Primeira Prova de Matemática Combinatória – 26/04/07

Escolha 5 questões.

Boa Prova!

1. (2,0) Argumente sobre a validade da fórmula de Euler:

$$C_m^0 C_h^p + C_m^1 C_h^{p-1} + C_m^2 C_h^{p-2} + \cdots + C_m^p C_h^0 = C_{m+h}^p$$

(*Dica: quantas comissões de p pessoas podem ser formadas de um grupo com m mulheres e h homens?*)

Resposta:

O lado direito da fórmula corresponde precisamente ao número de comissões de de p pessoas que podem ser formadas de um grupo com m mulheres e h homens.

Estas comissões podem ser montadas da seguinte forma: todas as comissões com 0 mulheres e p homens, mais todas as comissões com uma mulher e $p-1$ homens, mais todas as comissões com duas mulheres e $p-2$ homens... e assim por diante. Este modo de pensar corresponde ao lado esquerdo da fórmula.

2. (2,0) Quantos inteiros entre 1 e 1000000 têm soma de seus algarismos igual a 13? (*Dica: lembre-se da técnica de encontrar o número de soluções inteiras não-negativas da equação* $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$).

Resposta:

Não levando em conta o inteiro 1000000 por não ter soma dos algarismos igual a 13, interprete os inteiros de 000001 até 999999 como tendo seis algarismos.

Represente os 6 algarismos por $x_1, x_2, \ldots, x_6$. O problema consiste em determinar o número de soluções inteiras não negativas e menores que 10 da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 13$.

Calcule:

(a) número de soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 13$. Isto dá C_{18}^5

(b) número de soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + \cdots + x_6$, com $x_1 \geq 10$. Isto dá C_8^5

Resposta final: Fazendo o mesmo para $x_2, \ldots, x_6$, temos $C_{18}^5 - 6C_8^5$.

3. (2,0) Quantos inteiros entre 1 e 1000000, inclusive, não são quadrados perfeitos, nem cubos perfeitos, nem quartas potências perfeitas? (*Dica: use o Princípio de Inclusão e Exclusão, e lembre-se de que:* (1) *toda quarta potência é quadrado;* (2) *se um número é quadrado e cubo, então ele é sexta potência.*)

Resposta:

Considere os conjuntos:

$S_0 = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$.

$S_1 = \{1, 4, 9, 16 \ldots\}$ (quadrados perfeitos).

$S_2 = \{1, 8, 27, 64 \ldots\}$ (cubos perfeitos).

$S_3 = \{1, 16, 81, 256 \ldots\}$ (quartas potências perfeitas).

O número pedido é $\#S_0 - \#(S_1 \cup S_2 \cup S_3)$.

Mas $S_1 \cup S_3 = S_1$ (pois a dica (1) nos diz que $S_3 \subseteq S_1$).

Logo, $\#S_0 - \#(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = \#S_0 - \#(S_1 \cup S_2) = \#S_0 - (\#S_1 + \#S_2 - \#(S_1 \cap S_2))$, por Inclusão e Exclusão.

Porém: $\#S_0 = 1000000$, $\#S_1 = \sqrt{1000000} = 1000$, $\#S_2 = \sqrt[3]{1000000} = 100$, $\#(S_1 \cap S_2) = \sqrt[6]{1000000} = 10$ (esta última igualdade usando a dica (2)).

Finalmente, o número pedido é $1000000 - 1000 - 100 + 10 = 998910$.

4. (2,0) Calcule, sem desenvolver, o termo independente de x de $(3x^4 - \frac{2}{x^3})^{14}$. (*Dica: termo independente, como todos sabem, é o termo em x^0.*)

   Resposta:

   Termo Geral: $T_{p+1} = (-1)^p\ C_n^p\ a^p\ x^{n-p}$

   Aplicando a fórmula: $T_{p+1} = (-1)^p\ C_{14}^p\ (\frac{2}{x^3})^p\ (3x^4)^{14-p}$

   Desenvolvendo: $T_{p+1} = (-1)^p\ C_{14}^p\ 2^p 3^{14-p}\ x^{56-7p}$

   Como queremos o termo independente, fazemos $56 - 7p = 0$, donde vem $p = 8$.

   Logo, substituindo: $T_9 = (-1)^8 C_{14}^8 2^8 3^6 = C_{14}^8 2^8 3^6$

5. (2,0) Prove que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (*Dica: indução, é óbvio.*)

   Resposta:

   Base da indução: Vale para $n = 1$: $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$.

   Hipótese de indução: Vale para n: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   Passo da indução: Provar que vale para $n+1$: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.

   Mas: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$, usando a H.I.

   Desenvolvendo: $\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4n^3+12n^2+12n+4}{4} = \frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2(4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$. O passo está provado.

6. Considere o seguinte algoritmo para achar o menor e o maior elementos de uma lista L com $n \geq 1$ elementos:

   $MAXMIN(i, j, L)$
       se $i = j$ **então retorne** $(L[i], L[i])$
       senão
           $m := \lfloor (i+j)/2 \rfloor$
           $(a, b) := MAXMIN(i, m, L)$
           $(c, d) := MAXMIN(m+1, j, L)$
           se $a < c$ **então** $min := a$ **senão** $min := c$
           se $b < d$ **então** $max := d$ **senão** $max := b$
           retorne (min, max)

   A chamada externa é $MAXMIN(1, n, L)$.

   (a) (1,0) Seja $T(n)$ o número de comparações "<" que MAXMIN efetua para uma lista com n elementos. (Suponha que n é uma potência de 2.) Escreva equações de recorrência para $T(n)$.

   Resposta:

   $T(1) = 0$

   $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 2$

   (b) (1,0) Resolva a recorrência do item acima pelo método da "força bruta", e ache uma fórmula fechada para $T(n)$.

   Resposta:

   $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 2 = 2(2T(\frac{n}{4}) + 2) + 2 = 4T(\frac{n}{4}) + 2 + 4 = 4(2T(\frac{n}{8}) + 2) + 2 + 4 = 8T(\frac{n}{8}) + 2 + 4 + 8 = \cdots = 2^k T(\frac{n}{2^k}) + (2 + 4 + 8 + \cdots + 2^k)$ (após sucessivas substituições).

   Resolvendo a soma dos termos da P.G.:

   $T(n) = 2^k T(\frac{n}{2^k}) + 2\frac{2^k-1}{2-1} = 2^k T(\frac{n}{2^k}) + 2.2^k - 2$

   Fazendo $n = 2^k$, vem: $T(n) = n.T(1) + 2n - 2 = n.0 + 2n - 2$.

   Finalmente: $T(n) = 2n - 2$.