LISTA DE EXERCÍCIOS - ALGORITMOS E GRAFOS

1) Os blocos de um grafo definem uma partição do conjunto de vértices do grafo. Falso ou verdadeiro?

2) As componentes fortemente conexas de um digrafo definem uma partição do conjunto de arestas do digrafo. Falso ou verdadeiro?

3) Considere uma busca em profundidade. Considere os parâmetros *PE*, *PS*, que controlam as ordens de entrada e saída dos vértices da pilha. Para quaisquer dois vértices v, w, sempre temos: se $PE(v) < PE(w)$, então $PS(v) > PS(w)$. Falso ou verdadeiro?

4) Considere uma busca em profundidade em um digrafo. Considere a partição do conjunto das arestas direcionadas em: árvore, retorno, avanço e cruzamento. Se a busca em profundidade tem alguma aresta de cruzamento, então qualquer busca em profundidade para este digrafo também tem alguma aresta de cruzamento. Falso ou verdadeiro?

5) Considere o algoritmo discutido em aula para encontrar os blocos em um grafo, usando busca em profundidade. Os vértices demarcadores marcam vértices articulação, logo o número de demarcadores é igual ao número de articulações. Falso ou verdadeiro?

6) Considere o algoritmo discutido em aula para encontrar as componentes fortemente conexas em um digrafo, usando busca em profundidade. Definimos ao longo do algoritmo, para cada vértice do digrafo, além dos parâmetros *PE*, *PS*, o parâmetro auxiliar *old*. Todos os vértices numa mesma componente fortemente conexa tem o mesmo valor do parâmetro *old*. Falso ou verdadeiro?

7) Toda árvore geradora de um grafo é uma árvore de profundidade para este grafo. Falso ou verdadeiro?

8) Toda árvore geradora em um grafo é uma árvore de largura para este grafo. Falso ou verdadeiro?

9) Numa busca em largura em um grafo, considerando a árvore de largura associada e os níveis dos vértices em relação a esta árvore, sempre temos $|\, nível(v) - nível(w) \,| \leq 1$, para toda aresta (v, w). Falso ou verdadeiro?

10) Um grafo G é uma árvore se e somente se uma busca em profundidade efetuada em G não produz arestas de retorno. Falso ou verdadeiro?

11) Seja G um grafo não direcionado e v uma articulação de G. O número de blocos de G que contêm v é igual ao número de filhos de v em uma árvore de profundidade de G. Falso ou verdadeiro?

12) G é um grafo sem arestas se e somente se $PE(v) < PE(w)$ implica $PS(v) < PS(w)$, para qualquer par v,w de vértices de G e para qualquer busca em profundidade. Falso ou verdadeiro?

13) O número de blocos de um grafo G é igual ao número de demarcadores obtidos a partir de uma busca em profundidade arbitrária. Falso ou verdadeiro?

14) É feita uma busca em profundidade em um digrafo D. Seja (v,w) uma aresta de $E(D)$. Então vale: (v,w) é uma aresta de avanço se e somente se $PE(v) < PE(w) - 1$. Falso ou verdadeiro?

15) Um digrafo D é acíclico se e somente se existe uma busca de profundidade em D sem arestas de retorno. Falso ou verdadeiro?

16) Seja $D(V,E)$ um digrafo e (v,w) uma aresta de E tal que: (a) v,w pertencem a componentes fortemente conexas distintos de D; (b) $PE(w) < PE(v)$ em uma busca em profundidade efetuada em D. Então, no algoritmo de busca em profundidade, w não pertence à pilha Q no momento da visita à aresta (v,w). Falso ou verdadeiro?

17) As arestas de todo grafo não direcionado G sempre podem ser orientadas de tal forma que o digrafo resultante seja acíclico. Falso ou verdadeiro?

18) Um grafo G é bipartido se e somente se uma busca em largura em G não produzir arestas primo nem irmão. Falso ou verdadeiro?

19) Quais são os grafos com pesos nas arestas para os quais todas as árvores geradoras máximas são isomorfas entre si?

20) Quais são os grafos com pesos nas arestas para os quais todas as árvores geradoras máximas são diferentes entre si?

21) Dê exemplo de um grafo G para o qual o número cromático de $\alpha_{v,w}(G)$ é menor do que o número cromático de $\beta_{v,w}(G)$, sendo v,w um par de vértices não adjacentes de G.

22) Escreva um algoritmo que, dada uma árvore binária, calcula o número de descendentes de cada nó da árvore.

23) Modifique o algoritmo de Dijkstra de forma a explicitar, para cada vértice v, o caminho de custo mínimo construído do vértice a (raiz do algoritmo) até v.

24) Mostre que, quando o grafo de entrada G é conexo, a união dos caminhos obtidos no exercício anterior forma uma árvore geradora de G. Pergunta: esta árvore geradora tem custo mínimo?

25) Dê exemplo de um grafo G para o qual o algoritmo guloso de coloração aproximada usa $2 \cdot \chi(G)$ cores ou mais.

26) O algoritmo de coloração exato exaustivo produz uma árvore binária T cujas folhas são grafos completos K_p, tais que existe pelo menos uma folha em T para cada valor de p entre $\chi(G)$ e $|V(G)|$. Falso ou verdadeiro?

27) Seja G um grafo. Um **emparelhamento** M em G é um subconjunto de arestas de G com a seguinte propriedade: quaisquer duas arestas distintas em M não possuem vértice em comum. Um emparelhamento M em G é dito **máximo** quando não existe emparelhamento M' em G tal que $| M' | > | M |$. Dado um grafo bipartido G, mostre como obter um emparelhamento máximo em G convertendo este problema num problema de fluxo máximo.

28) Um digrafo admite ordenação topológica se e somente se for acíclico. Falso ou verdadeiro?

29) Seja $D(V,E)$ um digrafo que contém exatamente um ciclo C. Seja $V' \subseteq V$ o subconjunto dos vértices de D alcançáveis de algum vértice de C. Se D for fornecido como entrada para o algoritmo de ordenação topológica visto em aula, qual será a saída correspondente?

30) Formule o problema de fluxo máximo em uma rede como um problema de programação linear.

31) Execute o algoritmo de Floyd-Warshall sobre o digrafo cuja matriz inicial W é dada a seguir. Exiba todas as matrizes intermediárias.

0	3	8	∞
∞	0	∞	1
∞	4	0	∞
2	∞	5	0

32) Ainda com relação ao exercício anterior, explique como construir os caminhos mais curtos através das matrizes predecessoras. Exiba as matrizes predecessoras em cada iteração, e no final liste os caminhos mais curtos entre cada par de vértices.

33) O algoritmo de Floyd-Warshall, tal como definido, ocupa espaço $\theta(n^3)$. Explique como modificá-lo de modo que ele ocupe espaço $\theta(n^2)$.

34) Decida a planaridade do grafo de Petersen através do algoritmo visto em sala.

35) Mostre que se G é um grafo com pelo menos 11 vértices, então ou G ou o seu complemento é um grafo não-planar. É possível um exemplo em que ambos não são planares?

36) Encontre três grafos planares tais que sua união é o grafo completo com 10 vértices.

37) Dado um digrafo com pesos positivos nas arestas, considere o seguinte algoritmo guloso para encontrar uma *tour* mínima: iniciando no vértice 1, atravesse uma aresta de

custo mínimo ao próximo vértice, e repita o processo até alcançar um vértice já visitado ou não ser possível progredir mais. (Observe que esta heurística não é igual à heurística "NN" para o Problema do Caixeiro Viajante.) Suponha que este algoritmo guloso conseguiu encontrar uma *tour*. Pergunta-se: esta *tour* é mínima?

38) Ainda com relação ao algoritmo guloso do exercício anterior: suponha que os pesos são todos distintos, e que o algoritmo conseguiu encontrar uma *tour*. Pergunta-se: esta *tour* é única?

39) Seja T uma árvore binária cheia enraizada com n nós. Calcule o número de ordenações topológicas distintas dos vértices de T.

40) Seja D uma rede e $(S, V - S)$ um corte mínimo de D. Dê um contra-exemplo para a seguinte afirmativa: Para todo fluxo maximal e não máximo existe aresta e orientada de $V - S$ para S com $f(e) > 0$.

41) Um algoritmo de fluxo máximo tem necessariamente que examinar toda aresta da rede. Verdadeiro ou Falso? Por que?

42) Seja D um digrafo acíclico com raiz v (isto é, v alcança todos os vértices de D.) Colocando os vértices de D em ordem inversa de suas profundidades de saída numa busca a partir de v, obtemos uma ordenação topológica para D. Verdadeiro ou Falso?

43) Considere a rede $D=(V, E)$ com $V=\{s, v\_1, v\_2, v\_3, v\_4, t\}$ e as seguinte capacidades:

$c(s, v\_1) = 4$, $c(s, v\_2) = 4$, $c(s, v\_3) = 3$, $c(v\_1, v\_3) = 5$, $c(v\_3, v\_2) = 2$, $c(v\_2, v\_3) = 3$, $c(v\_4, v\_1) = 4$, $c(v\_3, v\_4) = 4$, $c(v\_2, t) = 3$, $c(v\_4, t) = 6$.

Determine um fluxo maximal mas não máximo em D. Determine um fluxo máximo em D. Determine um corte mínimo em D.

44) Seja G um grafo bipartido com $V(G)=\{a, b, c, d, e, f\} \cup \{ u, v, w, x, y, z, t\}$ e $E(G)=\{au, av, bu, bv, cu, cw, cz, du, dv, dy, ew, ex, et, fv, fw, fz, \}$.

Execute o método húngaro sobre este grafo bipartido, mostrando os passos da execução.