



INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Professor: Dr. Edwin B. Mitacc Meza

emitacc@ic.uff.br
www.ic.uff.br/~emitacc



Ementa

Noções Básicas sobre Erros

Zeros Reais de Funções Reais

Resolução de Sistemas Lineares

Introdução à Resolução de Sistemas Não-Lineares

Interpolação

Ajuste de funções

Integração Numérica



Introdução

- Para utilizar eficazmente qualquer ferramenta de solução precisamos conhecer e entender o problema.
- Os computadores tem uma grande utilidade para resolver problemas de engenharia, porém são praticamente ineficientes se não compreendemos o funcionamento dos sistemas de engenharia.



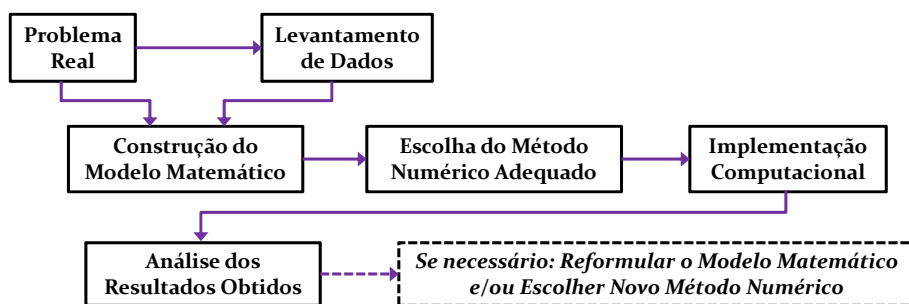
A resolução dos diversos problemas, que surgem nas mais diversas áreas, envolve várias fases.

Introdução aos Métodos Numéricos

3

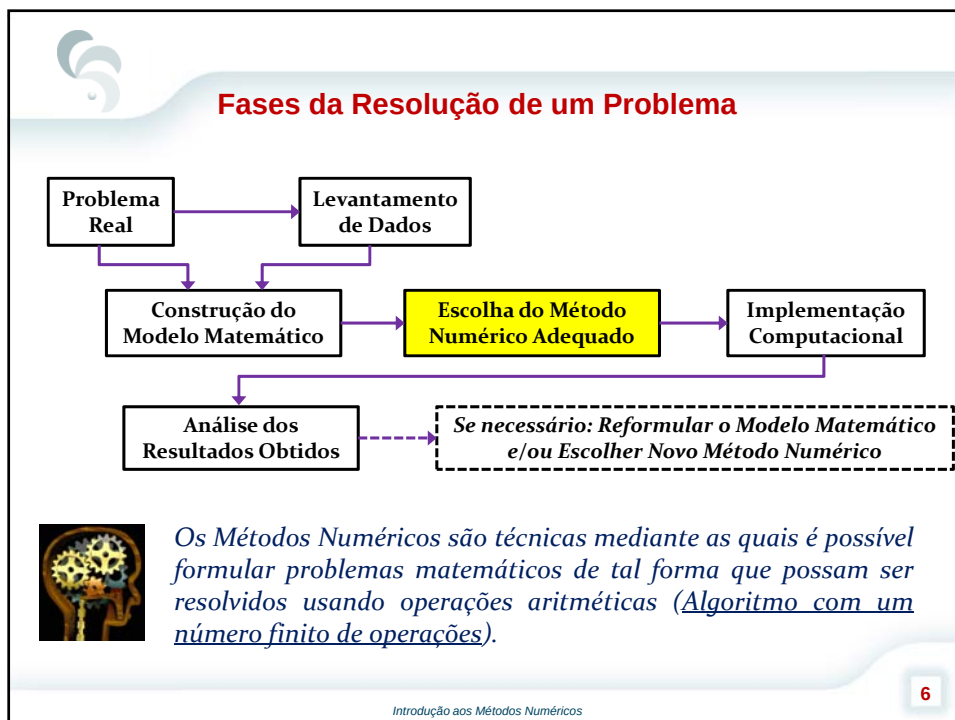
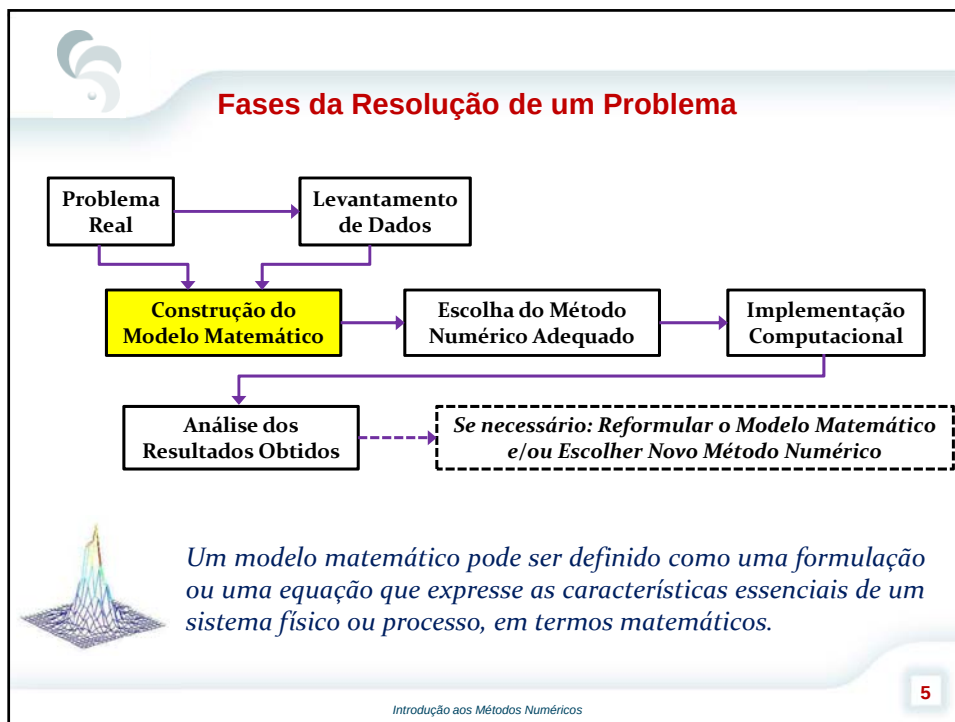


Fases da Resolução de um Problema



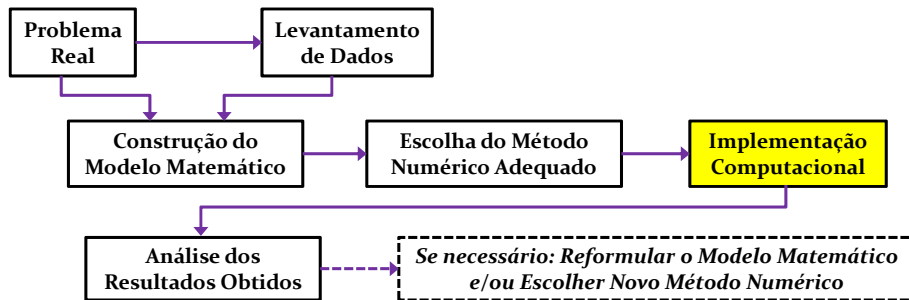
Introdução aos Métodos Numéricos

4





Fases da Resolução de um Problema



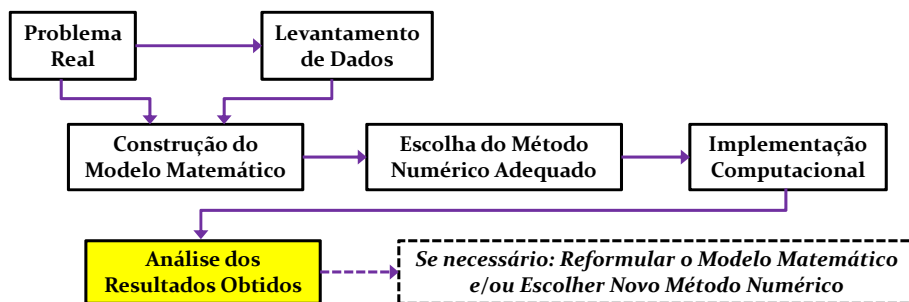
Como necessitamos realizar um número grande de cálculos aritméticos, devemos usar o computador para obter um solução em um tempo razoável.

Introdução aos Métodos Numéricos

7



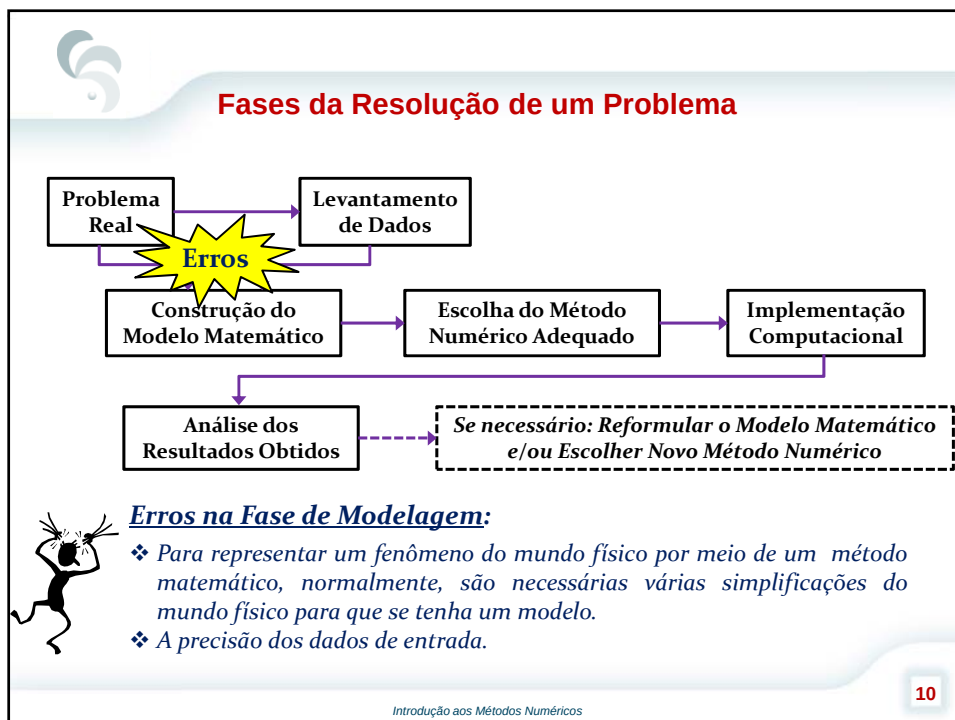
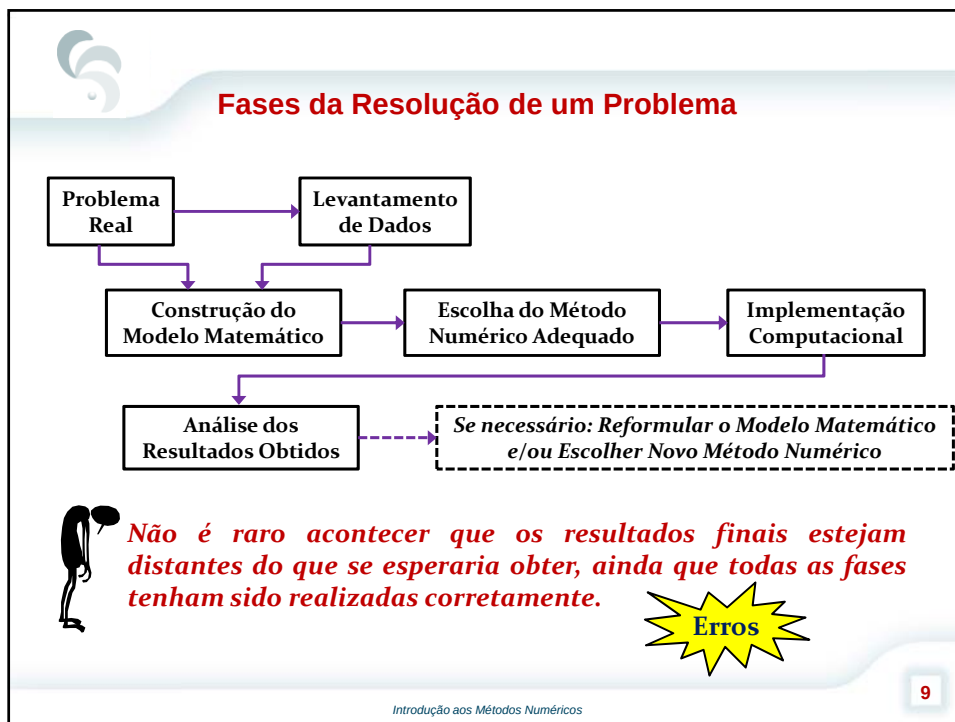
Fases da Resolução de um Problema

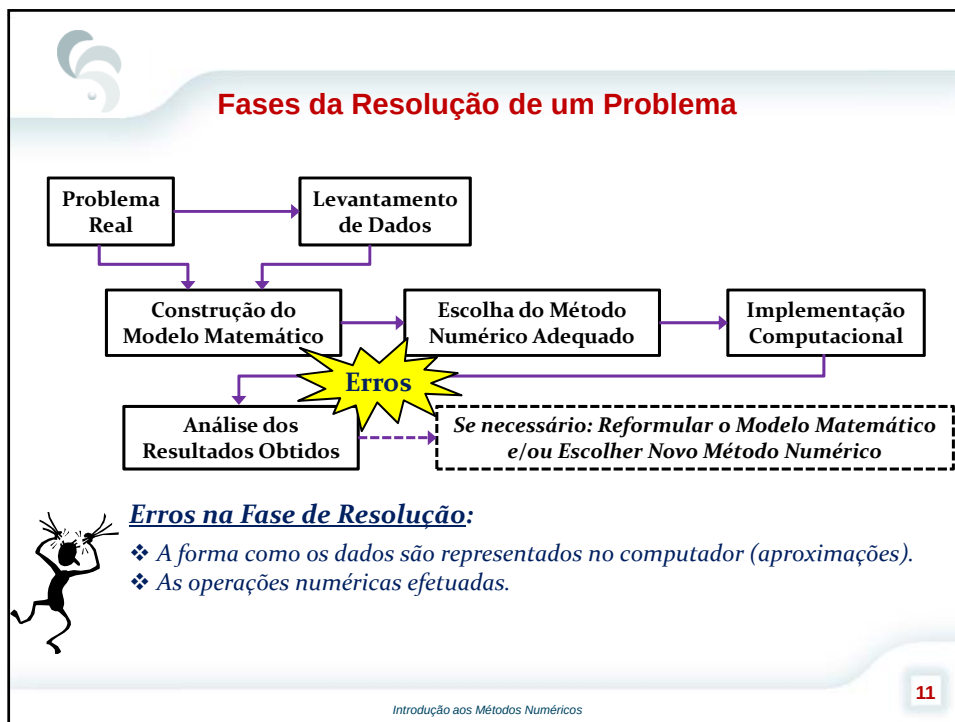


A análise dos resultados tem como objetivo verificar se os resultados observados correspondem aos esperados, com base em critérios e padrões estipulados.

Introdução aos Métodos Numéricos

8





Estudaremos os erros que surgem da representação de números em um computador e os erros resultantes das operações numéricas efetuadas

12

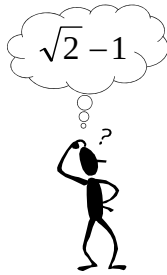
Introdução aos Métodos Numéricos



Representação Numérica



➤ A fim se realizarmos de maneira prática qualquer operação com números, nós precisamos representá-los em uma determinada base numérica.



✓ Precisamos escrever o número $\sqrt{2}$ de alguma outra forma, caso contrário não é possível realizar essa operação.

✓ Na base decimal:

$$\sqrt{2} = 1,41 \quad \sqrt{2} = 1,4142 \quad \sqrt{2} = 1,4142213562$$

Algarismos Significativos !!!

$$\sqrt{2} - 1 = 0,41$$

$$\sqrt{2} - 1 = 0,4142$$

$$\sqrt{2} - 1 = 0,4142213562$$

Depende da representação



13

Introdução aos Métodos Numéricos



Representação Numérica

Sistema Decimal



Sistema Binário



Dados
(Sistema Decimal)



Dados
(Sistema Binário)

Operações

Resultados
(Sistema Decimal)

Em uma base um número pode ter uma representação finita e em outra uma representação infinita (arredondamentos e truncamentos ocorrem!!!!!!!!!!)

14

Introdução aos Métodos Numéricos



Sistema Decimal e Binário

➤ Conversão de Números Inteiros:

Em geral, um número na base β , $(a_j a_{j-1} \dots a_2 a_1 a_0)_\beta$ com $0 \leq a_k \leq (\beta-1)$ e $k=1, \dots, j$ pode ser escrito na forma polinomial

$$a_j \beta^j + a_{j-1} \beta^{j-1} + \dots + a_2 \beta^2 + a_1 \beta^1 + a_0 \beta^0$$

- Ex 1:

$$\begin{aligned}(347)_{10} &= a_2 \beta^2 + a_1 \beta^1 + a_0 \beta^0 \\ &= 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0\end{aligned}$$

- Ex 2:

$$\begin{aligned}(10111)_2 &= a_4 \beta^4 + a_3 \beta^3 + a_2 \beta^2 + a_1 \beta^1 + a_0 \beta^0 \\ &= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0\end{aligned}$$

Introdução aos Métodos Numéricos

15



Processo para converter um número inteiro do sistema binário para o sistema decimal

- ✓ A conversão de um número no sistema binário para o sistema decimal é obtida colocando o número 2 em evidência:

$$\begin{aligned}(10111)_2 &= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 2 \times (1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0) + 1 \\ &= 2 \times (2 \times (1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0) + 1) + 1 \\ &= 2 \times (2 \times (2 \times (1 \times 2^1 + 0 \times 2^0) + 1) + 1) + 1 \\ &= 2 \times (2 \times (2 \times (2 \times (1) + 0) + 1) + 1) + 1 = 2b_1 + a_0\end{aligned}$$

Introdução aos Métodos Numéricos

16



Processo para converter um número inteiro do sistema binário para o sistema decimal

- ✓ A representação do número $(a_j a_{j-1} \dots a_2 a_1 a_0)_2$ na base 10, denotada por b_0 é obtida pelo seguinte processo:

$$b_j = a_j$$

$$b_{j-1} = a_{j-1} + 2b_j$$

$$b_{j-2} = a_{j-2} + 2b_{j-1}$$

$$\vdots$$

$$b_1 = a_1 + 2b_2$$

$$b_0 = a_0 + 2b_1$$

Introdução aos Métodos Numéricos

17



Processo para converter um número inteiro do sistema binário para o sistema decimal

Exemplo: $(10111)_2$

$$b_j = a_j$$

$$b_{j-1} = a_{j-1} + 2b_j$$

$$b_{j-2} = a_{j-2} + 2b_{j-1}$$

$$\vdots$$

$$b_1 = a_1 + 2b_2$$

$$b_0 = a_0 + 2b_1$$

$$b_4 = a_4 = 1$$

$$b_3 = a_3 + 2b_4 = 0 + 2 \times 1 = 2$$

$$b_2 = a_2 + 2b_3 = 1 + 2 \times 2 = 5$$

$$b_1 = a_1 + 2b_2 = 1 + 2 \times 5 = 11$$

$$b_0 = a_0 + 2b_1 = 1 + 2 \times 11 = 23$$

Introdução aos Métodos Numéricos

18



Processo para converter um número inteiro do sistema decimal para o sistema binário

- ✓ Considere o número $(347)_{10}$ e $(a_j a_{j-1} \dots a_2 a_1 a_0)_2$ a sua representação na base 2. Pelo processo inverso:

$$N_0 = 347 = 2 \times 173 + 1 = 2 \times N_0 + a_0 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$N_1 = 173 = 2 \times 86 + 1 = 2 \times N_1 + a_1 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$N_2 = 86 = 2 \times 43 + 0 = 2 \times N_2 + a_2 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$N_3 = 43 = 2 \times 21 + 1 = 2 \times N_3 + a_3 \Rightarrow a_3 = 1$$

$$N_4 = 21 = 2 \times 10 + 1 = 2 \times N_4 + a_4 \Rightarrow a_4 = 1$$

$$N_5 = 10 = 2 \times 5 + 0 = 2 \times N_5 + a_5 \Rightarrow a_5 = 0$$

$$N_6 = 5 = 2 \times 2 + 1 = 2 \times N_6 + a_6 \Rightarrow a_6 = 1$$

$$N_7 = 2 = 2 \times 1 + 0 = 2 \times N_7 + a_7 \Rightarrow a_7 = 0$$

$$N_8 = 1 = 2 \times 0 + 1 = 2 \times N_8 + a_8 \Rightarrow a_8 = 1$$

$(347)_{10}$



$(101011011)_2$

O processo
termina pois
 N_8 é zero

Introdução aos Métodos Numéricos

19



Exercícios

$\Rightarrow$ Represente $(2345)_{10}$ na base 2

$\Rightarrow$ Represente $(101101)_2$ na base decimal



Introdução aos Métodos Numéricos

20



Processo para converter um número fracionário do sistema decimal para o sistema binário

➤ Conversão de Números Fracionários:

Dado um número entre 0 e 1, como encontrar a sua representação $(0.d_1d_2\dots d_j\dots)_2$ na base 2?

- Exemplo: Considere $(0.125)_{10}$

Multiplicando 0.125 por 2 temos:

$$2 \times 0.125 = 0.250 = \underbrace{0}_{\substack{\text{parte inteira} \\ d_1=0}} + \underbrace{0.25}_{\text{parte fracionária}}$$

$$\text{Logo } d_1 = 0$$

Base binária admite somente 0 ou 1!!!!!!

Introdução aos Métodos Numéricos

21



Processo para converter um número fracionário do sistema decimal para o sistema binário

Aplicando o mesmo procedimento para 0.250,

$$2 \times 0.250 = 0.500 = \underbrace{0}_{\substack{\text{parte inteira} \\ d_2=0}} + \underbrace{0.5}_{\text{parte fracionária}}$$

e repetindo para 0.5,

$$2 \times 0.5 = 1.0 = \underbrace{1}_{\substack{\text{parte inteira} \\ d_3=1}} + \underbrace{0}_{\text{parte fracionária}}$$

O processo termina pois a parte fracionária é zero. Assim, a representação de $(0.125)_{10}$, na base 2, será $(0.001)_2$, pois:

$$(0.001)_2 = 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = 0 + 0 + \frac{1}{8} = 0.125$$

Introdução aos Métodos Numéricos

22



Processo para converter um número fracionário do sistema binário para o sistema decimal

➤ **Conversão de Números Fracionários:**

Seja agora um número entre 0 e 1 no sistema binário. Como encontrar a sua representação na base 10?

Considere o número $(0.000111)_2 = (0.b_1b_2\dots b_j)_{10}$

Definimos $r_1 = (0.000111)_2$ e multiplicamos por $(1010)_2$. Note que $(1010)_2 = (10)_{10}$

$$\begin{aligned} w_1 &= (1010)_2 \times r_1 \\ &= (1010)_2 \times (0.000111)_2 = (1.000110)_2 = \underbrace{1}_{\text{parte inteira}} + \underbrace{0.00011}_{\text{parte fracionária}} \end{aligned}$$



Multiplicação Binária

$$\begin{array}{r} 0.000111 \\ 1010 \\ \hline 0.000000 \\ 0.000111 \\ 0.000000 \\ 0.000111 \\ \hline 1.000110 \end{array}$$



Processo para converter um número fracionário do sistema binário para o sistema decimal

$$w_1 = (1010)_2 \times r_1$$

$$= (1010)_2 \times (0.000111)_2 = (1.000110)_2 = \underbrace{1}_{\text{parte inteira}} + \underbrace{0.00011}_{\text{parte fracionária}}$$

Convertendo a parte inteira para a base decimal, obtemos

$$(1)_2 = 1 \times 2^0 = (1)_{10} \Rightarrow b_1 = 1$$

Assim,

$$b_1 = 1 \text{ e } r_2 = 0.00011$$

Repetindo o processo até $r_{k+1}=0$.

Introdução aos Métodos Numéricos

25



Processo para converter um número fracionário do sistema binário para o sistema decimal

$$w_2 = (1010)_2 \times r_2 = (1010)_2 \times (0.00011)_2 = (0.1111)_2$$

$$\Rightarrow (0)_2 = (0)_{10} \Rightarrow b_2 = 0 \text{ e } r_3 = 0.1111$$

$$w_3 = (1010)_2 \times r_3 = (1010)_2 \times (0.1111)_2 = (1001.011)_2$$

$$\Rightarrow (1001)_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = (9)_{10} \Rightarrow b_3 = 9 \text{ e } r_4 = 0.011$$

$$w_4 = (1010)_2 \times r_4 = (1010)_2 \times (0.011)_2 = 11.11$$

$$\Rightarrow (11)_2 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = (3)_{10} \Rightarrow b_4 = 3 \text{ e } r_5 = 0.11$$

$$w_5 = (1010)_2 \times r_5 = (1010)_2 \times (0.11)_2 = 111.1$$

$$\Rightarrow (111)_2 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = (7)_{10} \Rightarrow b_5 = 7 \text{ e } r_6 = 0.1$$

$$w_6 = (1010)_2 \times r_6 = (1010)_2 \times (0.1)_2 = 101$$

$$\Rightarrow (101)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = (5)_{10} \Rightarrow b_6 = 5 \text{ e } r_7 = 0$$

O processo termina pois $r_7=0$

$$(0.000111)_2 = (0.109375)_{10}$$

Introdução aos Métodos Numéricos

26



Exercícios

$\Rightarrow$ Represente $(0.5)_{10}$ na base 2

$\Rightarrow$ Represente $(0.11)_{10}$ na base 2



Introdução aos Métodos Numéricos

27



Ponto Fixo e Ponto Flutuante



- Na nossa realidade sempre estamos representando os números na base decimal, portanto sabemos exatamente seu significado.

$$1532 \xrightarrow[\text{equivalente}]{\text{quantidade}} 1 \times 1000 + 5 \times 100 + 3 \times 10 + 2$$

$$1532 = 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

Representação Posicional

- Já na base binária,

$$1011 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

Introdução aos Métodos Numéricos

28



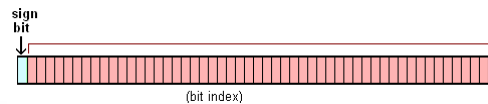
Ponto Fixo e Ponto Flutuante

- A ideia por trás da representação dos números em bases numéricas é utilizada para representar números no computador.



Manipulação mais eficiente

- Um **número inteiro** apresenta a chamada representação de **ponto fixo**, onde a **posição** do ponto decimal está **fixa** e todos os dígitos são usados para representar o número em si, com exceção do primeiro dígito usado para representar o **sinal** do número.



Introdução aos Métodos Numéricos

29



Ponto Fixo e Ponto Flutuante

- Para um **número real** qualquer é utilizada a representação de **ponto flutuante**, que é dada pela expressão:

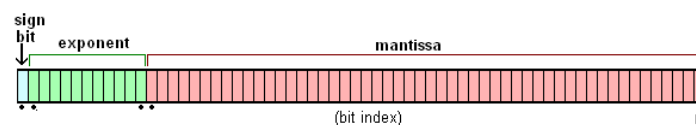
$$\pm (0.d_1d_2d_3\dots d_t) \times \beta^e \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq d_j \leq (\beta - 1) \\ j = 1, \dots, t \\ d_1 \neq 0 \end{array} \right.$$

onde:

$0.d_1d_2d_3\dots d_t$ é uma fração na base b , chamada de **mantissa**.

t número máximo de dígitos da mantissa.

e Expoente que varia em um intervalo dado pelos limites da máquina utilizada.



Ponto flutuante pois o ponto da fração "flutua"

Introdução aos Métodos Numéricos

30



Ponto Fixo e Ponto Flutuante

➤ Exemplos da representação de ponto flutuante ($\beta=10$, $t=3$ e $e \in [-4,4]$):

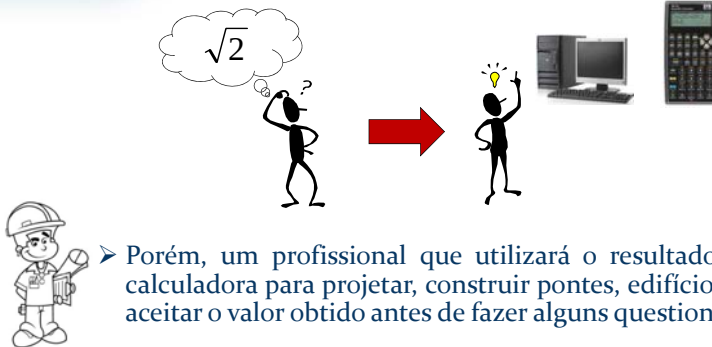
Número na base decimal	Representação em ponto flutuante	mantissa	base	expoente
1532	$0,1532 \times 10^4$	0.1532	10	4
15.32	0.1532×10^2	0.1532	10	2
0.00255	0.255×10^{-2}	0.255	10	-2
10	0.10×10^2	0.10	10	2
0.000002	Underflow	Expoente < -4		
817235.89	Overflow	Expoente > +4		

Introdução aos Métodos Numéricos

31



Erros Numéricos



➤ Porém, um profissional que utilizará o resultado fornecido pela calculadora para projetar, construir pontes, edifícios, etc, não pode aceitar o valor obtido antes de fazer alguns questionamentos.

$$\sqrt{2} = 1,4142213562$$

Como fez para chegar
nesse resultado?

Qual é a confiabilidade do
resultado que foi obtido?

Introdução aos Métodos Numéricos

32



Erros Numéricos

$\sqrt{2}$ é um número irracional $\rightarrow$ Não existe uma forma de representá-lo com um número finito de algarismos

$\sqrt{2} = 1,4142213562$ $\rightarrow$ **Solução Aproximada**



Quão próximo do valor real está o resultado mostrado?

Introdução aos Métodos Numéricos

33



Definições – Erro Absoluto



➤ Vamos definir a diferença entre o valor real da grandeza que queremos calcular e o valor aproximado que efetivamente calculamos como erro, ou seja:

$$\text{erro} = \text{valor real} - \text{valor aproximado}$$

Erro Absoluto



➤ Quanto menor for esse erro, mais preciso será o resultado da operação.



➤ Se estivermos lidando com números muito grandes, o erro pode ser grande em termos absolutos, mas o resultado ainda será preciso.

➤ O caso inverso também pode ocorrer: um erro absoluto pequeno, mas um resultado impreciso.

Introdução aos Métodos Numéricos

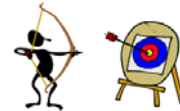
34



Definições – Erro Absoluto

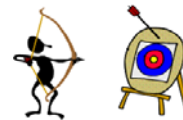
Resultado de uma operação → 2.123.542,7
Valor real → 2.123.544,5

erro absoluto = 1,8



Resultado de uma operação → 0,234
Valor real → 0,128

erro absoluto = 0,106



Introdução aos Métodos Numéricos

35



Definições – Erro Relativo



➤ Para evitar ambigüidade, podemos criar uma nova definição:

$$\text{erro} = \frac{\text{valor real} - \text{valor aproximado}}{\text{valor real}}$$

Erro Relativo



➤ É uma forma mais geral de se avaliara **precisão** de um cálculo efetuado.

Introdução aos Métodos Numéricos

36



Definições – Erro Relativo

Resultado de uma operação $\rightarrow$ 2.123.542,7

Valor real $\rightarrow$ 2.123.544,5

erro absoluto = 1,8

erro relativo = 0,000008

Resultado de uma operação $\rightarrow$ 0,234

Valor real $\rightarrow$ 0,128

erro absoluto = 0,106

erro relativo = 0,83

Introdução aos Métodos Numéricos

37



Tipos de Erro na Resolução de Problemas



A resolução de um problema de engenharia num computador utilizando um modelo numérico produz, em geral, uma solução aproximada do problema. A introdução de erros na resolução do problema pode ser devida a vários fatores.

- ⊗ Erros de arredondamento;
- ⊗ Erros de truncamento.

Introdução aos Métodos Numéricos

38



Erros de Arredondamento



➤ Quer os cálculos sejam efetuados manualmente quer obtidos por computador somos conduzidos a utilizar uma aritmética de precisão finita, ou seja, apenas podemos ter em consideração um número finito de dígitos. O erro devido a desprezar os outros e arredondar o número é designado por erro de arredondamento.

$$\sqrt{2} = 1,41$$

$$\sqrt{2} = 1,4142$$

$$\sqrt{2} = 1,4142213562$$



Erros de Truncamento



➤ Muitas equações têm soluções que apenas podem ser construídas no sentido que um processo infinito possa ser descrito como limite da solução em questão. Por definição, um processo infinito não pode ser completado, por isso tem de ser truncado após certo número finito de operações. Esta substituição de um processo infinito por um processo finito, resulta num certo tipo de erros designado erro de truncamento.



$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Truncamento da série !!



...

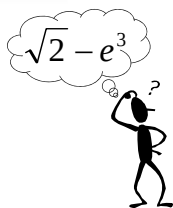
⊗ Erros de arredondamento;

⊗ Erros de truncamento.

*são erros que ocorrem no
processo de cálculo de uma
solução numérica*



Propagação e Condicionamento de Erros Numéricos



$\sqrt{2} \rightarrow$ arredondam ento (valor aproximado)

$e^3 \rightarrow$ truncament o (erro no resultado obtido)

$\sqrt{2} - e^3 \rightarrow$ Apresentará um erro que é proveniente dos erros nos valores de raiz de 2 e e^3 .

***Os erros nos valores se
propagam para o resultado final***



Propagação e Condicionamento de Erros Numéricos



- A propagação de erros é muito importante pois, além de determinar o erro final de uma operação numérica, ela também determina a sensibilidade de um determinado problema ou método Numérico.
- Se uma pequena variação nos dados de entrada de um problema levar a uma grande diferença no resultado final, considera-se que essa operação é **mal-condicionada**, ou seja, existe uma grande propagação de erros nessa operação.
- Por outro lado, se uma pequena variação nos dados de entrada leva a apenas uma pequena diferença no resultado final, então essa operação é **bem-condicionada**.

Introdução aos Métodos Numéricos

43



Erros na Aritmética de Ponto Flutuante



- Se pensarmos um pouco, erros de arredondamento e truncamento sempre estão presentes na matemática computacional, pois os computadores precisam representar os números com uma quantidade finita de algarismos.
- Vamos supor, para simplificação, um computador com uma representação de ponto flutuante na base decimal ($\beta=10$) e uma mantissa de 4 algarismos ($t=4$).



734,68

[	$0,7346 \times 10^3$ (truncá-lo)	ERRO $0,8 \times 10^{-1}$
	$0,7347 \times 10^3$ (arredondá-lo)	$0,2 \times 10^{-1}$

Introdução aos Métodos Numéricos

44



Erros na Aritmética de Ponto Flutuante

➤ Exemplo:

$$6563 \quad (= 0,6563 \times 10^4)$$

$$3,375 \quad (= 0,3375 \times 10^1)$$

$$6566,375$$



$$\rightarrow 0,6566 \times 10^4 = 6566$$

4 algarismos

➤ Apesar de partirmos de dois **números exatos**, o resultado da soma **não** será exata. Em um computador real, esse erro é pequeno, porém, se um número **muito grande de operações** for realizado e se existir a necessidade de se obter um resultado bastante preciso, será preciso se **levar em consideração** esse tipo de erro para avaliar o resultado obtido.