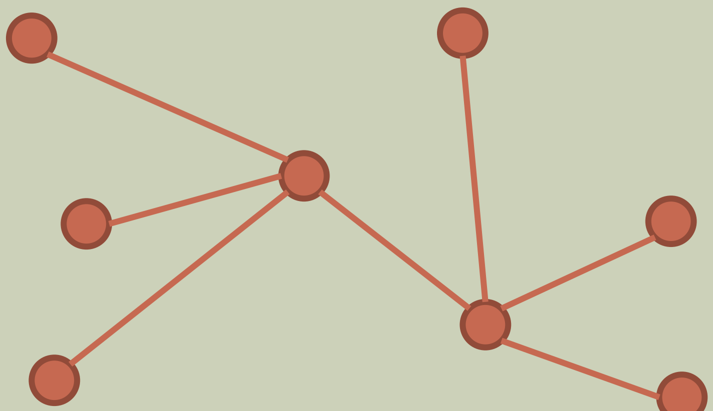
ÁRVORES

- Def.: Um grafo é **acíclico** se não possui ciclos.
- Def.: Uma **árvore** é um grafo acíclico e conexo.
- Def.: Uma **floresta** é um grafo acíclico (cada componente conexa de uma floresta é uma árvore).

ÁRVORES

- Def.: Um grafo é **acíclico** se não possui ciclos.
- Def.: Uma **árvore** é um grafo acíclico e conexo.
- Def.: Uma **floresta** é um grafo acíclico (cada componente conexa de uma floresta é uma árvore).



ÁRVORES

- Def.: Um grafo é **acíclico** se não possui ciclos.
- Def.: Uma **árvore** é um grafo acíclico e conexo.
- Def.: Uma **floresta** é um grafo acíclico (cada componente conexa de uma floresta é uma árvore).

ÁRVORES

- Teorema 1:

Um grafo *T* é uma árvore

sss

existe um único caminho entre cada par de vértices de *T*.

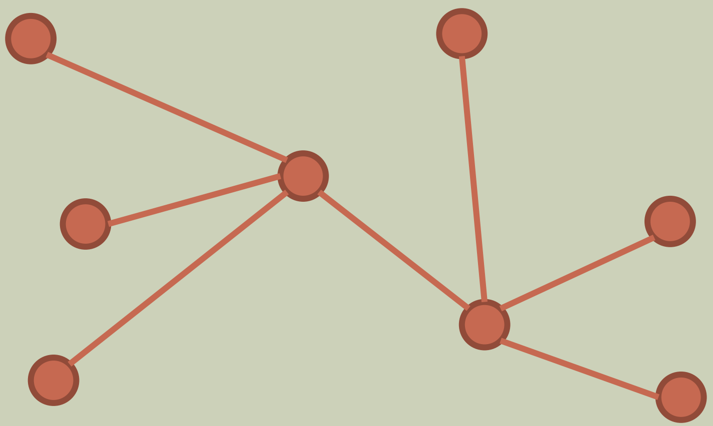
ÁRVORES

- Teorema 1:

Um grafo *T* é uma árvore

sss

existe um único caminho entre cada par de vértices de *T*.



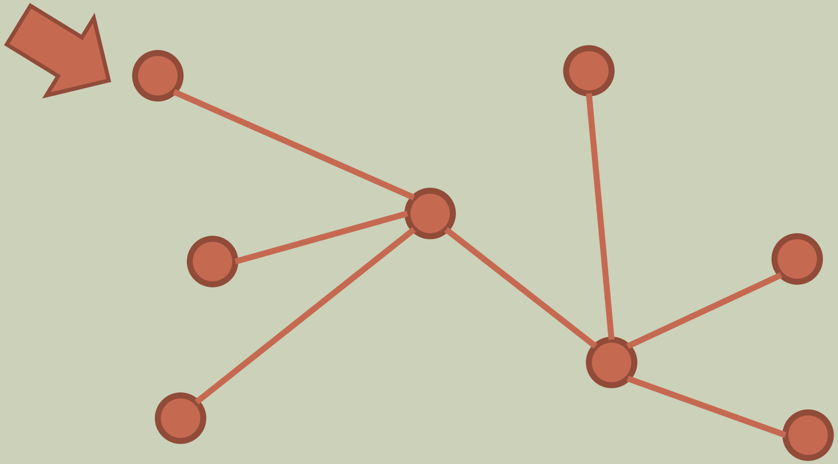
ÁRVORES

- Teorema 1:

Um grafo *T* é uma árvore

sss

existe um único caminho entre cada par de vértices de *T*.



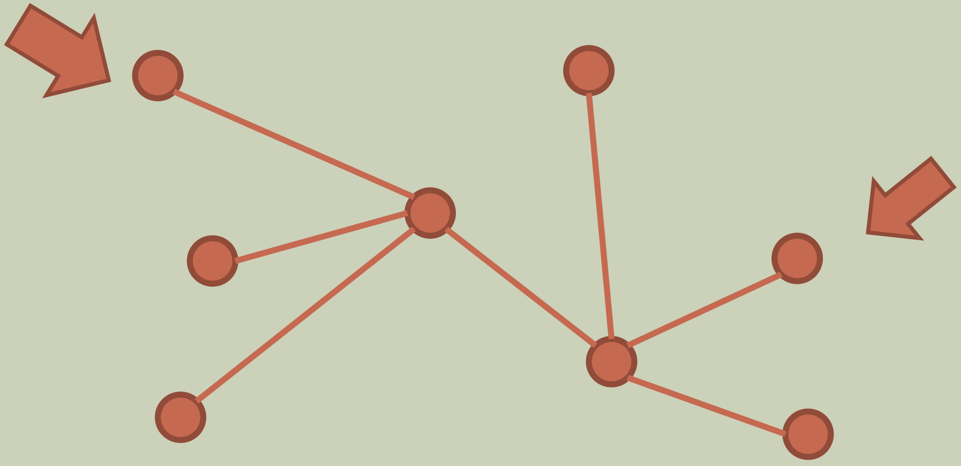
ÁRVORES

- Teorema 1:

Um grafo *T* é uma árvore

sss

existe um único caminho entre cada par de vértices de *T*.



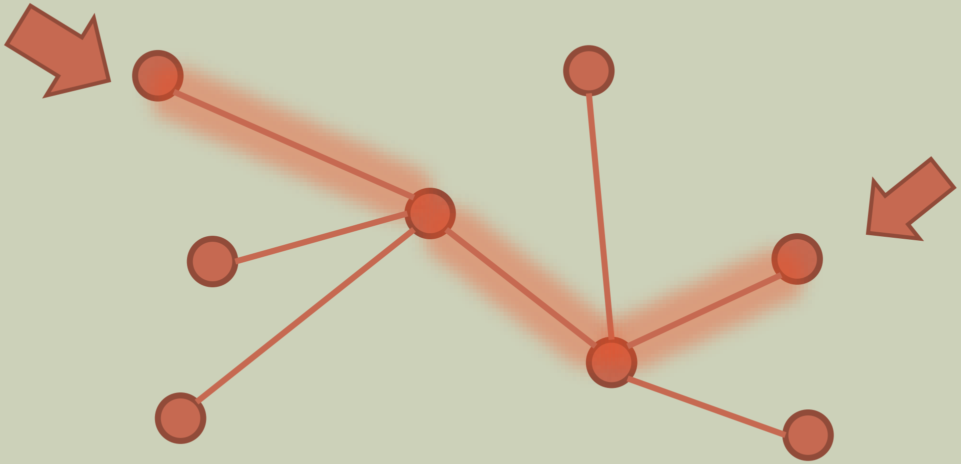
ÁRVORES

- **Teorema 1:**

Um grafo *T* é uma árvore

sss

existe um único caminho entre cada par de vértices de *T*.



ÁRVORES

- Def.: Uma folha de uma árvore é um vértice de grau um.

- Teorema 2:

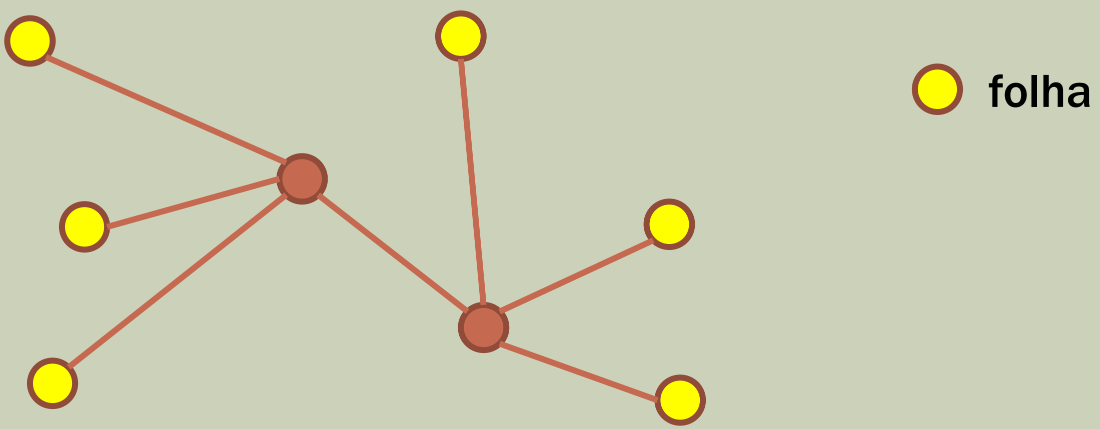
  Toda árvore não trivial tem pelo menos duas folhas.

ÁRVORES

- Def.: Uma **folha** de uma árvore é um vértice de grau um.

- Teorema 2:

  Toda árvore não trivial tem pelo menos duas folhas.



ÁRVORES

- Teorema 3:

Se T é uma árvore então $m=n-1$.

ÁRVORES

- Teorema 3:

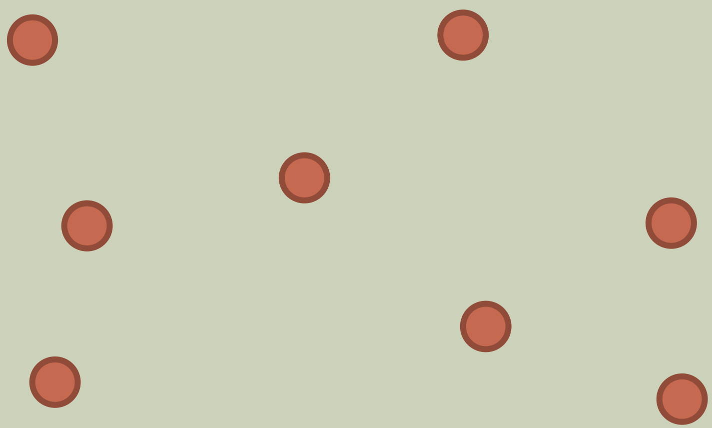
Se T é uma árvore então $m=n-1$.

Note inicialmente que o resultado vale trivialmente para $n = 1$ ou $n = 2$

ÁRVORES

- Teorema 3:

Se T é uma árvore então $m=n-1$.

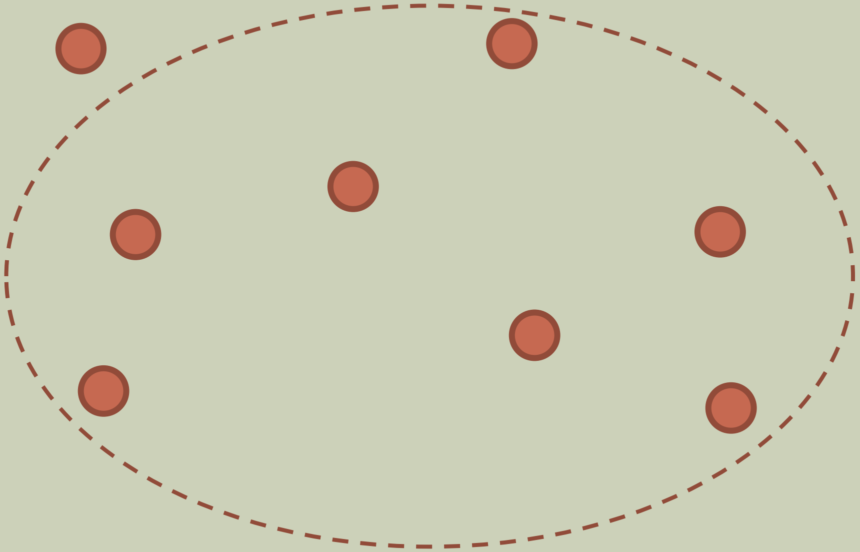


$n = 8$

ÁRVORES

- Teorema 3:

Se T é uma árvore então $m=n-1$.

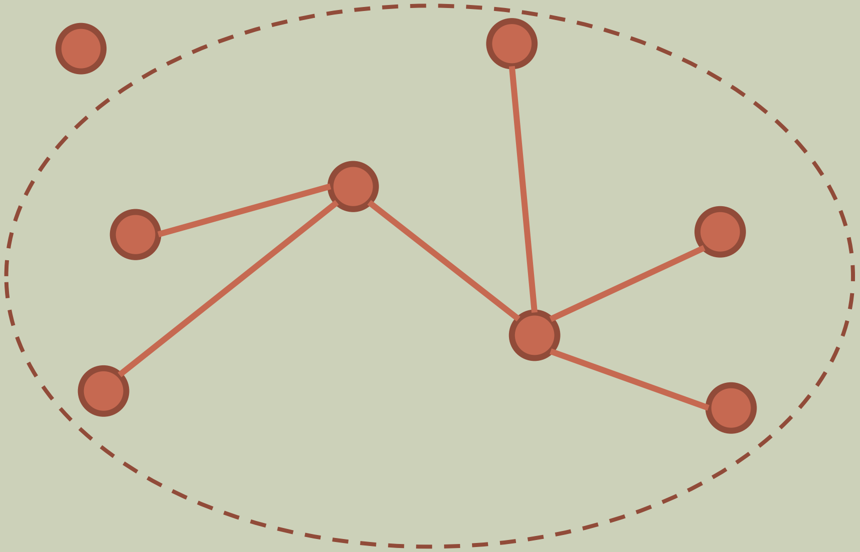


$n = 7$

ÁRVORES

- **Teorema 3:**

Se T é uma árvore então $m=n-1$.

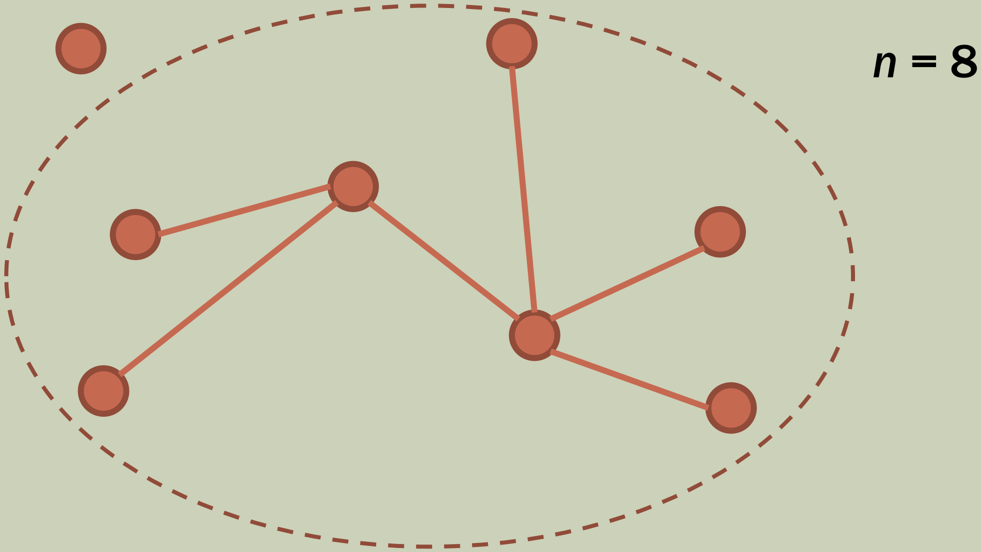


$n = 7$, $m = 6$

ÁRVORES

- Teorema 3:

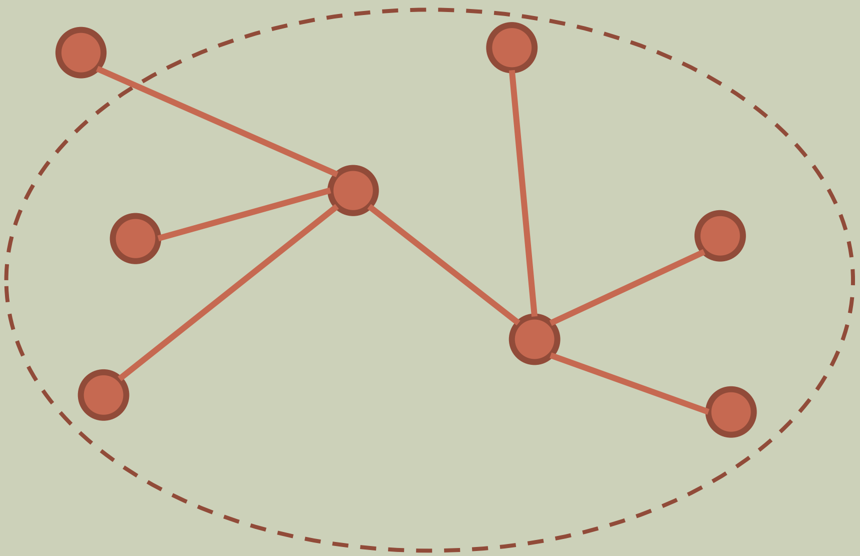
Se T é uma árvore então $m=n-1$.



ÁRVORES

- Teorema 3:

Se T é uma árvore então $m=n-1$.



$n = 8$, $m = 7$

ÁRVORES

- Lema:

Seja *T* uma árvore com pelo menos três vértices.

Seja *F* o conjunto das folhas de *T*.

Seja *T*' = *T* - *F*.

Então, *T* e *T*' têm o mesmo centro.

ÁRVORES

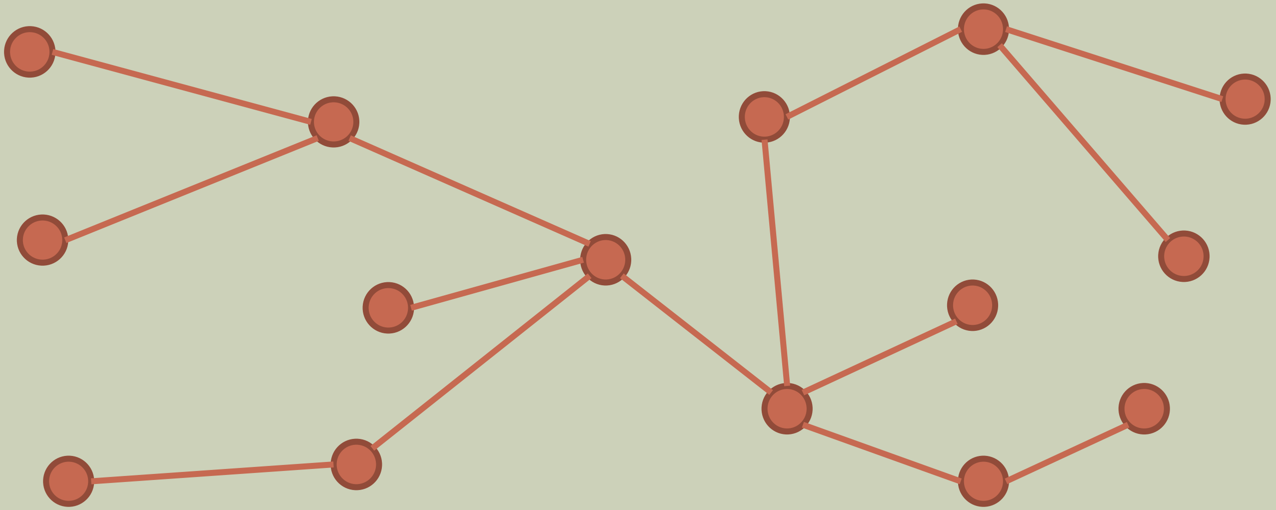
- Lema:

Seja *T* uma árvore com pelo menos três vértices.

Seja *F* o conjunto das folhas de *T*.

Seja *T*' = *T* - *F*.

Então, *T* e *T*' têm o mesmo centro.



T

ÁRVORES

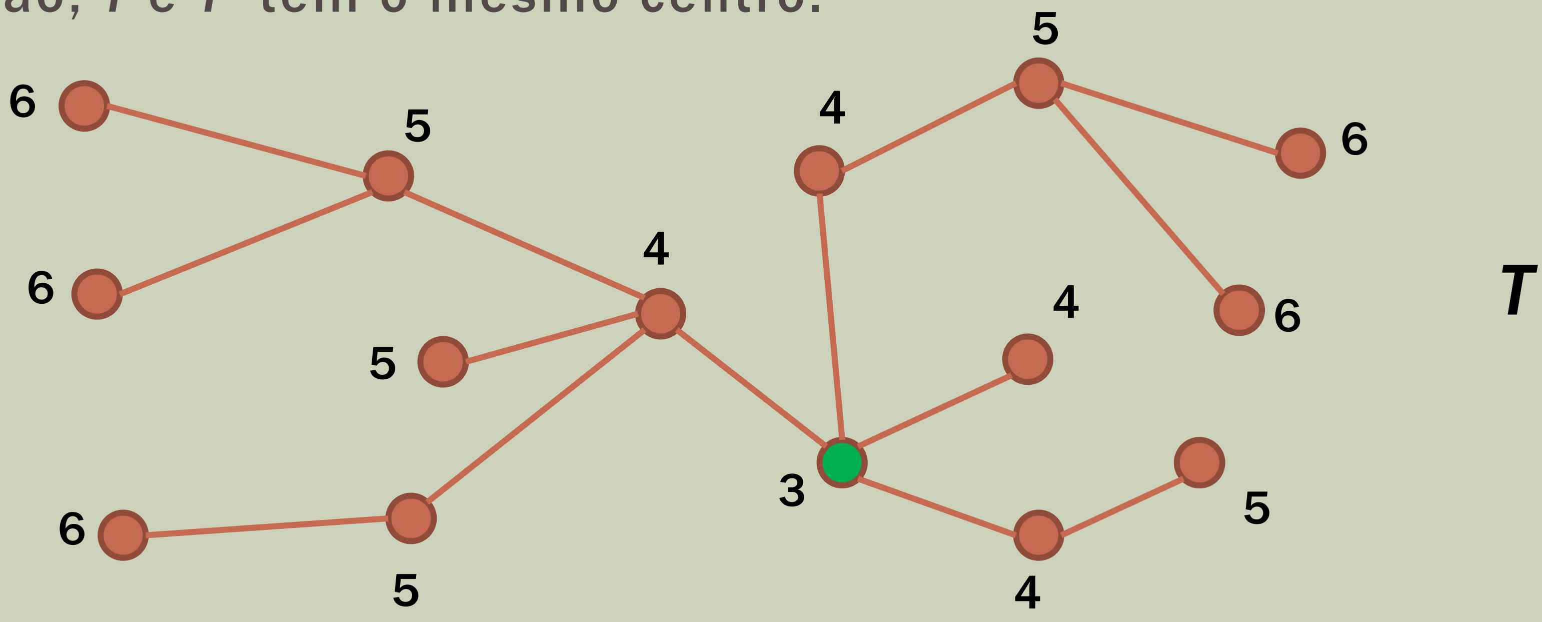
- Lema:

Seja *T* uma árvore com pelo menos três vértices.

Seja *F* o conjunto das folhas de *T*.

Seja *T*' = *T* - *F*.

Então, *T* e *T*' têm o mesmo centro.



ÁRVORES

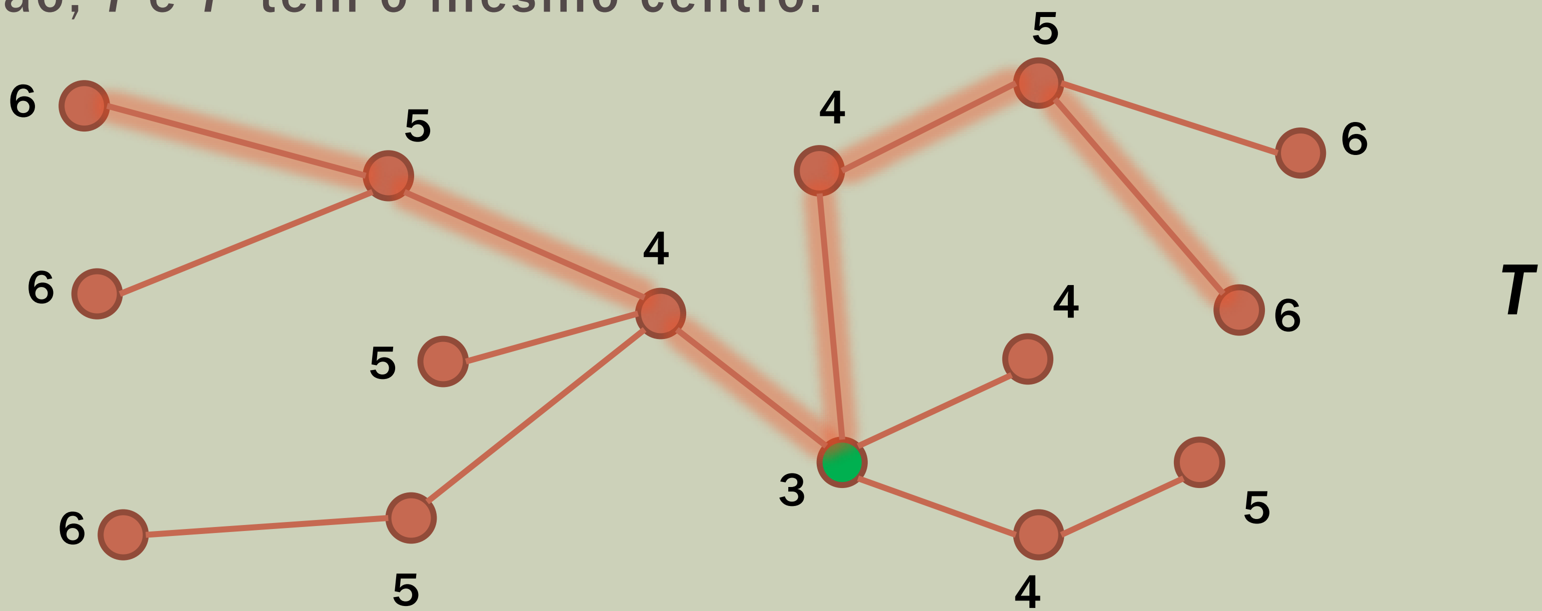
- Lema:

Seja *T* uma árvore com pelo menos três vértices.

Seja *F* o conjunto das folhas de *T*.

Seja *T*' = *T* - *F*.

Então, *T* e *T*' têm o mesmo centro.



ÁRVORES

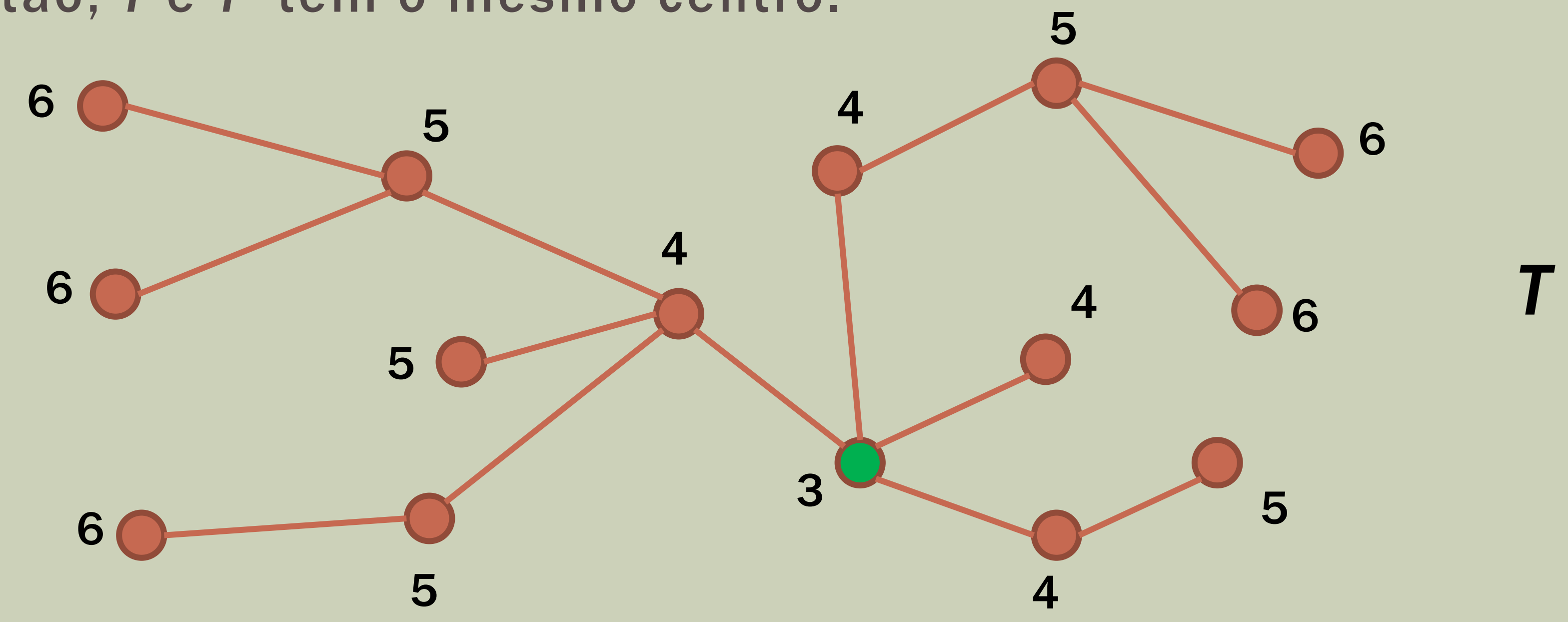
- Lema:

Seja T uma árvore com pelo menos três vértices.

Seja F o conjunto das folhas de T.

Seja $T' = T - F$.

Então, T e T' têm o mesmo centro.



ÁRVORES

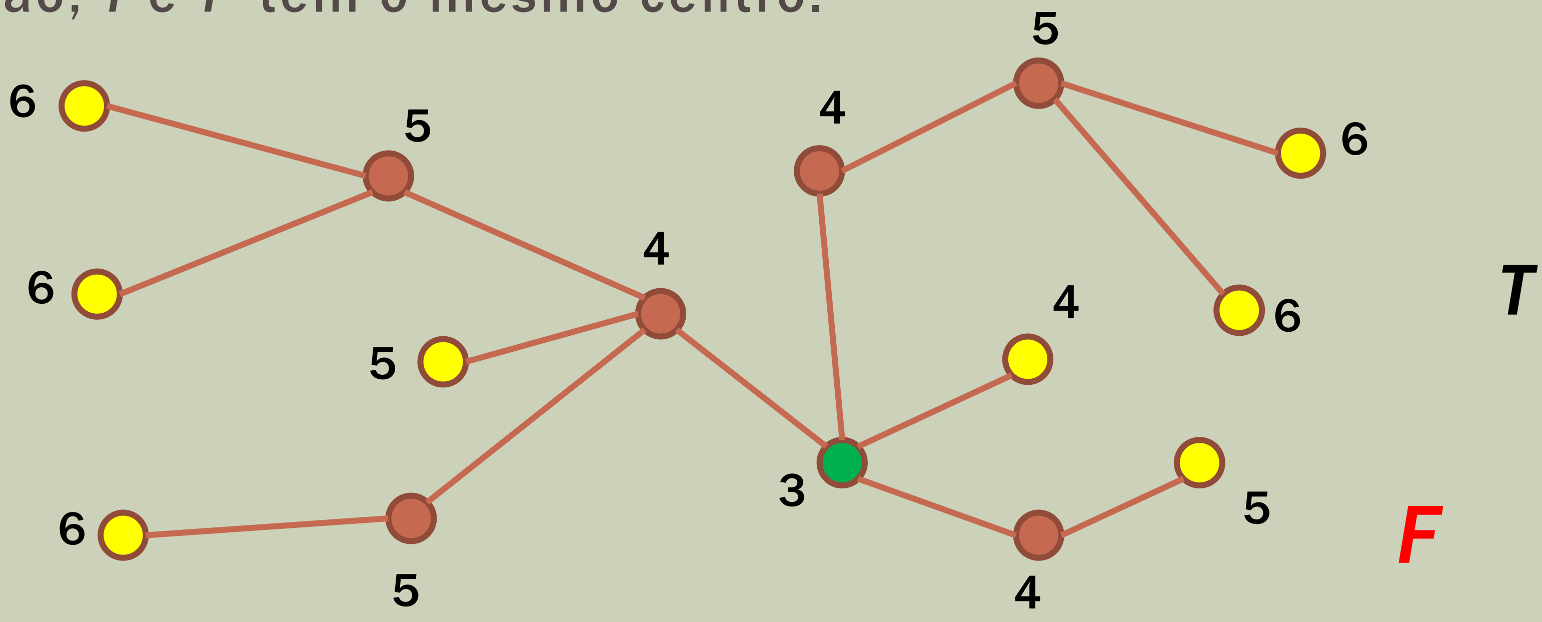
- Lema:

Seja *T* uma árvore com pelo menos três vértices.

Seja *F* o conjunto das folhas de *T*.

Seja *T*' = *T* - *F*.

Então, *T* e *T*' têm o mesmo centro.



ÁRVORES

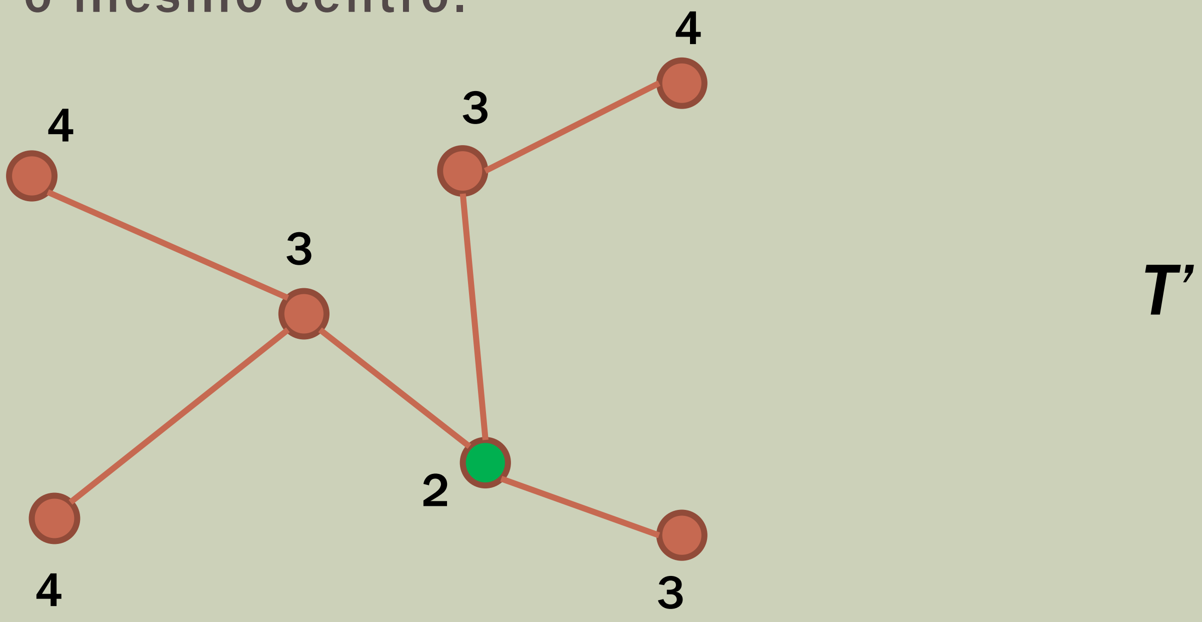
- Lema:

Seja T uma árvore com pelo menos três vértices.

Seja F o conjunto das folhas de T.

Seja $T' = T - F$.

Então, T e T' têm o mesmo centro.



ÁRVORES

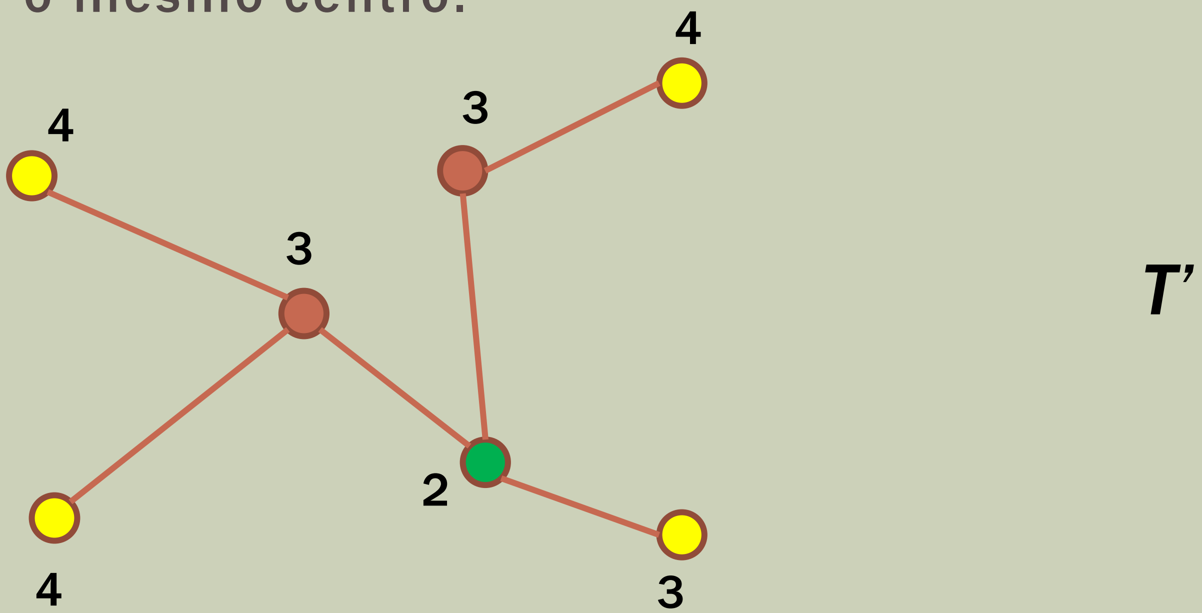
- Lema:

Seja *T* uma árvore com pelo menos três vértices.

Seja *F* o conjunto das folhas de *T*.

Seja *T*' = *T* - *F*.

Então, *T* e *T*' têm o mesmo centro.



ÁRVORES

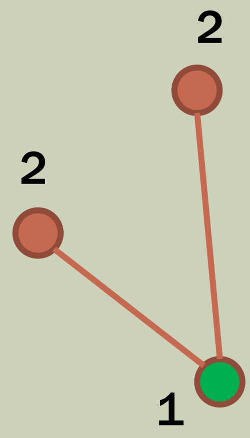
- Lema:

Seja *T* uma árvore com pelo menos três vértices.

Seja *F* o conjunto das folhas de *T*.

Seja *T*' = *T* - *F*.

Então, *T* e *T*' têm o mesmo centro.



T''

ÁRVORES

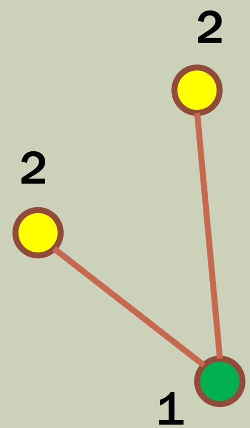
- Lema:

Seja *T* uma árvore com pelo menos três vértices.

Seja *F* o conjunto das folhas de *T*.

Seja *T*' = *T* - *F*.

Então, *T* e *T*' têm o mesmo centro.



T''

ÁRVORES

- Lema:

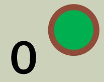
Seja *T* uma árvore com pelo menos três vértices.

Seja *F* o conjunto das folhas de *T*.

Seja *T*' = *T* - *F*.

Então, *T* e *T*' têm o mesmo centro.

T'''



ÁRVORES

- Teorema 4: (Jordan 1869)

O centro de uma árvore ou é formado por apenas um vértice ou por dois vértices vizinhos.

ÁRVORES

- Teorema 4: (Jordan 1869)

O centro de uma árvore ou é formado por apenas um vértice ou por dois vértices vizinhos.

Demonstração:

ÁRVORES

- Teorema 4: (Jordan 1869)

O centro de uma árvore ou é formado por apenas um vértice ou por dois vértices vizinhos.

Demonstração:

- Toda árvore tem pelo menos duas folhas

ÁRVORES

- Teorema 4: (Jordan 1869)

O centro de uma árvore ou é formado por apenas um vértice ou por dois vértices vizinhos.

Demonstração:

- Toda árvore tem pelo menos duas folhas
- Cada iteração de retirada de folhas remove pelo menos dois vértices

ÁRVORES

- Teorema 4: (Jordan 1869)

O centro de uma árvore ou é formado por apenas um vértice ou por dois vértices vizinhos.

Demonstração:

- Toda árvore tem pelo menos duas folhas
- Cada iteração de retirada de folhas remove pelo menos dois vértices
- As iterações param quando há menos do que 3 vértices, isto é, a árvore remanescente é um vértice isolado ou dois vértices ligados por uma aresta

ÁRVORES

- Teorema 4: (Jordan 1869)

O centro de uma árvore ou é formado por apenas um vértice ou por dois vértices vizinhos.

Demonstração:

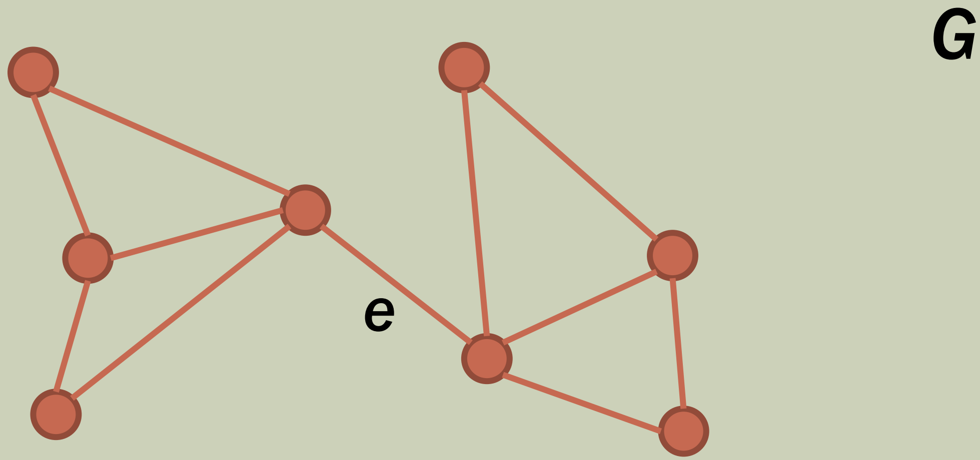
- Toda árvore tem pelo menos duas folhas
- Cada iteração de retirada de folhas remove pelo menos dois vértices
- As iterações param quando há menos do que 3 vértices, isto é, a árvore remanescente é um vértice isolado ou dois vértices ligados por uma aresta
- Estes vértices restantes formam o centro da árvore

ÁRVORES

- Def.: Uma ponte ou aresta de corte de um grafo G é uma aresta e tal que $w(G\text{-}e) > w(G)$.

ÁRVORES

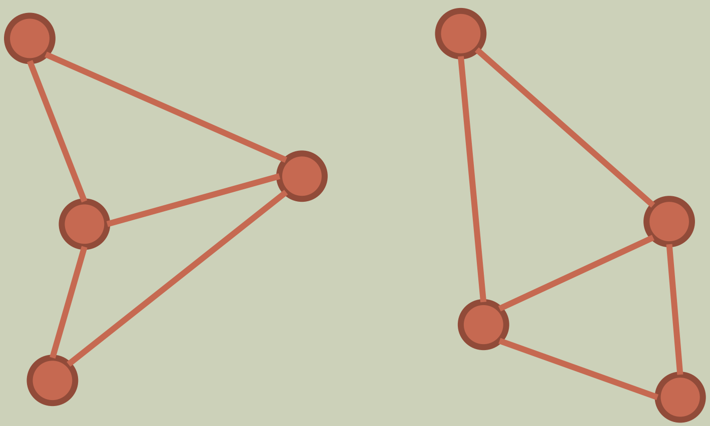
- Def.: Uma **ponte** ou **aresta de corte** de um grafo G é uma aresta **e** tal que $w(G\text{-}e) > w(G)$.



$w(G)=1$

ÁRVORES

- Def.: Uma **ponte** ou **aresta de corte** de um grafo G é uma aresta **e** tal que $w(G\text{-}e) > w(G)$.



G

$w(G\text{-}e)=2$

ÁRVORES

- Teorema 5:

Uma aresta e é uma ponte de G

sss

não existe ciclo contendo e em G.

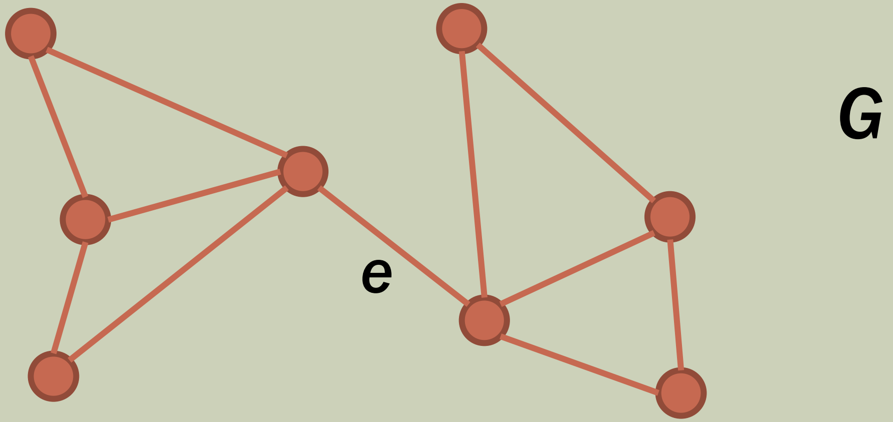
ÁRVORES

- Teorema 5:

Uma aresta *e* é uma ponte de *G*

sss

não existe ciclo contendo *e* em *G*.



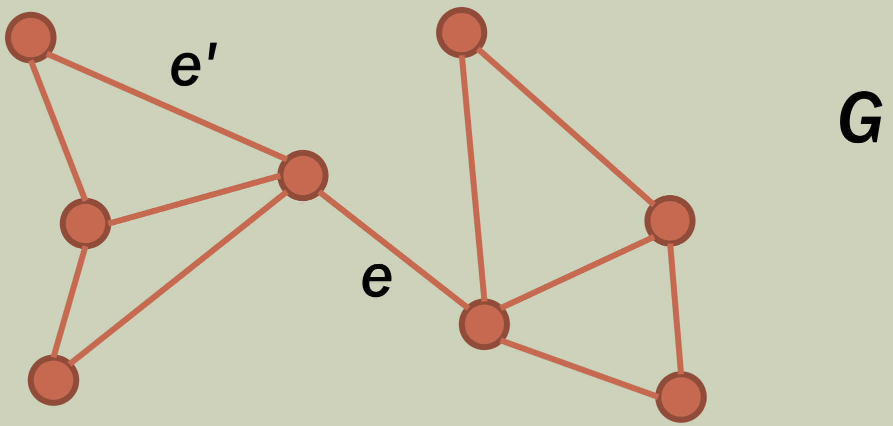
ÁRVORES

- Teorema 5:

Uma aresta *e* é uma ponte de *G*

sss

não existe ciclo contendo *e* em *G*.



ÁRVORES

- Teorema 6:

Um grafo conexo T é uma árvore

sss

cada aresta de T é uma ponte.

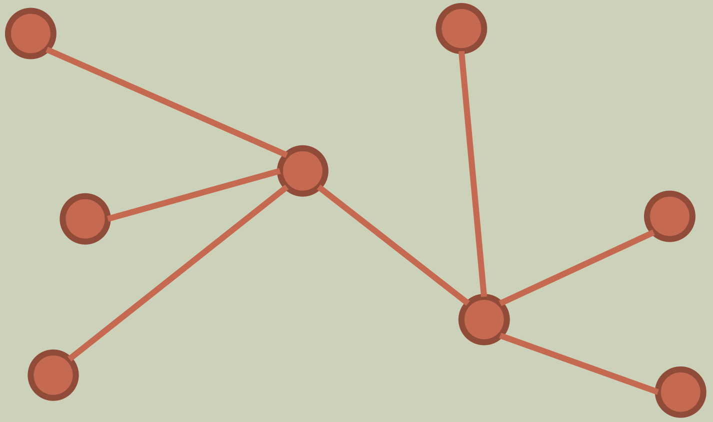
ÁRVORES

- Teorema 6:

Um grafo conexo *T* é uma árvore

sss

cada aresta de *T* é uma ponte.



ÁRVORES

- Def. Uma **árvore geradora** de um grafo G é um subgrafo gerador conexo e acíclico de G.

ÁRVORES

- Def. Uma árvore geradora de um grafo G é um subgrafo gerador conexo e acíclico de G.
- Fato: Todo grafo conexo possui uma árvore geradora.

ÁRVORES

- Def. Uma árvore geradora de um grafo G é um subgrafo gerador conexo e acíclico de G.
- Fato: Todo grafo conexo possui uma árvore geradora.
- A idéia para verificar o fato acima é ir retirando as arestas uma a uma de modo a manter o grafo conexo. Quando isto não for mais possível, as arestas remanescentes são todas pontes!

ÁRVORES

- Def. Uma árvore geradora de um grafo *G* é um subgrafo gerador conexo e acíclico de G.

- Fato: Todo grafo conexo possui uma árvore geradora.

- A idéia para verificar o fato acima é ir retirando as arestas uma a uma de modo a manter o grafo conexo. Quando isto não for mais possível, as arestas remanescentes são todas pontes! Logo, formam uma árvore.

ÁRVORES

- Def. Uma árvore geradora de um grafo *G* é um subgrafo gerador conexo e acíclico de G.
- Fato: Todo grafo conexo possui uma árvore geradora.
- A idéia para verificar o fato acima é ir retirando as arestas uma a uma de modo a manter o grafo conexo. Quando isto não for mais possível, as arestas remanescentes são todas pontes! Logo, formam uma árvore.
- Como esta árvore contém os vértices originais, é geradora!

ÁRVORES

- Teorema 7:

Se G é conexo, então $m \geq n - 1$.

ÁRVORES

- Teorema 7:

Se G é conexo, então $m \geq n - 1$.

Demonstração:

- Já sabemos que G contém uma árvore geradora T

ÁRVORES

- Teorema 7:

Se G é conexo, então $m \geq n - 1$.

Demonstração:

- Já sabemos que G contém uma árvore geradora T
- Sabemos também que T tem n vértices e n-1 arestas

ÁRVORES

- Teorema 7:

Se G é conexo, então $m \geq n - 1$.

Demonstração:

- Já sabemos que G contém uma árvore geradora T
- Sabemos também que T tem n vértices e n-1 arestas
- Como G tem mais arestas do que T, pois T é subgrafo de G, segue que $m \geq n - 1$.