UFF - Univerdade Federal Fluminense
IC - Instituto de Computação
Prof. Fábio Protti

Lista de Métodos Numéricos

1. Considere uma máquina com sistema de representação de números definido por: base 3 ($\beta = 3$), 2 dígitos na mantissa ($t = 2$) e expoente no intervalo: $[-1; 2]$. Pede-se:

   a) O menor número representável neste sistema.
   b) O maior número representável neste sistema.

2. Um computador recebe números somente com três dígitos significativos. Determine o erro absoluto e relativo para os seguintes números: a) Π; b)1/3. Qual deles tem maior precisão?

3. Com relação à equação $f(x) = x^2 + lnx$, resolva os itens a seguir.

   a) Verifique que $f(x)$ possui uma única raiz no intervalo $(0,5; 1,0)$.
   b) Calcule, pelo método da bisseção, a raiz de $f(x)$ no intervalo dado com $E_a \leq 0,01$, considerando 3 casas decimais com arredondamento.

4. Com relação à equação $f(x) = e^{-x} - x$, resolva os itens a seguir.

   a) Verifique que $f(x)$ possui exatamente uma raiz no intervalo $(0, 1)$.
   b) Quantas iterações devemos utilizar no método da bissecção para que o resultado encontrado difira no máximo $E_a = 10^{-4}$ do valor exato da raiz?
   c) Encontre uma equação $x = g(x)$ e rode três iterações do método de ponto fixo correspondente, usando $x_0 = 0.5$.

5. Considere o problema de encontrar a raiz cúbica de um número.

   a) Encontre a raiz cúbica de 8 através do método de Newton. Utilize $x_0 = 2.3$. Rode três iterações e use 3 casas decimais com arredondamento.
   b) Se no método do ponto fixo utilizássemos a função de iteração $x_{i+1} = 8/(x_i)^2$ e $x_0 = 1.5$, poderíamos garantir a convergência do método? Justifique a sua resposta.

6. Considere o sistema linear:

$$S = \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

   a) Resolva o sistema pelo método da eliminação de Gauss, utilizando pivoteamento quando necessário.

b) Resolva o sistema pelo método de Gauss-Jordan.
c) Verifique se o critério das linhas (para convergência) é satifeito.
d) Resolva o sistema pelo método de Jacobi com $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ e $\varepsilon_a = 5\%$. (Use três casas decimais com arredondamento.)
e) Resolva o sistema pelo método de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ e $E_a = 5\text{x}10^{-2}$. (Use três casas decimais com arredondamento.)
f) Calcule o erro relativo verdadeiro da solução encontrada no item anterior.
g) Supondo que você já solucionou os itens anteriores, que método você escolheria para resolver o sistema abaixo? (Justifique)

$$S = \begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -1 \end{cases}$$

7. Resolva o sistema linear abaixo pelo método de Gauss-Seidel, usando 4 casas decimais com arredondamento, com $x^{(0)} = (0,0,0,0)^T$ e $E_a = 5\text{x}10^{-2}$.

$$S = \begin{cases} 20x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 33 \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 38,4 \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 + x_4 = 43,5 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 20x_4 = 45,6 \end{cases}$$

8. A tabela abaixo serve para todos os itens a seguir.

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1/2$	$x_2 = 1$	$x_3 = 3/2$	$x_4 = 2$
$f(x_i)$	1	-1	0	-1	1

(a) Encontre o polinômio de grau no máximo 2 que interpola os pontos $\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ utilizando a resolução de um sistema linear.
(b) Encontre o polinômio de grau no máximo 2 que interpola os pontos $\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ utilizando a forma de Lagrange.
(c) É obrigatório que as respostas dos dois itens acima sejam idênticas? Por que?
(d) Monte a tabela de diferenças divididas de $f(x)$ sobre os pontos $\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}$. Use o formato abaixo:

	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
x_0					
x_1					
x_2					
x_3					
x_4					

(e) Escreva a fórmula do polinômio interpolador para os pontos $\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}$ segundo a forma de Newton.

(f) Dê uma estimativa para o erro cometido ao se obter $f(1.25)$ usando o polinômio do item anterior.

(g) Faça a aplicação múltipla da Regra do Trapézio para obter uma valor aproximado de $\int_0^2 f(x)dx$.

(h) Faça a aplicação múltipla da Regra de Simpson para obter uma valor aproximado de $\int_0^2 f(x)dx$.

(i) Quantos subintervalos devemos utilizar na Regra de Simpson para que o erro aproximado da integral do item anterior seja no máximo 10^{-5}? Assuma que f é um polinômio de quarto grau.

9. Considere os dados a seguir.

x	1.6	2	2.5	3.2	4	4.5
$f(x)$	2	8	14	15	8	2

(a) Calcule $f(2.8)$ usando polinômios interpoladores de Newton de primeiro a terceiro graus. Escolha a sequência de pontos para fazer sua estimativa de modo a atingir a melhor acurácia possível.

(b) Faça uma estimativa do erro em cada um dos cálculos do item anterior.

10. Calcule a seguinte integral:

$$\int_0^4 (1 - e^{-2x})dx$$

(a) Analiticamente.

(b) Por uma única aplicação da regra do trapézio.

(c) Por aplicação múltipla da regra do trapézio, com $n = 4$.

(d) Por uma única aplicação da regra de Simpson.

(e) Por aplicação múltipla da regra de Simpson, com $n = 4$.

(f) Para cada um dos itens anteriores, determine uma estimativa do erro cometido.

11. Considere os pontos $0, 1, 2, 3, 4$ e a função $f(x) = \frac{60}{x+1}$.

(a) Calcule uma aproximação para o valor de $f(2.5)$ utilizando um polinômio interpolador sobre os pontos $1, 2, 3$. Use a forma de Lagrange. Calcule o erro absoluto verdadeiro cometido.

(b) Calcule uma aproximação para o valor de $f(2.5)$ utilizando um polinômio interpolador de grau 3, a partir do ponto $x_0 = 0$. Use a forma de Newton. Calcule o erro absoluto verdadeiro cometido. Calcule o erro absoluto aproximado $R_3(x)$ para $x = 2.5$.

(c) Calcule uma aproximação para $\int_0^4 f(x)d(x)$ por uma aplicação múltipla da regra do trapézio. Use $n = 4$. Calcule o erro absoluto verdadeiro cometido.

(d) Calcule uma aproximação para $\int_0^4 f(x)d(x)$ por uma aplicação múltipla da regra de Simpson. Use $n = 4$. Calcule quantos subintervalos do intervalo $[0, 4]$ devem ser utilizados para que o módulo do erro absoluto aproximado E_a, resultante de uma aplicação múltipla da regra de Simpson, seja inferior a 0.01.