

Primeira Lista de Exercícios de Matemática Combinatória - 2007/1

1. Quantos números inteiros de cinco algarismos distintos, e maiores do que 53.000, podem ser formados com os algarismos 0,1,2,3,4,5,6 e 7?
2. De quantos modos se pode pintar um cubo, usando seis cores fixas distintas, sendo cada face de uma cor?
3. Um baralho de 32 cartas é formado pelas cartas de valores 7, 8, 9, 10, valete, dama, rei e ás, cada valor podendo ser dos naipes copas, espadas, ouros ou paus. Retiram-se deste baralho cinco cartas (uma “mão”). Em quantas mãos aparece:
  - a) um *par*? (duas cartas de mesmo valor, e três de outros três valores distintos)
  - b) uma *trinca*? (três cartas de mesmo valor, e duas de outros dois valores distintos)
  - c) um *full-hand*? (uma trinca e um par)
  - d) uma *quadra*? (quatro cartas de mesmo valor)
  - e) um *flush*? (cinco cartas de mesmo naipe)
  - f) uma *sequência*? (cinco cartas de valores consecutivos)
  - g) um *straight-flush*? (cinco cartas de mesmo naipe, com valores consecutivos)
4. De todas as permutações das 9 letras AAABBBCCC, quantas NÃO possuem:
  - a) duas letras A juntas?
  - b) duas letras A e duas letras B juntas?
  - c) duas letras A, duas letras B e duas letras C juntas?
5. Quantas soluções inteiras possui a equação  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40$ , satisfazendo as condições:
  - a)  $x_1 > 5, x_2 > 6, x_3 > 7, x_4 > 8$ ?
  - b)  $x_1 \geq 5, x_2 \geq 6, x_3 \geq 7, x_4 \geq 8$ ?
6. Calcule, sem desenvolver, a soma dos termos de  $(2x - 3x^2y^2)^{17}$ .
7. Sendo  $k$  um número par, calcule  $\sum_{p=0}^k (-1)^p C_n^p C_n^{k-p}$ .
8. Quantos inteiros entre 1 e 1000 são divisíveis por 2, mas não por 3, 5 e 7?
9. De quantas maneiras podem se sentar em fila 3 ingleses, 3 franceses e 3 belgas, de modo que não haja três compatriotas juntos?
10. Prove por indução que
$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$
11. Prove por indução que  $2^{5n+1} + 5^{n+2}$  é divisível por 27.
12. Escreva um algoritmo recursivo que inverte a ordem dos elementos de uma lista. Escreva uma recorrência que forneça o número de trocas de elementos que o algoritmo efetua. Resolva a recorrência.
13. Escreva um algoritmo recursivo para calcular a soma dos dígitos de um inteiro positivo.
14. Resolva a recorrência:  $S(1) = 1, S(n) = nS(n-1) + n!$  para  $n > 1$ . Prove que a fórmula fechada obtida é correta utilizando indução.
15. Investe-se mil reais numa aplicação que paga 8% de juros ao ano. Ao final de cada ano, aplica-se mais 300 reais. Qual o total da aplicação no final de sete anos? Resolva este problema usando uma recorrência.