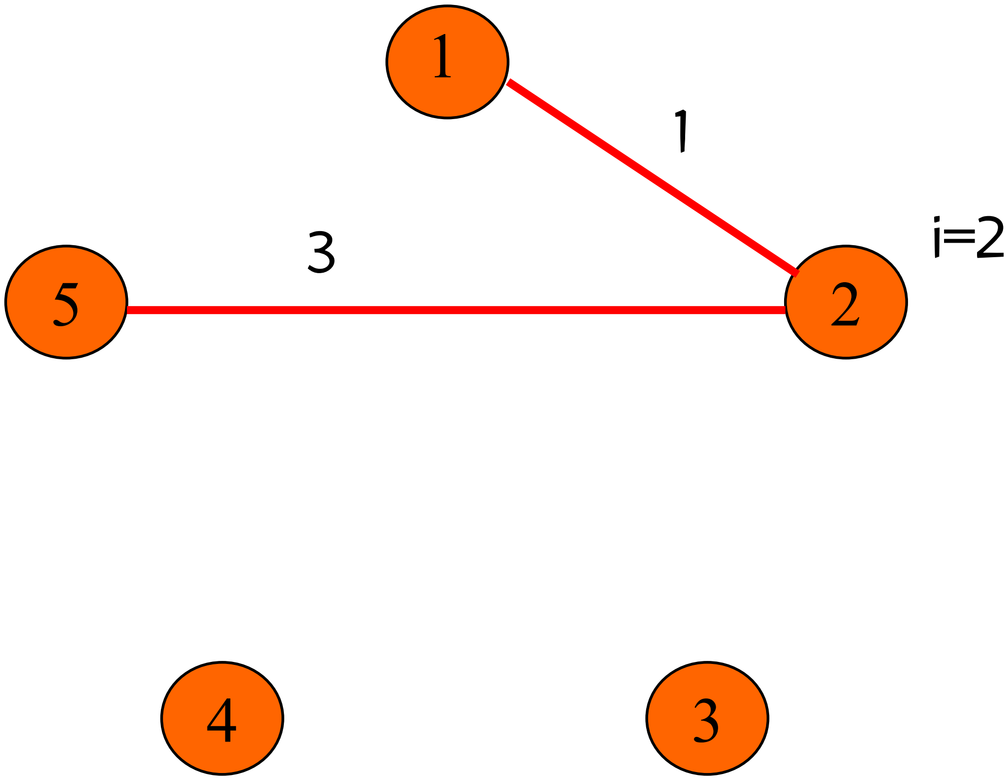
Problema do caixeiro viajante



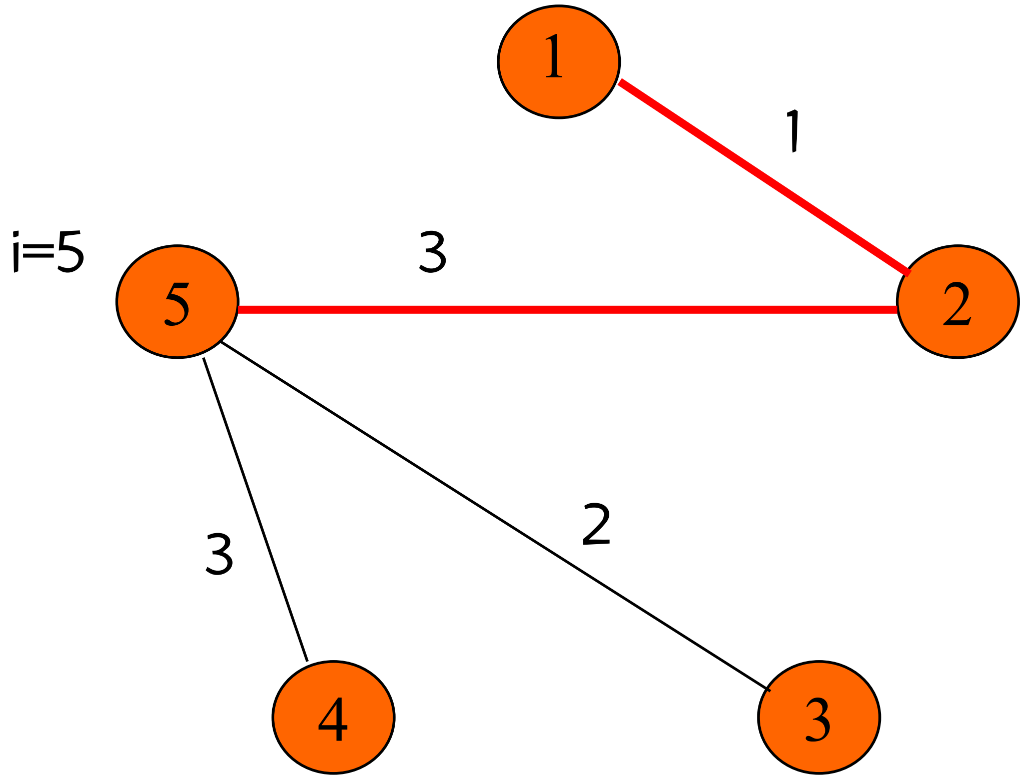
Problema do caixeiro viajante



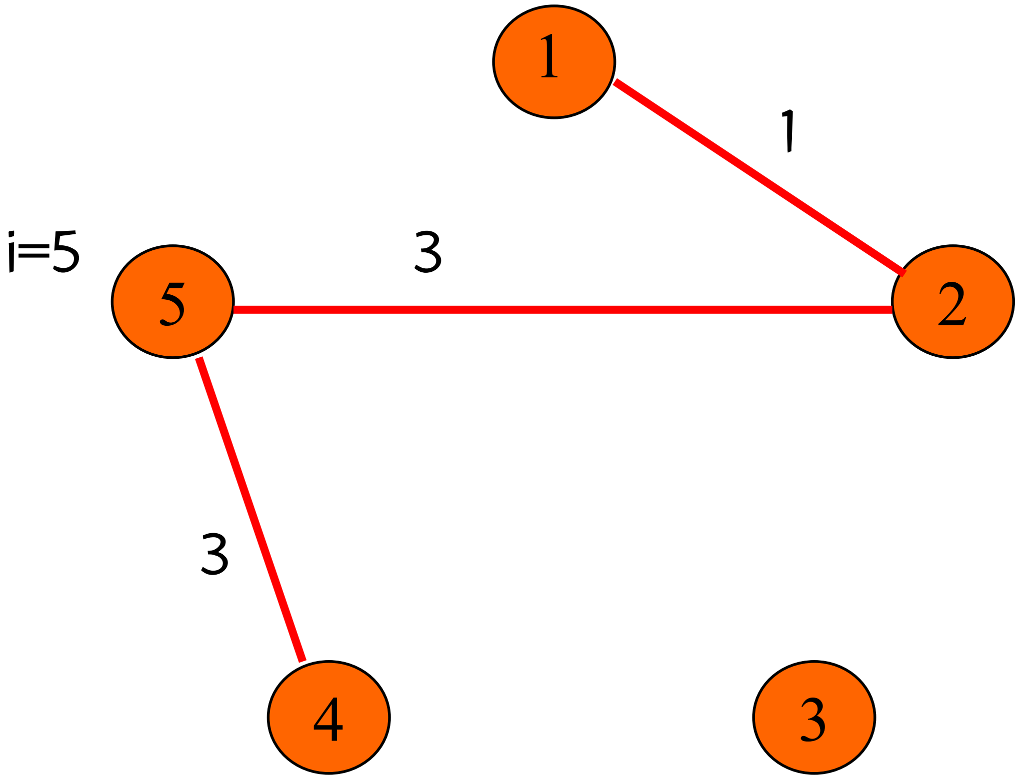
Problema do caixeiro viajante



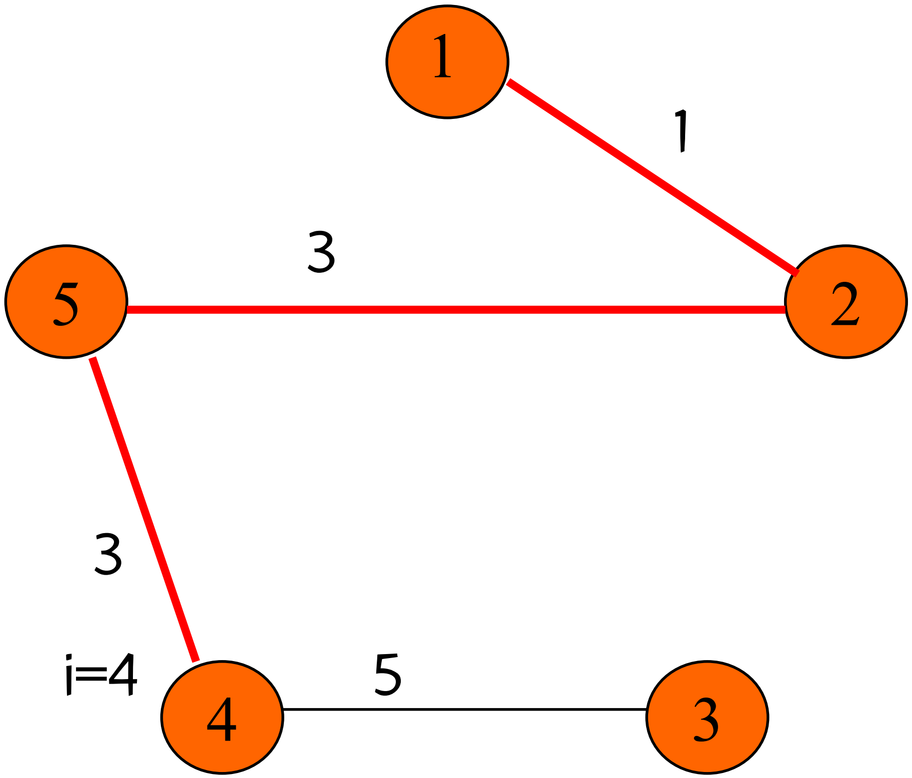
Problema do caixeiro viajante



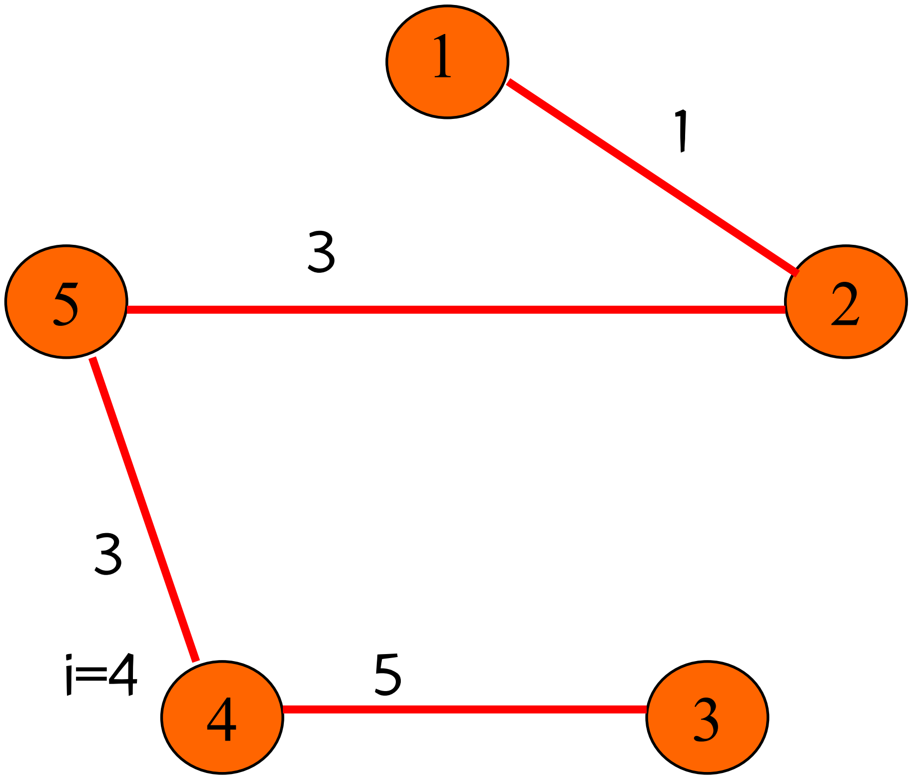
Problema do caixeiro viajante



Problema do caixeiro viajante

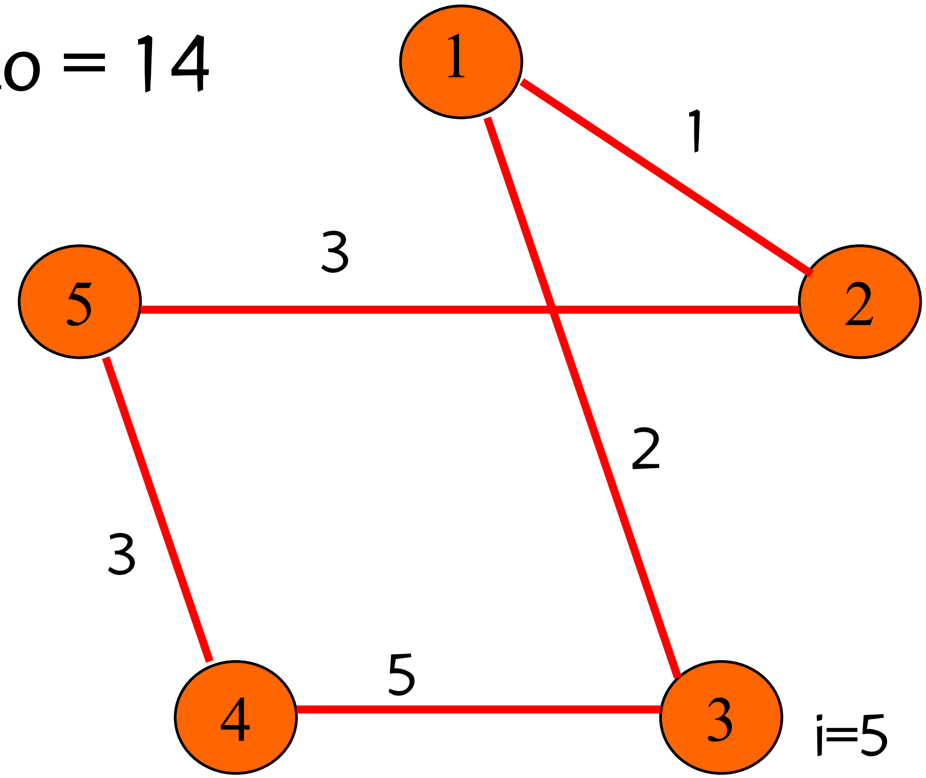


Problema do caixeiro viajante



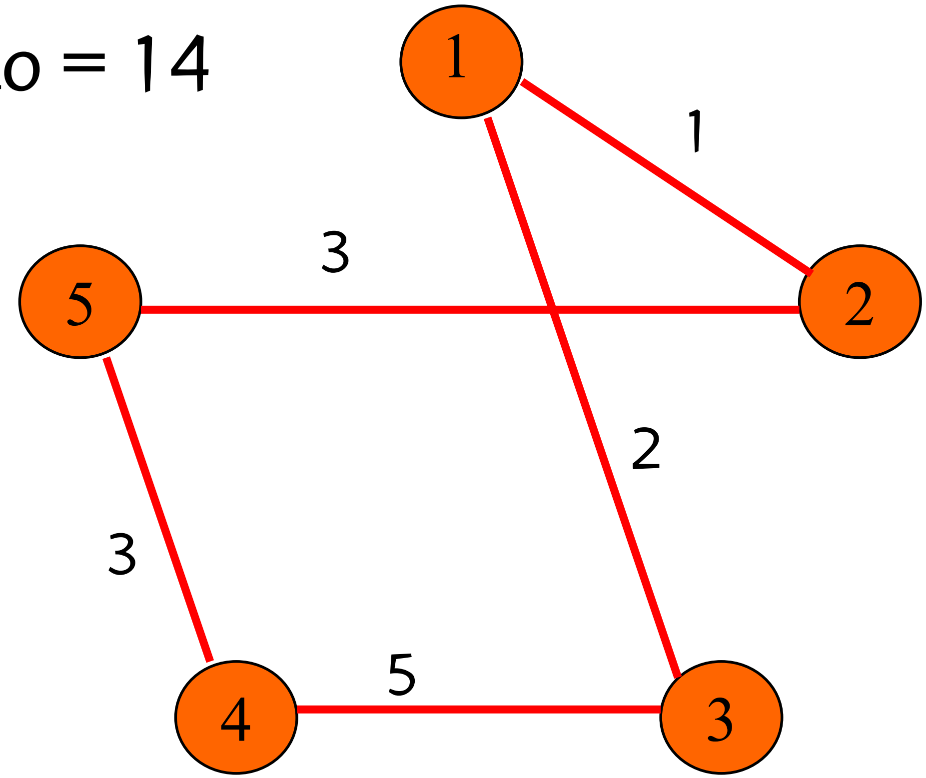
Problema do caixeiro viajante

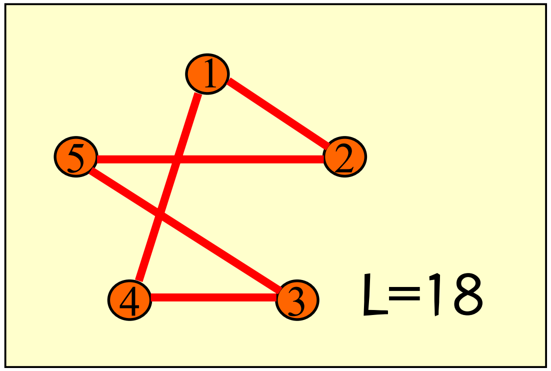
comprimento = 14



Problema do caixeiro viajante

comprimento = 14





Algoritmos gulosos randomizados

- A qualidade da solução obtida depende da qualidade dos elementos na lista de candidatos.
- A diversidade das soluções encontradas depende da cardinalidade da lista de candidatos.
- Casos extremos:
  - algoritmo guloso puro (o candidato único é o melhor)
  - solução gerada de forma completamente aleatória (todos os elementos pendentes são candidatos)

Algoritmos gulosos randomizados

- Quanto maior for o número de aplicações do algoritmo, maior a probabilidade de encontrar soluções melhores.
  - Melhores soluções, mas tempos de processamento maiores.
- Ajuste de parâmetros na implementação: equilibrar qualidade e diversidade

Busca local

- Técnica de exploração do espaço de soluções.
- Conjunto F de soluções (viáveis) formado por subconjuntos de um conjunto E (suporte/base) de elementos que satisfazem determinadas condições.
- Representação de uma solução: indicar quais elementos de E estão presentes e quais não estão.

Busca local

- <u>Exemplo</u>: problema da mochila

  n itens

  Solução é um vetor 0-1 com n posições.

  $x_j = 1$ se o item j é selecionado

  $x_j = 0$ caso contrário

  $n = 5$

  solução $x = (1,0,0,1,1)$: itens 1, 4 e 5 selecionados

Busca local

- <u>Exemplo</u>: problema do caixeiro viajante

  E: conjunto de arestas

  F: subconjuntos de E que formam um circuito hamiltoniano

  Solução é um vetor de $m = |E|$ posições.

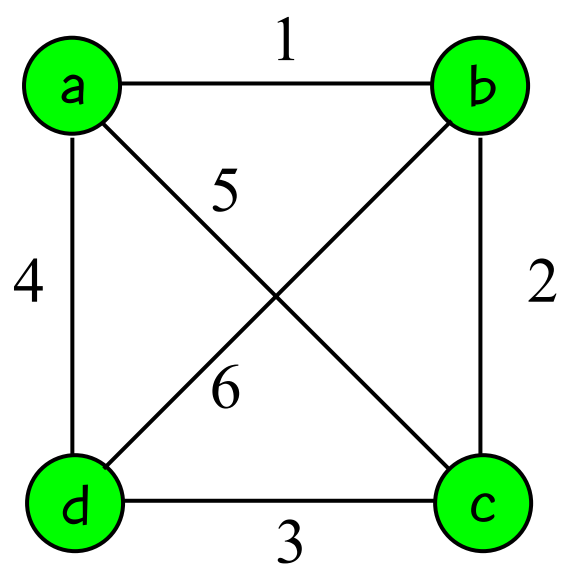
  $v_e = 1$, se a aresta e pertence ao circuito hamiltoniano

  $v_e = 0$, caso contrário.

Busca local

Soluções viáveis (64 vetores possíveis):

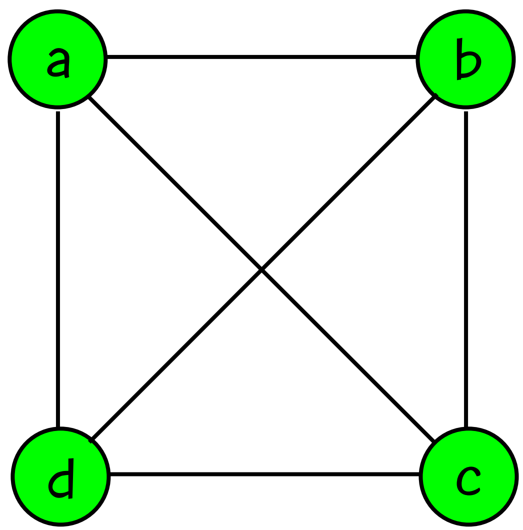
(1,1,1,1,0,0), (1,0,1,0,1,1), (0,1,0,1,1,1)



Busca local

Outra representação para as soluções do PCV: representar cada solução pela ordem em que os vértices são visitados, isto é, como uma permutação circular dos n vértices (já que o primeiro vértice é arbitrário)

(a)bcd
(a)bdc
(a)cbd
(a)cdb
(a)dbc
(a)dcb



Busca local

- Indicadores 0-1 de pertinência:
  - Problema da mochila
  - Problema de Steiner em grafos
  - Problemas de recobrimento e de particionamento, ...
- Indicadores gerais de pertinência:
  - Coloração de grafos
  - Localização, ...
- Permutações:
  - Problemas de escalonamento
  - Problema do caixeiro viajante, ...

Busca local

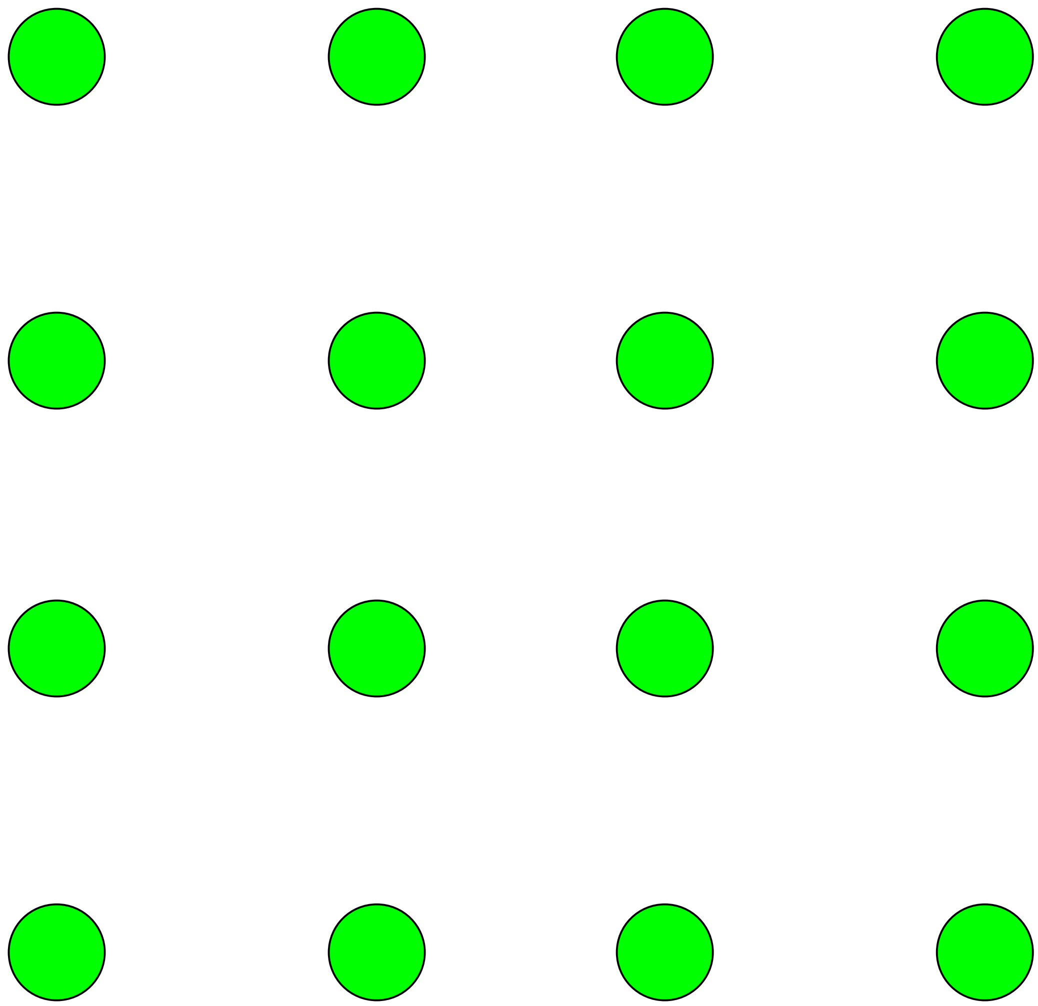
- Problema de otimização combinatória:
  $f(s^*) = \text{mínimo } \{f(s): s \in S\}$
  S é um conjunto discreto de soluções
- Vizinhança: elemento que introduz a noção de proximidade entre as soluções de S.
- Uma vizinhança é um mapeamento que associa cada solução s a um conjunto de soluções (vizinhos).

$N(s) = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$: soluções vizinhas de s

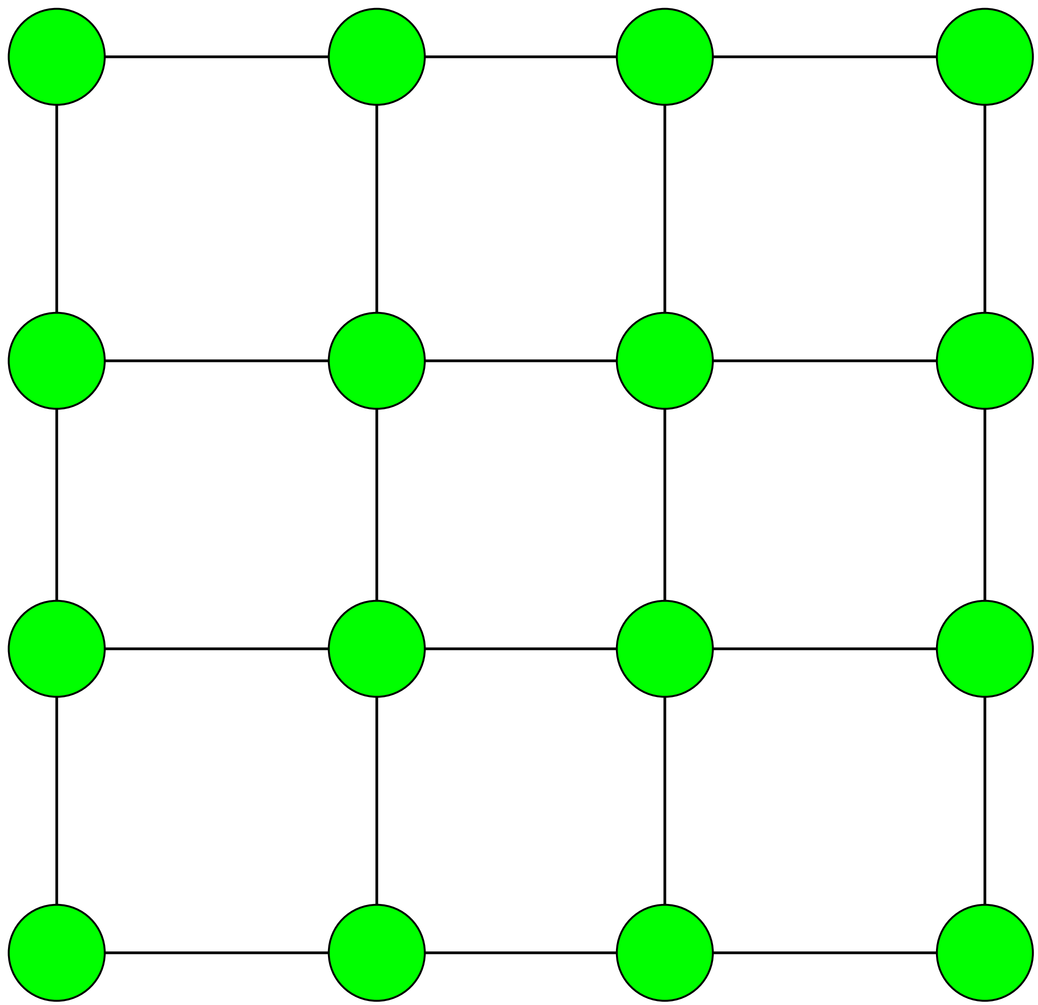
Busca local

- Boas vizinhanças permitem representar de forma compacta o conjunto de soluções vizinhas de uma solução s qualquer e percorrer (visitar, explorar) de maneira eficiente o conjunto de soluções.

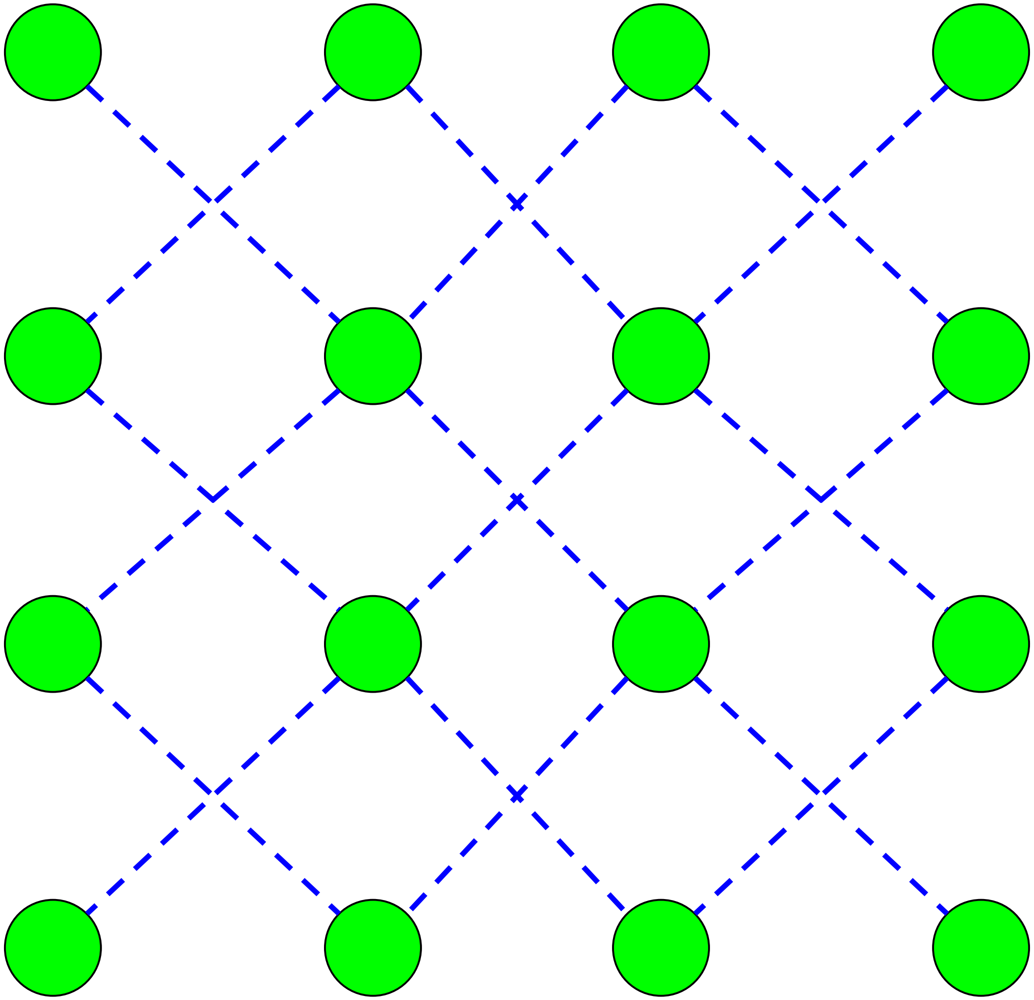
Busca local



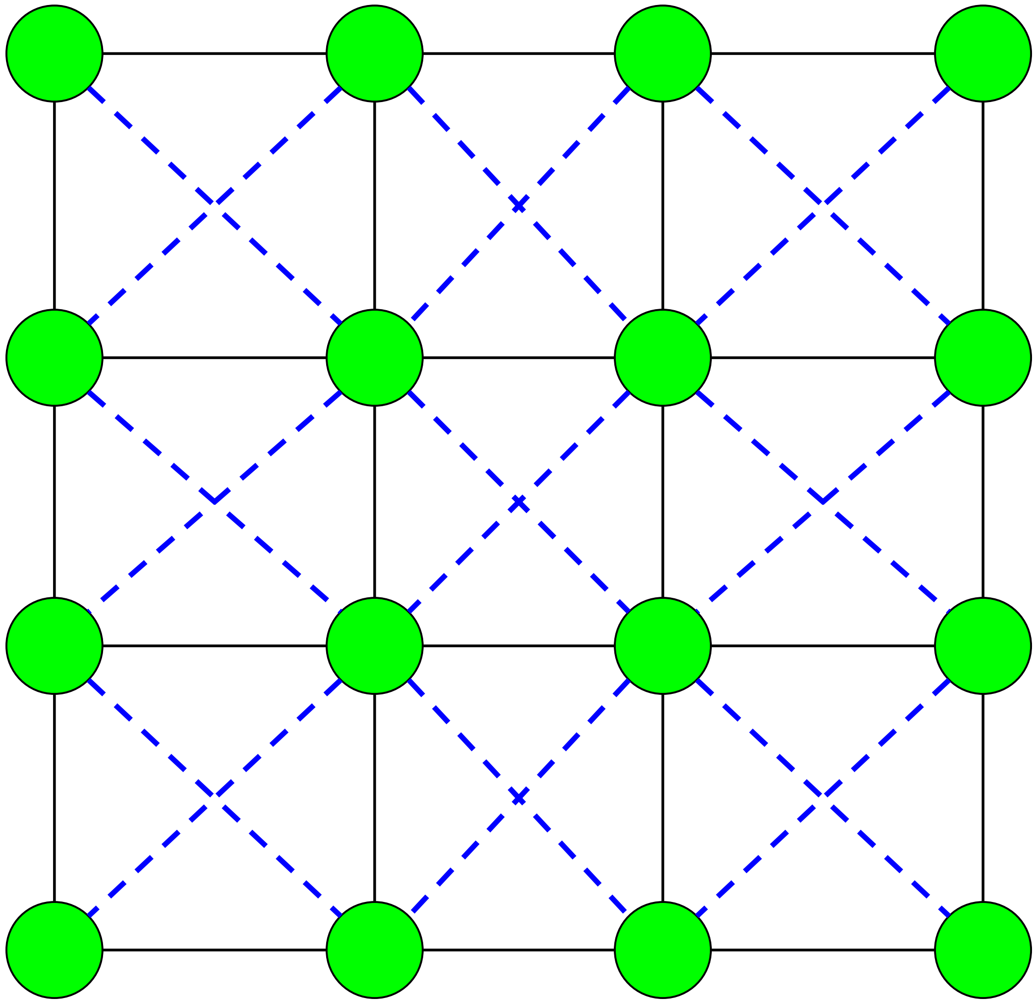
Busca local



Busca local



Busca local



Busca local

- Espaço de busca: definido pelo conjunto de soluções S e por uma vizinhança N
- Representação por um grafo:
  - Nós $\rightarrow$ soluções
  - Arestas $\rightarrow$ soluções vizinhas

Busca local

- Exemplo: problema da mochila
  vetor de pertinência 0-1

  Solução $s = (s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_n)$ $s_i \in \{0,1\}$, $i=1,\ldots,n$

  $N(s)=\{(s_1,\ldots,1-s_i,\ldots,s_n): i=1,..,n\}$

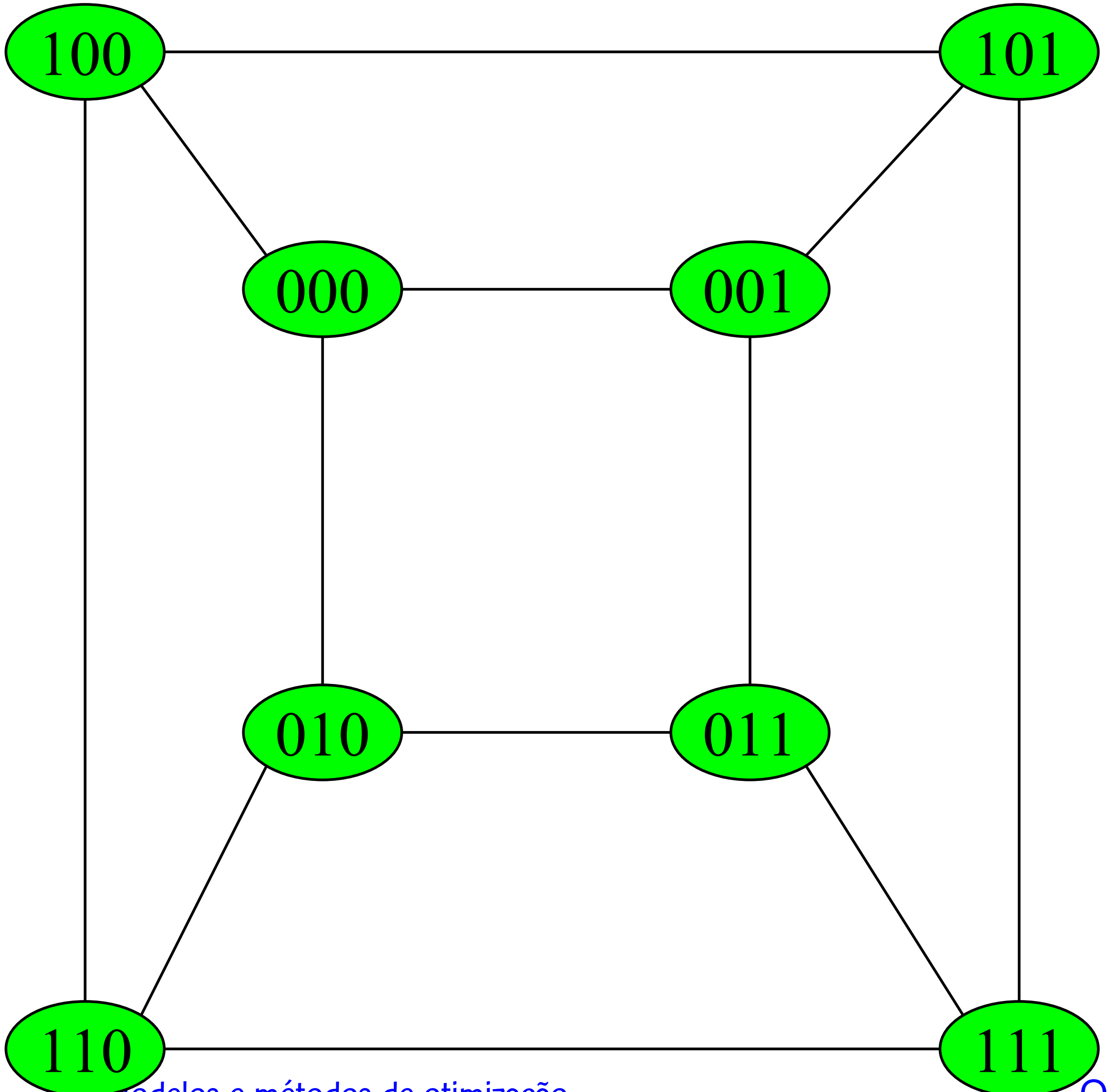
  Vizinhos de $(1,0,1,1)=$

  $\{(\underline{0},0,1,1),(1,\underline{1},1,1),(1,0,\underline{0},1),(1,0,1,\underline{0})\}$

Busca local

n=3

$s=(s_1,s_2,s_3)$



Busca local

- Exemplo: problema do caixeiro viajante (permutações)

  Solução $\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_{i-1},\pi_i,\pi_{i+1},\ldots,\pi_j,\ldots,\pi_n)$

- $N_1(\pi)=\{(\pi_1,\ldots,\pi_{i+1},\pi_i,\ldots,\pi_n): i=1,\ldots, n-1\}$

  Troca da posição de duas cidades consecutivas:

  vizinhos de (1,2,3,4) = {(2,1,3,4),(1,3,2,4),(1,2,4,3)}

$$\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_{i-1},\pi_i,\pi_{i+1},\ldots,\pi_n)$$

$$\pi'=(\pi_1,\ldots,\pi_{i-1},\pi_{i+1},\pi_I,\ldots,\pi_n)$$

Busca local

- <u>Exemplo</u>: problema do caixeiro viajante (permutações)

  Solução $\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_{i-1},\pi_i,\pi_{i+1},\ldots,\pi_j,\ldots,\pi_n)$

- $N_2(\pi)=\{(\pi_1,\ldots,\pi_j,\ldots,\pi_i,\ldots,\pi_n): i=1,\ldots,n-1; j=i+1,\ldots,n\}$

  Troca da posição de duas cidades quaisquer:

  vizinhos de (1,2,3,4)= {(2,1,3,4),(1,3,2,4),
  (1,2,4,3),(3,2,1,4),(1,4,3,2),(4,2,3,1)}

$$\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_i,\ldots,\pi_j,\ldots,\pi_n)$$

$$\pi'=(\pi_1,\ldots,\pi_j,\ldots,\pi_i,\ldots,\pi_n)$$

Busca local

- <u>Exemplo</u>: problema do caixeiro viajante (permutações)

  Solução $\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_{i-1},\pi_i,\pi_{i+1},\ldots,\pi_j,\ldots,\pi_n)$

- $N_3(\pi)=\{(\pi_1,\ldots, \pi_{i-1},\pi_{i+1},\ldots,\pi_j,\pi_i,\ldots,\pi_n): i=1,\ldots,n-1; j=i+1,\ldots,n\}$

  Inserção de uma cidade em uma posição qualquer:

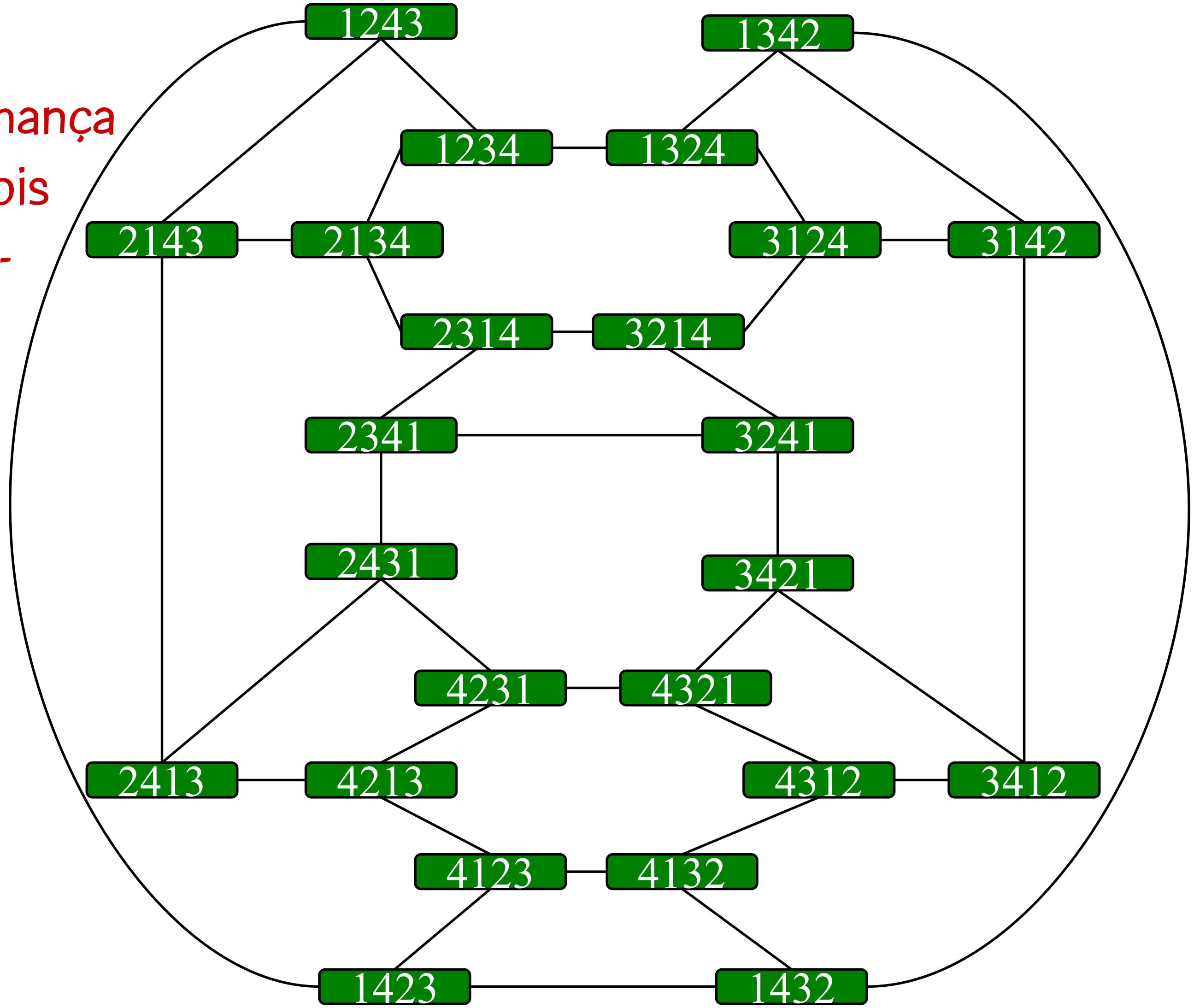
  vizinhos de (1,2,3,4)= {(2,1,3,4),(2,3,1,4),(2,3,4,1),(1,3,2,4),(1,3,4,2),(1,2,4,3)}

$$\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_{i-1},\pi_i,\pi_{i+1},\ldots,\pi_j,\pi_{j+1},\ldots,\pi_n)$$

$$\pi'=(\pi_1,\ldots,\pi_{i-1},\pi_{i+1},\ldots,\pi_j,\pi_i,\pi_{j+1},\ldots,\pi_n)$$

Busca local

Exemplo: vizinhança de troca N_1 (dois elementos consecutivos)



Busca local

- O espaço de busca pode ser visto como um grafo cujos vértices são as soluções e no qual existem arestas entre pares de vértices associados a soluções vizinhas.
- Este espaço pode ser visto como uma superfície com vales e cumes definidos pelo valor e pela proximidade (vizinhança) das soluções.
- Um caminho no espaço de busca consiste numa seqüência de soluções, onde duas soluções consecutivas quaisquer são vizinhas.

Busca local

- Ótimo local: solução tão boa ou melhor do que qualquer solução vizinha
- Problema de minimização:

  s^+ é um ótimo local

  $$\Updownarrow$$

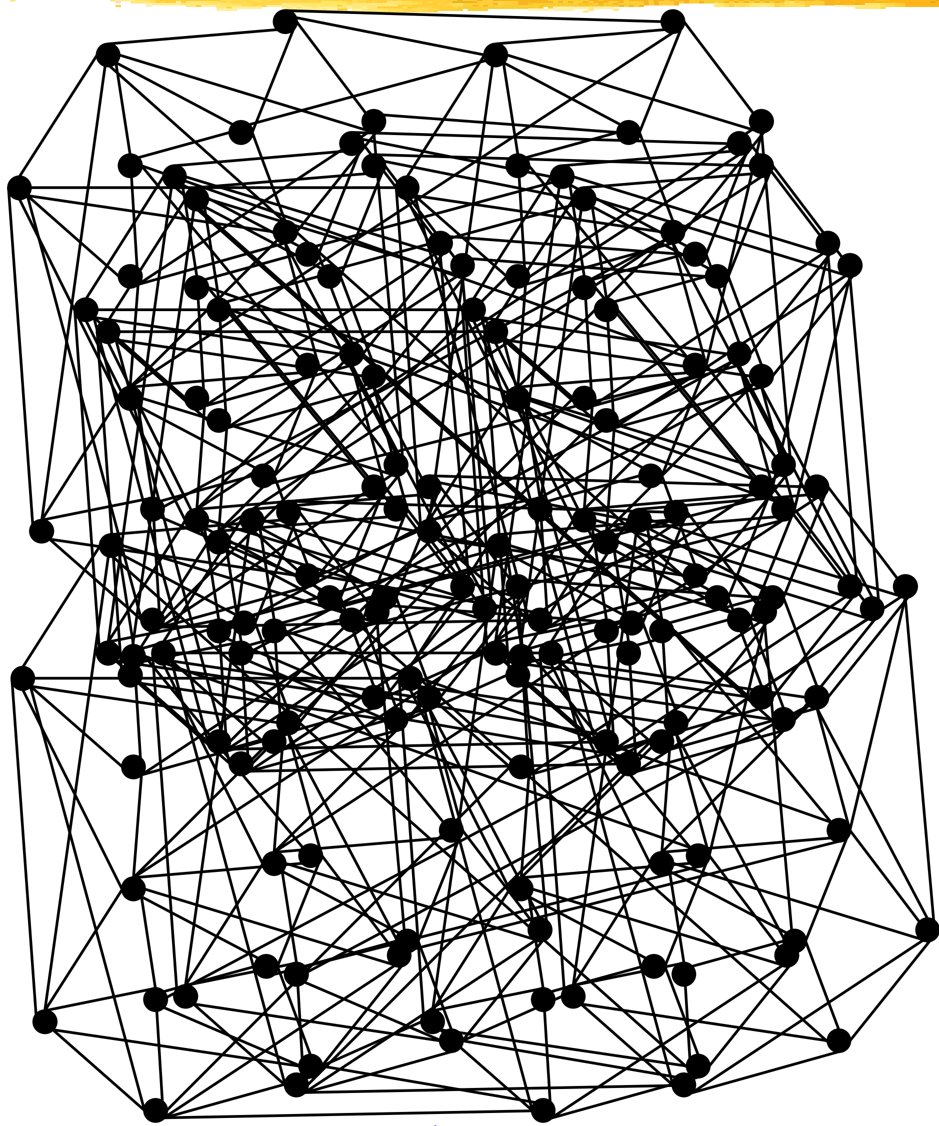
  $$f(s^+) \leq f(s), \forall s \in N(s^+)$$
- Ótimo global ou solução ótima s^*:

  $$f(s^*) \leq f(s), \forall s \in S$$

Busca local

- Algoritmos de busca local são construídos como uma estratégia de exploração do espaço de busca.
- Partida: solução inicial obtida através de um método construtivo
- Iteração: melhoria sucessiva da solução corrente através de uma busca na sua vizinhança
- Parada: primeiro ótimo local encontrado (não existe solução vizinha aprimorante)
- Heurística subordinada utilizada para obter uma solução aprimorante na vizinhança

Busca local



Busca local

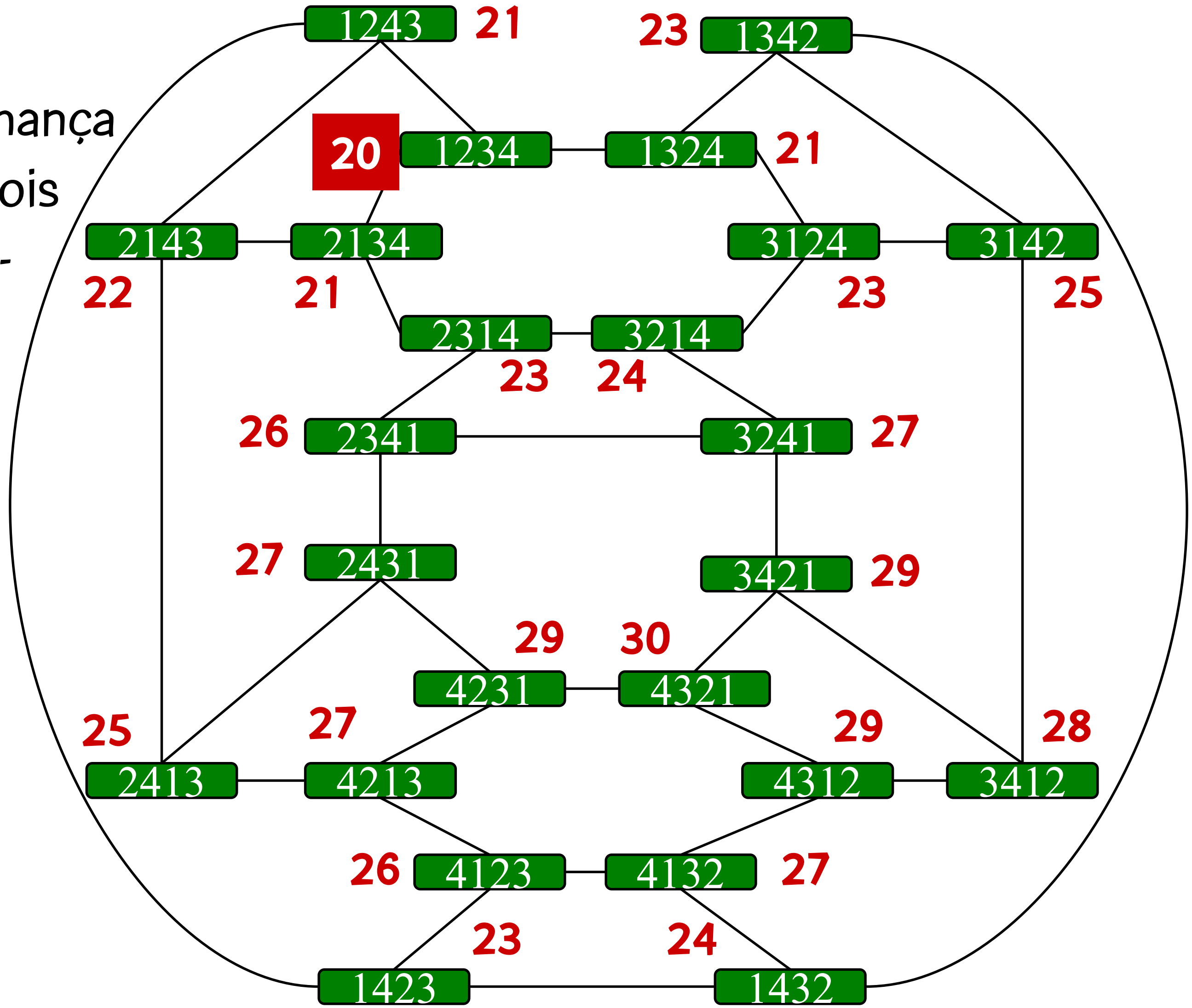
- Questões fundamentais:
  - Solução inicial
  - Definição da vizinhança
  - Estratégia de busca na vizinhança:
    - Melhoria iterativa: a cada iteração, selecionar qualquer (eventualmente a primeira) solução aprimorante na vizinhança
    - Descida mais rápida: a cada iteração, selecionar a melhor solução aprimorante na vizinhança

Busca local

- Questões fundamentais:
  - Complexidade de cada iteração:
    - Proporcional ao tamanho da vizinhança
    - Eficiência depende da forma como é calculada a função objetivo para cada solução vizinha: algoritmos eficientes são capazes de atualizar os valores quando a solução corrente se modifica, evitando cálculos repetitivos e desnecessários da função objetivo.

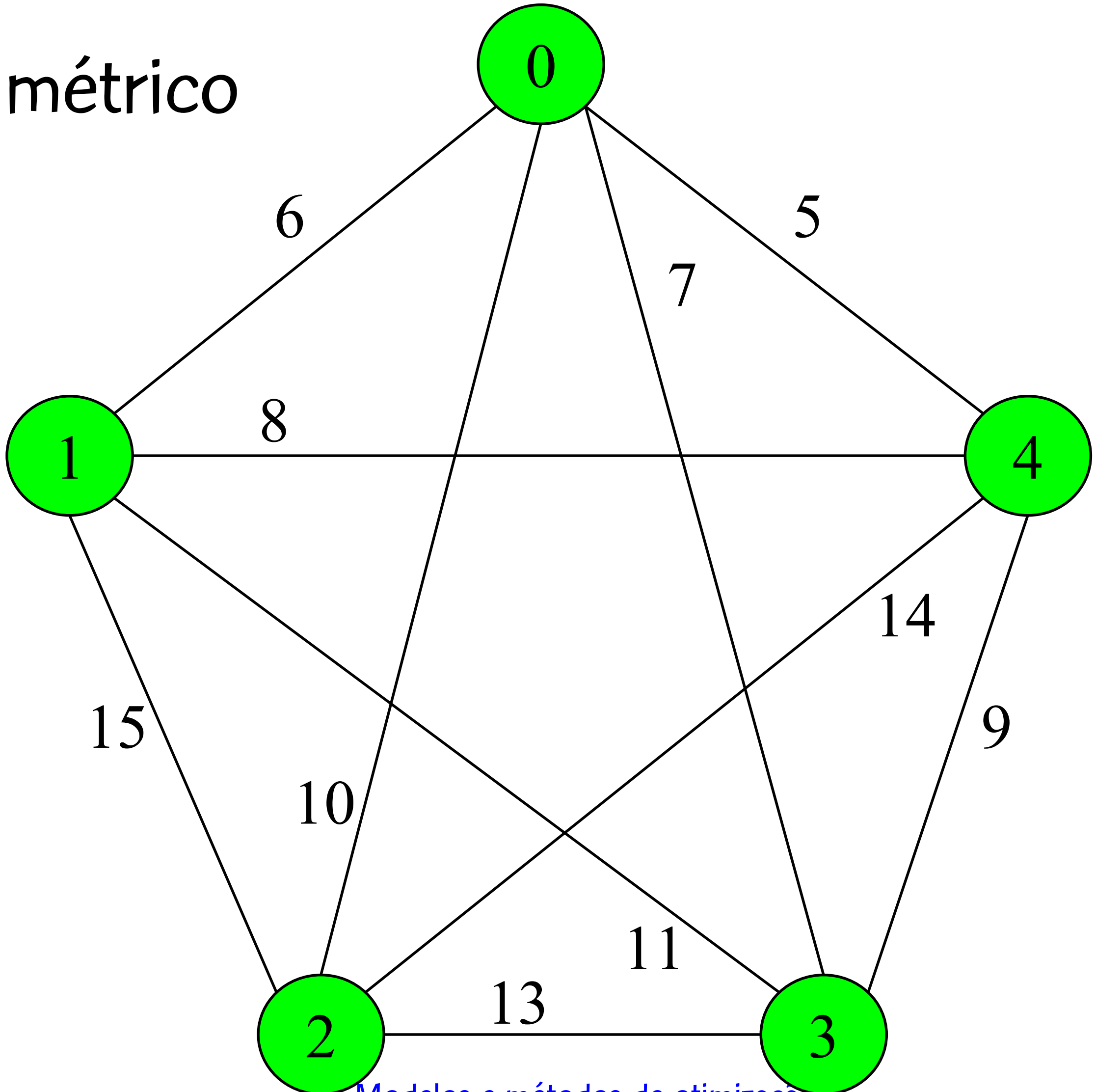
Busca local

Exemplo: vizinhança de troca N1 (dois elementos consecutivos)



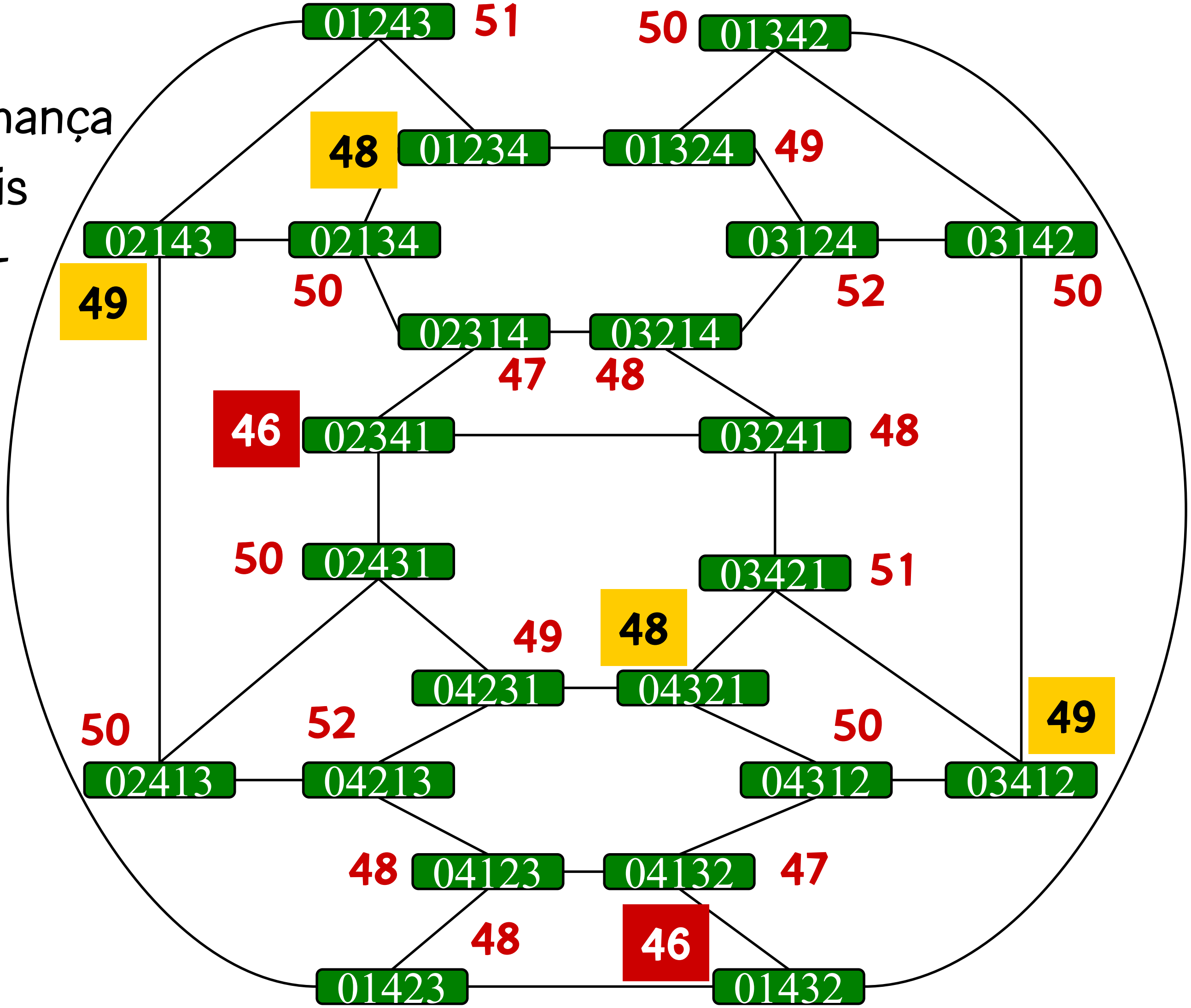
Problema do caixeiro viajante

Problema simétrico



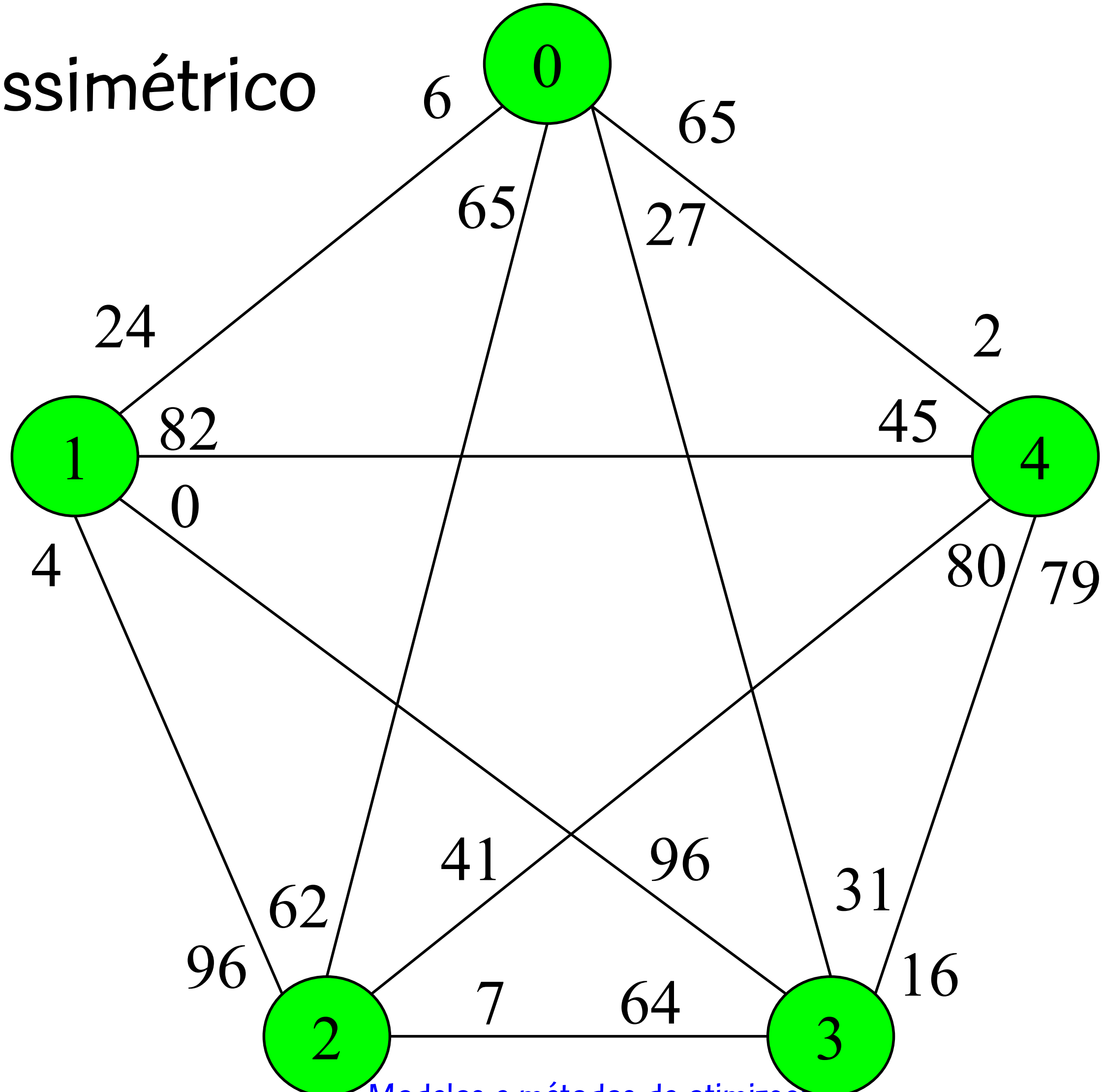
Problema do caixeiro viajante

<u>Exemplo</u>: vizinhança de troca de dois elementos con- secutivos



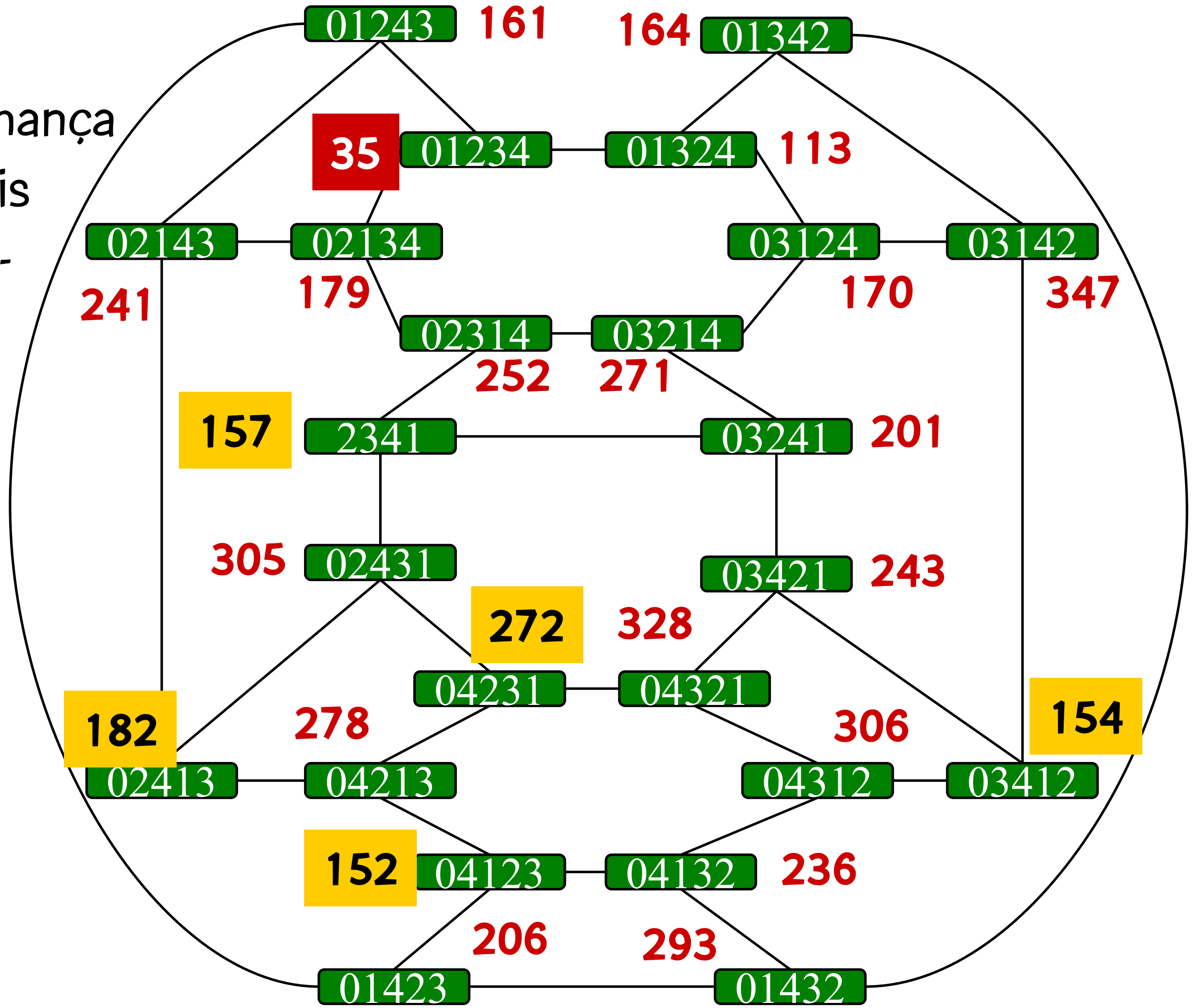
Problema do caixeiro viajante

Problema assimétrico



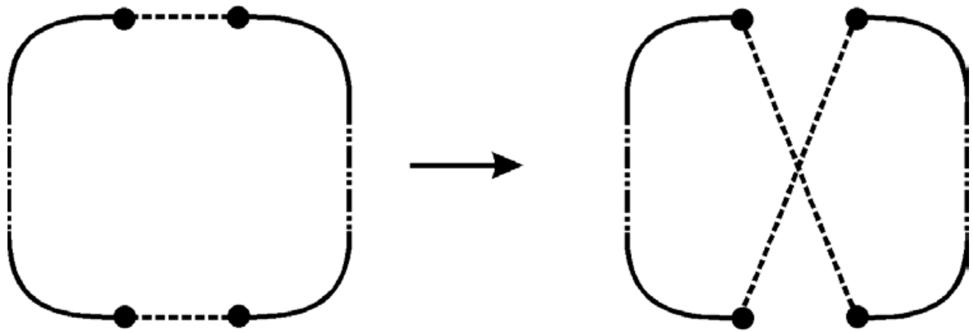
Problema do caixeiro viajante

Exemplo: vizinhança de troca de dois elementos consecutivos



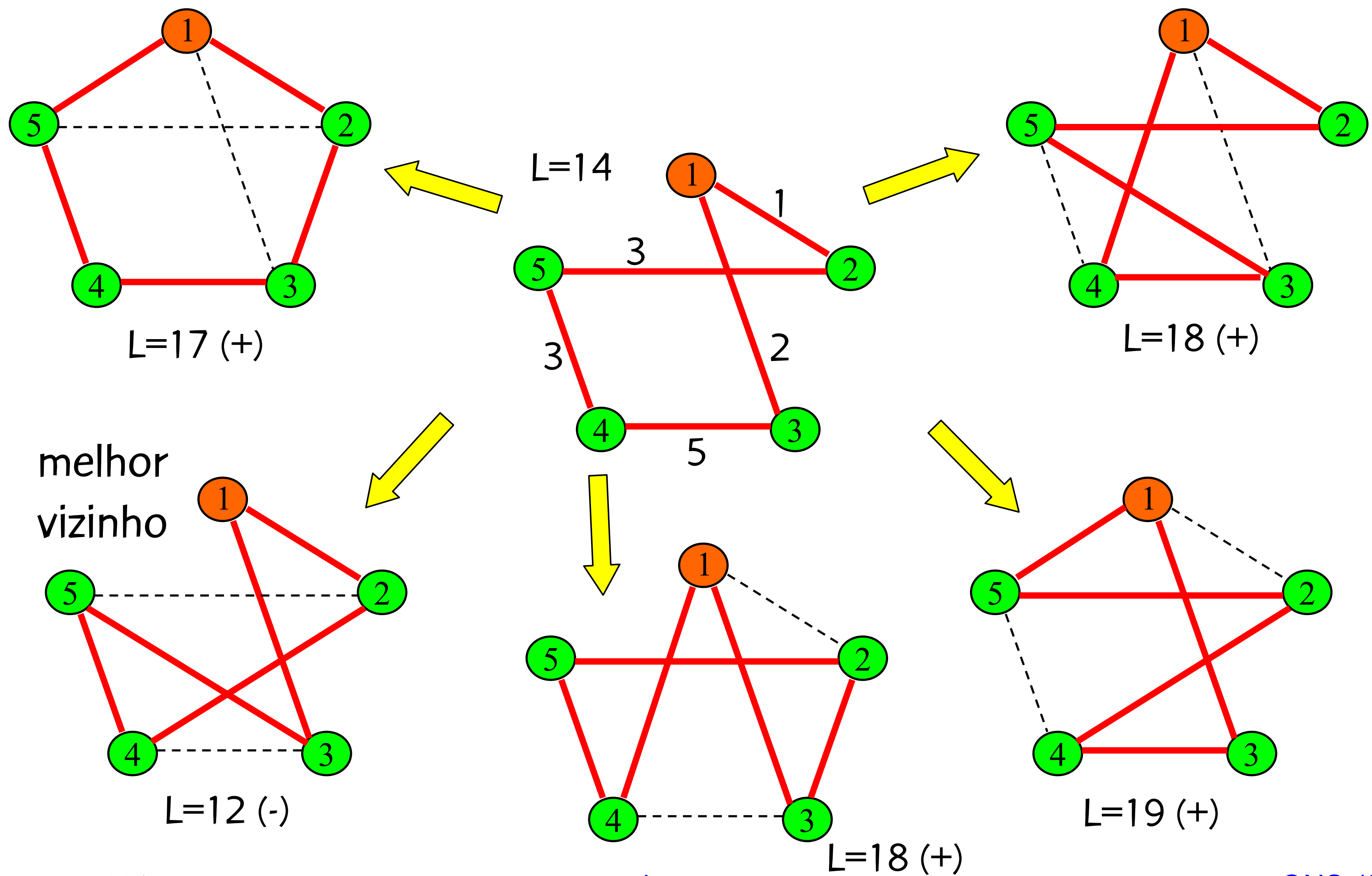
Problema do caixeiro viajante

- Vizinhança 2-opt para o problema do caixeiro viajante:



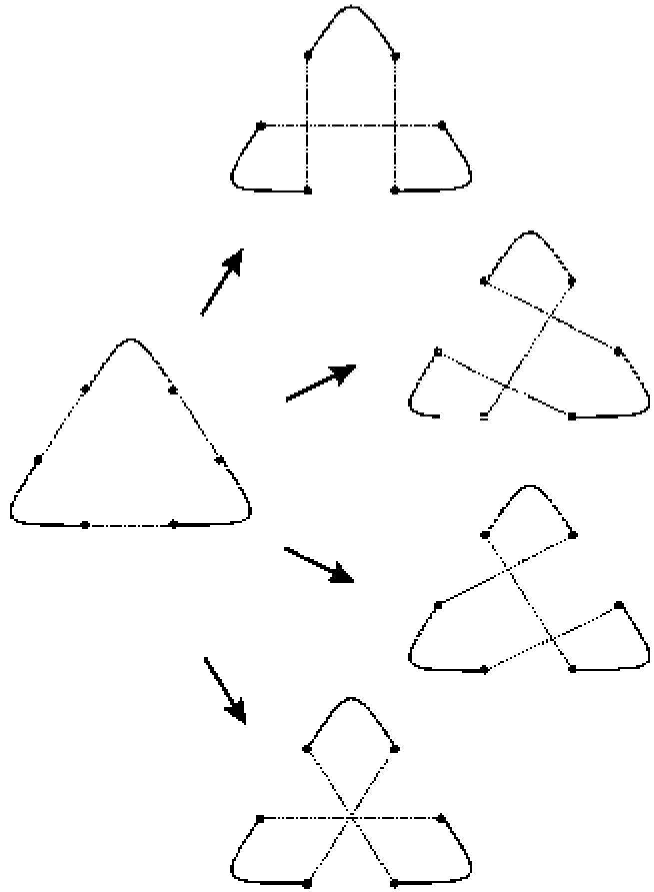
- Escolher duas arestas quaisquer, eliminá-las e substituí-las por outro par (único) de arestas de modo a formar novo circuito.
- Há da ordem de n^2 soluções vizinhas.
- O custo de cada solução vizinha pode ser facilmente recalculado.

Problema do caixeiro viajante



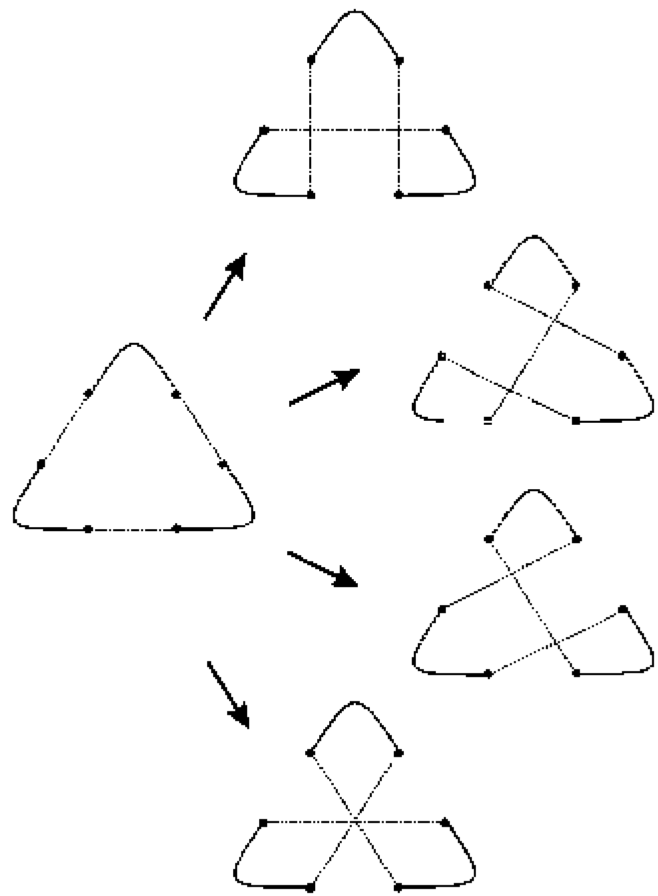
Problema do caixeiro viajante

- Vizinhança 3-opt para o problema do caixeiro viajante:
- Escolher três arestas quaisquer, eliminá-las e substituí-las por três outras arestas, de modo a formar novo circuito.
- Há da ordem de n^3 soluções vizinhas.
- O custo de cada solução vizinha continua podendo ser facilmente recalculado.



Problema do caixeiro viajante

- Vizinhança k-opt para o problema do caixeiro viajante:
- Extensão até n-opt corresponderia a uma busca exaustiva do espaço de soluções!
- A complexidade (tempo) de cada iteração aumenta com k, enquanto o ganho possível diminui.



Busca local

- Diferentes aspectos do espaço de busca influenciam o desempenho da busca local:
  - Conexidade: deve existir um caminho no espaço de busca entre qualquer par de soluções
  - Distância: número de soluções visitadas ao longo do caminho mais curto entre duas soluções
  - Diâmetro: distância entre as duas soluções mais afastadas (diâmetros reduzidos)

Busca local

- Dificuldades e problemas do método de busca local:
  - Término no primeiro ótimo local encontrado
  - Sensível à solução de partida
  - Sensível à vizinhança escolhida
  - Sensível à estratégia de busca
  - Pode exigir um número exponencial de iterações!
- Como melhorar seu desempenho?

Busca local

- Extensões e melhorias:
  - Multipartida: iniciar a busca a partir de diferentes soluções iniciais.
  - Redução da vizinhança: explorar parcialmente a vizinhança (aleatorização, soluções mais promissoras, etc.).
  - Multivizinhanças: explorar novas vizinhanças, por exemplo após atingir um ótimo local segundo uma delas.
  - ...
  - Metaheurísticas: estratégias para escapar de ótimos locais

Metaheurísticas

- Metaheurísticas:
  - *Simulated annealing*
  - Busca tabu
  - GRASP
  - VNS *(Variable Neighborhood Search)*
  - Algoritmos genéticos
  - *Scatter search*
  - Colônias de formigas
- Freqüentemente inspiradas em paradigmas da natureza (processos físicos e biológicos)

Metaheurísticas

- Diferentes estratégias para percorrer o espaço de busca e para escapar de ótimos locais
- Quase todas utilizam-se de diferentes maneiras dos mesmos componentes básicos comuns:
  - construções gulosas
  - randomização
  - busca local
  - multiplicidade de vizinhanças
  - memória
  - intensificação
  - diversificação, etc.

GRASP

- GRASP: Greedy Randomized Adaptive Search Procedures
- Princípio: combinação de um algoritmo construtivo (randomizado) com busca local, em um procedimento iterativo com iterações independentes

  (a) construção de uma solução

  (b) busca local

  (c) atualização da melhor solução

GRASP

- Algoritmo básico (minimização):

$f(s^*) \leftarrow +\infty$

Para i = 1,...,MaxIterações faça:

Construir uma solução s usando um algoritmo guloso randomizado

Aplicar um procedimento de busca local a partir de s, obtendo a solução s'

Se $f(s') < f(s^*)$, então fazer $s^* \leftarrow s'$

Fim-enquanto

GRASP

- Fase de construção: aplicar um algoritmo guloso randomizado
- Cada iteração da fase de construção:
  - Avaliar o benefício de cada elemento fora da solução, usando uma função gulosa.
  - Criar uma lista de candidatos formada pelos melhores elementos.
  - Selecionar aleatoriamente um elemento da lista de candidatos

GRASP

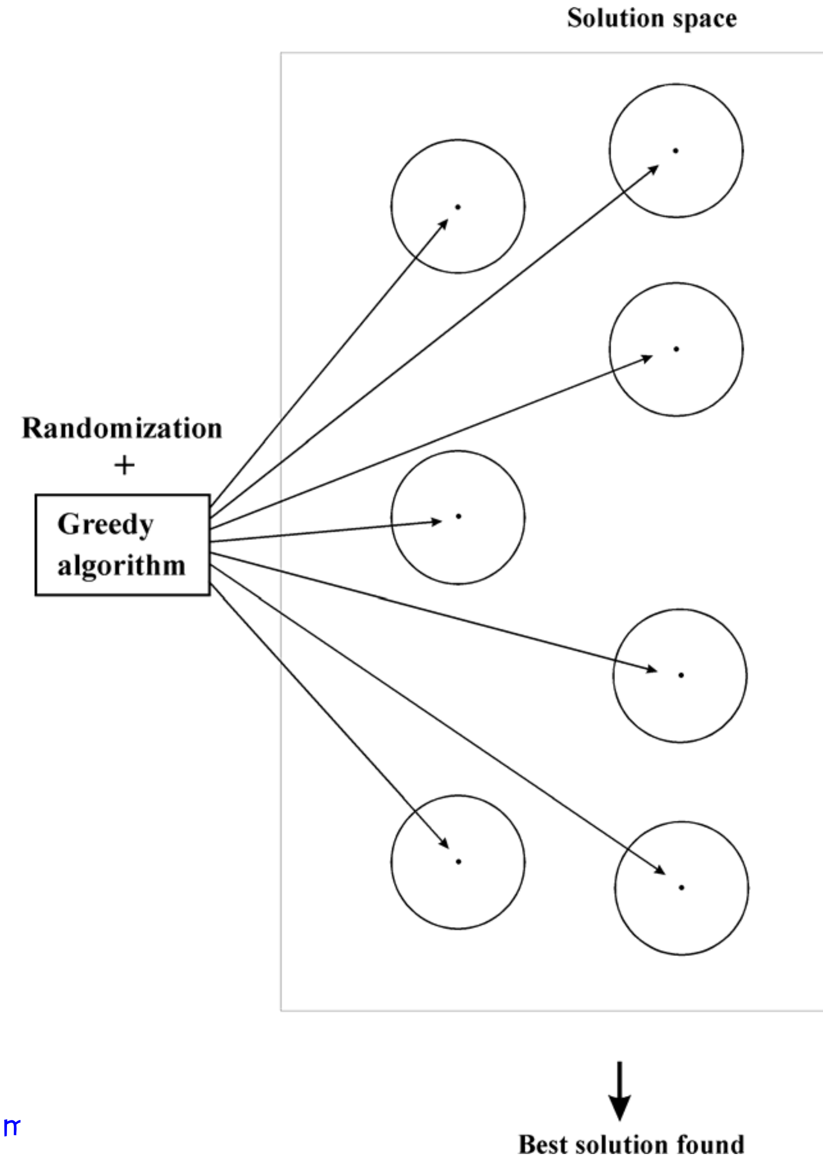
- Restrição dos elementos na lista de candidatos baseada:
  - ... no número máximo de elementos na lista
  - ... na qualidade dos elementos na lista (em relação à escolha puramente gulosa)
- Seleção aleatória feita entre os melhores elementos da lista de candidatos (não necessariamente o melhor, como no caso guloso):
  - A qualidade média das soluções encontradas depende da qualidade dos elementos na lista.
  - A diversidade das soluções construídas depende do número de elementos na lista.

GRASP

- Diversificação baseada em randomização controlada: diferentes soluções construídas em diferentes iterações GRASP
- Fase de busca local: melhorar as soluções construídas
- A utilização de um algoritmo guloso randomizado na fase de construção permite acelerar muito cada aplicação da busca local (soluções próximas de um ótimo local).
- É comprovadamente mais rápido e encontra soluções melhores do que um método multi-partida simples.

GRASP

- Pode ser visto como uma técnica de amostragem no espaço de busca:



GRASP

- Implementação simples: algoritmo guloso e busca local
- Heurísticas gulosas são simples de projetar e implementar.
- Poucos parâmetros a serem ajustados:
  - restritividade da lista de candidatos
  - número de iterações
- Depende de boas soluções iniciais: baseado apenas na randomização de uma iteração para outra, cada iteração se beneficia da qualidade de sua solução inicial.

GRASP

- Problema: falta de "memória"
  - Em uma determinada iteração, não são utilizadas informações sobre as soluções construídas e visitadas nas iterações precedentes.
  - Esta dificuldade pode ser superada por implementações mais avançadas, que incorporam memória:
    - GRASP reativo: controle automático do nível apropriado de randomização durante a fase de construção
    - Reconexão por caminhos: explorar trajetórias entre a solução atual e boas soluções construídas nas iterações precedentes

GRASP

- Extensões e melhorias:
  - Uso de filtros: aplicar busca local apenas...
  - ... à melhor solução construída ao longo de uma seqüência de aplicações do algoritmo guloso randomizado (já que a busca local é a componente mais cara em termos de tempo de processamento).
  - ... às soluções construídas que satisfazem um determinado limiar de aceitação (soluções potencialmente boas).
- Processamento paralelo: a estrutura do algoritmo é altamente favorável a implementações paralelas eficientes com acelerações lineares em clusters.

Exercício – Avaliação

- Implementar três (ou mais) heurísticas para o problema do caixeiro viajante e compará-las em termos da qualidade das soluções encontradas e dos tempos de processamento.
- Algumas idéias:
  - Usar instâncias conhecidas publicadas na literatura.
  - Implementar as diferentes heurísticas usando a mesma linguagem e compilador.
  - Testar todas as heurísticas na mesma máquina.
  - Usar gráficos.
  - Comparar os métodos entre si e com as soluções ótimas.

Exercício – Avaliação

- Descrição de instâncias e soluções ótimas para o problema do caixeiro viajante:

http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/

- Estudo comparativo de heurísticas para o problema do caixeiro viajante:

http://www.research.att.com/~dsj/chtsp/

- Em particular, página com gráficos comparativos:

http://www.research.att.com/~dsj/chtsp/testform2.html

- Referência: Lawler, Lenstra, Rinnooy Kan e Shmoys (eds.), "The traveling salesman problem", 1985 (entre outras)