Gabarito da Segunda Prova – Matemática Combinatória - 2007

1. "Não existe grafo com número ímpar de vértices de grau ímpar". Verdadeiro. Pois se houvesse um tal grafo G, teríamos o seguinte. Sejam V_p, V_i os subconjuntos de vértices de G com graus pares e ímpares, respectivamente. Então:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{v \in V_p} d(v) + \sum_{v \in V_i} d(v)$$

Logo:

$$\sum_{v \in V_i} d(v) = \sum_{v \in V(G)} d(v) - \sum_{v \in V_p} d(v) = 2m - \sum_{v \in V_p} d(v)$$

Como $\sum_{v \in V_p} d(v)$ é um número par, segue que o lado direito da igualdade acima é um número par.

No entanto, assumindo que V_i tem um número ímpar de elementos, temos que o lado esquerdo da mesma igualdade é um número ímpar. Absurdo.

2. Sabemos que se um grafo admite um Passeio Euleriano Aberto então ele tem exatamente dois vértices de grau ímpar. Mas no grafo G desta questão todos os vértices são de grau par. Logo G NÃO admite Passeio Euleriano Aberto.

3. O grafo G desta questão só possui ciclos pares, portanto é bipartido, isto é, seus vértices podem ser divididos em verdes e vermelhos de modo que vizinhos tenham cores diferentes. Se G fosse Hamiltoniano, um ciclo Hamiltoniano de G seria obviamente par, e neste caso G teria um número igual de vértices verdes e vermelhos. Mas o número de vértices de G é ímpar! Logo, G NÃO é Hamiltoniano.

4. O grafo G desta questão não possui ciclos de tamanhos 3 ou 4. Logo, se for planar, toda face de G será limitada por no mínimo 5 arestas; e como cada aresta pertence a exatamente duas faces, teremos $5f \leq 2m$, onde f e m são os números de faces e arestas de G, respectivamente. Juntando esta expressão com $n + f = m + 2$ (fórmula de Euler) vem $m \leq \frac{5n-10}{3}$. Isto é, se G for planar, esta fórmula deve ser satisfeita. Mas, para este grafo G, temos $m = 15$ e $n = 10$, e portanto $15 > \frac{5.10-10}{3}$. Logo G NÃO é planar.

5. Vamos tentar colorir o grafo G desta questão com três cores a, b, c. Numere os vértices de G da seguinte forma: 1,2,3,4,5 para o ciclo externo (começando do alto e andando no sentido horário); 6,7,8,9,10 para as pontas da estrela central (novamente, começando do alto e andando no sentido horário); e 11 para o vértice central. O ciclo externo admite uma única coloração para 1,2,3,4,5, que é a, b, c, a, b (as outras são simétricas a esta.) Seguindo nossa estratégia de usar apenas 3 cores, temos que 7 obrigatoriamente tem que ser b, 8 tem que ser c, e 9 tem que ser a. Mas como 11 é vizinho de 7,8 e 9, o vértice 11 necessita uma quarta cor diferente de a, b, c. Logo G NÃO é 3-colorível.