CONECTIVIDADE

- Def. Um conjunto de vértices V' contido em $V(G)$ é um **separador** ou **corte de vértices** de G se $w(G-V') > w(G)$.

- Fato: Um grafo completo não admite cortes de vértices.

CONECTIVIDADE

- Def. Um conjunto desconectante de arestas é um conjunto E' contido em $E(G)$ tal que $w(G-E') > w(G)$.

- Notação: Se S, T são subconjuntos de vértices de um grafo, então $[S,T]$ é o conjunto de arestas de G que têm um extremo em S e outro em T.

- Def: Seja S um subconjunto próprio e não vazio de vértices de um grafo G. Então, $[S, V(G)\backslash S]$ é um corte de arestas.

- Fato: Todo corte de arestas não vazio é um conjunto desconectante.

CONECTIVIDADE

- <u>Teorema:</u> Todo conjunto desconectante minimal é um corte de arestas.

CONECTIVIDADE

- Def: Um corte de arestas minimal é chamado de **ligação**, **liga**, **bond** ou **co-ciclo**. Observe que uma ponte é uma ligação.

- Def: Seja H um subgrafo de G. O **complemento de H em relação a G** é o grafo G-$E(H)$.

- Def: Se T é uma árvore geradora de G então o complemento de T em relação a G é chamada ***co-árvore*** de T.

- Teorema: A co-árvore C de uma árvore geradora T de um grafo G não contém cortes de arestas de G. Além disso, se e é uma aresta de T, então $C+e$ contém um único co-ciclo.
.

CONECTIVIDADE

- Def: Um vértice v é uma articulação ou vértice de corte se $w(G\text{-}v) > w(G)$.

- Lema: Se v é articulação então existem dois vértices x, y distintos de v tais que todo caminho entre x e y contém v.

- Teorema: Em uma árvore T não trivial, v é uma articulação sss v não é folha.

- Corolário: Todo grafo conexo G não trivial possui pelo menos 2 vértices que não são articulações.

.

CONECTIVIDADE

- Def: A conectividade de arestas $k'(G)$ de um grafo G é a cardinalidade de um corte de arestas mínimo.
- Definimos $k'(G)=0$ se G é trivial ou desconexo.

- Def: A conectividade de vértices $k(G)$ de um grafo G é a cardinalidade de um corte de vértices mínimo, desde que G não seja completo.
- Definimos $k(G)=n-1$ se G é um grafo completo com n vértices, e $k(G)=0$ se G é trivial ou desconexo.

- Nomenclatura: Dizemos que G é p-conexo em vértices [arestas] se $p <= k(G)$ [$p <= k'(G)$]. É claro que todo grafo conexo não trivial é 1-conexo (em vértices ou arestas).

CONECTIVIDADE

- <u>Teorema</u> (Whitney 1932): Se G é conexo, então

$$k(G) \leq k'(G) \leq \delta(G).$$

CONECTIVIDADE

- Proposição: Seja S contido em $V(G)$. Então, a cardinalidade do corte $[S, V(G)\setminus S]$ é igual à soma dos graus dos vértices em S menos duas vezes o número de arestas do grafo $G[S]$.

- Corolário: Se para algum subconjunto de vértices S de $V(G)$ próprio e não vazio vale $|[S, V(G)\setminus S]| < \delta(G)$, então

$$|S| > \delta(G).$$

- Proposição: Se G é conexo e S é um subconjunto próprio e não vazio de $V(G)$, então:

$F = [S, V(G)\setminus S]$ é ligação sss G-F tem dois componentes conexos.

CONECTIVIDADE

- Fato: Um grafo G com pelo menos três vértices é biconexo sss G não possui articulações.

- Def: Um **bloco** de um grafo G é um subgrafo maximal conexo sem articulações.

- Fato: Dois blocos diferentes em um grafo têm no máximo um vértice em comum.

- Fato: Cada aresta de um grafo G está em um único bloco. Portanto, os blocos formam uma partição de $E(G)$.

CONECTIVIDADE

- Def: Dois caminhos de *u* a *v* são **internamente disjuntos** se eles têm apenas os extremos em comum.

- Teorema (Whitney 1932): Seja *G* um grafo com pelo menos três vértices. Então:

  G é biconexo

  sss

  para quaisquer dois vértices de *G* existem dois caminhos internamente disjuntos entre eles.

- Corolário: Um grafo *G* com pelo menos três vértices é biconexo sss existe um ciclo que passa por cada par de vértices arbitrários de *G*.

CONECTIVIDADE

- <u>Teorema</u> (Menger): Seja G um grafo com pelo menos k+1 vértices. Então:

  G é k-conexo (em vértices)

  sss

  para quaisquer dois vértices de G existem k caminhos internamente disjuntos entre eles.

- Este resultado é uma generalização do Teorema de Whitney.

CONECTIVIDADE

- <u>Teorema</u> (Menger - versão arestas):

G é *k*-conexo em arestas

sss

para quaisquer dois vértices de *G* existem *k* caminhos disjuntos em arestas entre eles.