GRAFOS EULERIANOS E HAMILTONIANOS

- Def: Um passeio Euleriano ou trilha de Euler ou passeio de Euler de G é um passeio fechado que contém cada aresta de G exatamente uma vez.

- Um grafo é Euleriano se ele possui um passeio de Euler.

GRAFOS EULERIANOS E HAMILTONIANOS

- Teorema (Euler, 1736): Um grafo G conexo é Euleriano sss todo vértice de G possui grau par.

  (Este resultado vale também para multigrafos.)

- Uma demonstração consiste em executar o **Algoritmo de Tucker**: particionar G em ciclos simples e compor os ciclos até formar um passeio Euleriano. Este algoritmo é $O(m)$.

GRAFOS EULERIANOS E HAMILTONIANOS

- **Problema do Carteiro Chinês:** Dado um grafo com pesos não negativos nas arestas, deseja-se um passeio fechado de comprimento mínimo que passe por todas as arestas.

GRAFOS EULERIANOS E HAMILTONIANOS

- Def: Um **passeio Euleriano aberto** é um passeio não fechado em G tal que toda aresta de G aparece exatamente uma vez no passeio.

- Corolário: Seja G um grafo conexo não Euleriano. Então:

  G possui passeio Euleriano aberto

  sss

  existem exatamente 2 vértices de G com grau ímpar.

GRAFOS EULERIANOS E HAMILTONIANOS

- Def: Um ciclo [caminho] **Hamiltoniano** em um grafo *G* é um ciclo [caminho] que contém todos os vértices de *G*, uma vez cada.

- Um grafo *G* é **Hamiltoniano** quando possui um ciclo Hamiltoniano.

- Fato: Todo grafo Hamiltoniano é biconexo.

GRAFOS EULERIANOS E HAMILTONIANOS

- **Teorema** [condição necessária para um grafo ser Hamiltoniano]: Se G é um grafo Hamiltoniano, então todo subconjunto S de $V(G)$ próprio e não vazio satisfaz a seguinte desigualdade:

$$w(G\text{-}S) \leq |S|.$$

- Para verificar que esta condição não é suficiente, considere o grafo de Petersen.

GRAFOS EULERIANOS E HAMILTONIANOS

- <u>Princípio da Casa de Pombo:</u> "Se existirem n pombos em $m < n$ casas, então existe pelo menos uma casa com no mínimo 2 pombos". Este princípio é usado na demonstração do próximo teorema.

- <u>Teorema</u> (Dirac, 1952) [condição suficiente para um grafo ser Hamiltoniano]: Todo grafo com $n \geq 3$ e $\delta(G) \geq n/2$ tem um ciclo Hamiltoniano.

GRAFOS EULERIANOS E HAMILTONIANOS

- Teorema (Ore, 1960): Se G é um grafo com $n \geq 3$ e tal que para todo par de vértices distintos não adjacentes u e v vale $d(u)+d(v) \geq n$, então G é Hamiltoniano.

- Este resultado é mais forte do que o anterior, no sentido de que pode-se provar Dirac usando Ore.

GRAFOS EULERIANOS E HAMILTONIANOS

- Lema 1: Seja G um grafo e a,b dois vértices não adjacentes de G satisfazendo $d(a)+d(b) \geq n$. Então, G é Hamiltoniano sss $G+ab$ é Hamiltoniano.

- Def: O **fecho** de um grafo G é o grafo $C(G)$ obtido de G por sucessivas adições de arestas ligando pares de vértices não adjacentes cuja soma de graus seja $\geq n$.

- Lema 2: $C(G)$ é bem definido (único).

GRAFOS EULERIANOS E HAMILTONIANOS

- Teorema (Bondy e Chvátal, 1976): G é Hamiltoniano sss $C(G)$ é Hamiltoniano.

- A prova da necessidade do teorema acima é trivial. A prova da suficiência consiste em sucessivas aplicações do Lema 1.

- Corolário: Se $C(G)$ é completo então G é Hamiltoniano.

GRAFOS EULERIANOS E HAMILTONIANOS

- **Problema do Caixeiro Viajante:** Dado um grafo completo G com pesos nas arestas, deseja-se obter um ciclo Hamiltoniano de G com peso mínimo.