

## **Tabu Search**

Fred Glover (1), Belén Melián (2)

(1) Leeds School of Business  
University of Colorado  
Boulder, CO 80309-0419, USA

(2) Departamento de Estadística, I.O. y Computación  
Centro Superior de Informática  
Universidad de La Laguna  
Avda. Astrofísico Francisco Sánchez s/n 38271 Santa Cruz de Tenerife, Spain

e-mail: fred.glover@colorado.edu, mbmelian@ull.es

The Tabu Search (TS) is a metaheuristic approach whose distinguishing feature is its use of adaptive memory and special associated problem-solving strategies. The philosophy of tabu search is to derive and exploit a collection of intelligent problem solving strategies, based on implicit and explicit learning procedures to exploit an adaptive memory framework. From the standpoint of tabu search, adaptive memory embodies the dual functions of creating and exploiting structures for taking advantage of the history of the problem-solving process. The memory structures of tabu search operate by reference to four principal dimensions, consisting of recency, frequency, quality, and influence.

# Búsqueda Tabú

Fred Glover  
Leeds School of Business  
University of Colorado at Boulder  
U.S.A.  
Fred.Glover@Colorado.edu

Belén Melián \*  
DEIOC  
Universidad de La Laguna  
ESPAÑA  
mbmelian@ull.es

## Resumen

La Búsqueda Tabú (*Tabu Search* - TS) es un procedimiento metaheurístico cuya característica distintiva es el uso de memoria adaptativa y de estrategias especiales de resolución de problemas. Su filosofía se basa en la explotación de diversas estrategias inteligentes para la resolución de problemas, basadas en procedimientos de aprendizaje. El marco de memoria adaptativa de TS explota la historia del proceso de resolución del problema haciendo referencia a cuatro dimensiones principales, consistentes en la propiedad de ser reciente, en frecuencia, en calidad, y en influencia.

## 1. Introducción

La Búsqueda Tabú (*Tabu Search* - TS) tiene sus antecedentes en métodos diseñados para cruzar cotas de factibilidad u optimalidad local tratadas como barreras en procedimientos clásicos, e imponer y eliminar cotas sistemáticamente para permitir la exploración de regiones no consideradas en otro caso [4]. El nombre y la terminología de búsqueda tabú vienen de [5]. Una característica distintiva de este procedimiento es el uso de memoria adaptativa y de estrategias especiales de resolución de problemas. TS es el origen del enfoque basado en memoria y estrategia intensiva en la literatura de las metaheurísticas, en contraposición con los métodos que no tienen memoria o que sólo usan una débil memoria basada en herencia. TS es también responsable de enfatizar el uso de los diseños estructurados para explotar los patrones históricos de la búsqueda, de forma opuesta a los procesos que confían casi exclusivamente en la aleatorización.

Los principios fundamentales de la búsqueda

tabú fueron elaborados en una serie de artículos a finales de los años 80 y principios de los 90, y han sido unificados en el libro “Tabu Search” [8]. El destacable éxito de la búsqueda tabú para resolver problemas de optimización duros (especialmente aquellos que surgen en aplicaciones del mundo real) ha causado una explosión de nuevas aplicaciones TS durante los últimos años.

La filosofía de la búsqueda tabú es derivar y explotar una colección de estrategias inteligentes para la resolución de problemas, basadas en procedimientos implícitos y explícitos de aprendizaje. El marco de memoria adaptativa de TS no sólo explota la historia del proceso de resolución del problema, sino que también exige la creación de estructuras para hacer posible tal explotación. La historia de resolución del problema se extiende a la experiencia ganada tras resolver múltiples instancias de una clase de problema uniéndolo TS con un enfoque de aprendizaje asociado llamado *Análisis de Objetivo* (*Target Analysis*) (ver capítulo 9 en [8]).

Las estructuras de memoria de la búsqueda tabú funcionan mediante referencia a cua-

---

\*Proyecto

tro dimensiones principales, consistentes en la propiedad de ser reciente, en frecuencia, en calidad, y en influencia. Estas dimensiones se fijan contra unos antecedentes de conectividad y estructuras lógicas. El papel de estos elementos al crear procesos eficaces de resolución de problemas se discuten en nuestro siguiente desarrollo.

## 2. La estructura de la Búsqueda Tabú

Para aportar bases para la comprensión de algunos de los elementos fundamentales de la búsqueda tabú, ilustramos sus operaciones básicas con un ejemplo extraído de [6].

### 2.1. Un ejemplo ilustrativo

Los problemas de permutaciones son una clase importante de problemas en optimización, y ofrecen un modo muy útil para demostrar algunas de las consideraciones que deben ser tratadas en el dominio combinatorio. Las instancias clásicas de problemas de permutaciones incluyen los problemas del viajante de comercio, asignación cuadrática, secuenciación de la producción, y una variedad de problemas de diseño. Como base para la ilustración, consideremos el problema de diseño de un material formado por un número de capas aislantes. El orden según el cual se planifican estas capas determina el valor de aislamiento total del material resultante, como se muestra en la Figura 1.

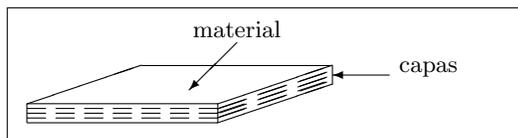


Figura 1: Capas de un material aislante

El problema consiste en encontrar el orden de las capas que maximiza el valor de aislamiento total del material compuesto. Supongamos que se consideran 7 capas para un material particular, y que evaluar el valor de aislamiento total de una ordenación particular es un procedimiento computacionalmente costoso. De-

seamos un método capaz de encontrar una solución óptima o cercana a la óptima explorando sólo un pequeño subconjunto de todas las permutaciones posibles.

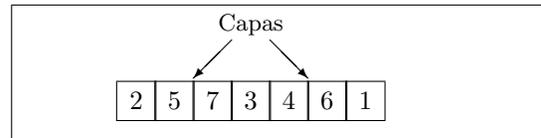


Figura 2: Permutación inicial

Nos centramos en el problema de aislamiento para introducir e ilustrar los componentes básicos de la búsqueda tabú. Primero asumimos que puede construirse una solución inicial para este problema de alguna manera inteligente, es decir, sacando ventaja de la estructura específica del problema. Supongamos que la solución inicial de nuestro problema es la que aparece en la Figura 2.

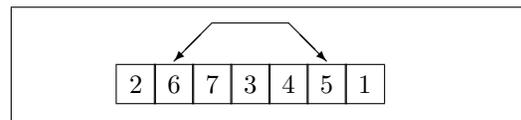


Figura 3: Intercambio de las capas 5 y 6

La ordenación en la Figura 2 especifica que la capa 2 se sitúa en la primera posición, seguida por la capa 5, etc. El material resultante tiene un valor de aislamiento de 10 unidades. Los métodos TS operan bajo el supuesto de que se puede construir un entorno para identificar “soluciones adyacentes” que puedan ser alcanzadas desde la solución actual. Los intercambios por pares son frecuentemente usados para definir entornos en problemas de permutaciones, identificando movimientos que conducen una solución a la siguiente. En nuestro problema, un intercambio cambia la posición de dos capas como se ilustra en la Figura 3. Por tanto, el entorno completo de una solución está constituido por 21 soluciones adyacentes que pueden ser obtenidas a partir de estos intercambios.

Asociado a cada intercambio hay un valor de movimiento, que representa el cambio sobre un valor de la función objetivo como resultado del intercambio propuesto. Los valores de los movimientos generalmente proporcionan una base fundamental para evaluar la calidad de los mismos, aunque también pueden

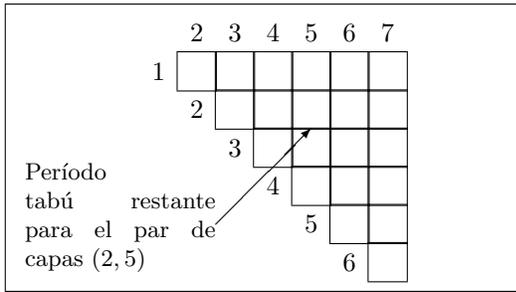


Figura 4: Estructura de Datos Tabú

ser importantes otros criterios. Un mecanismo principal para explotar la memoria en la búsqueda tabú es clasificar un subconjunto de movimientos en un entorno como prohibidos (o tabú). La clasificación depende de la historia de la búsqueda, determinada mediante lo reciente o frecuente que ciertos movimientos o componentes de soluciones, llamados *atributos*, han participado en la generación de soluciones pasadas. Por ejemplo, un atributo de un movimiento es la identidad del par de elementos que cambian posiciones (en este caso, las dos capas intercambiadas). Como base para evitar la búsqueda desde combinaciones de intercambio repetidas usadas en el pasado reciente, invirtiendo potencialmente los efectos de movimientos anteriores por intercambios que podrían devolver a posiciones previas, clasificaremos como tabú todos los intercambios compuestos por cualquiera de los pares de capas más recientes; en este caso, para propósitos ilustrativos, las tres más recientes. Esto significa que un par de capas será tabú por una duración (período) de 3 iteraciones. Dado que intercambiar las capas 2 y 5 es lo mismo que intercambiar las capas 5 y 2, ambos pueden ser representados por el par (2,5). Por lo tanto, se puede usar una estructura de datos como la usada en la Figura 4.

Cada celda de la estructura de la Figura 4 contiene el número de iteraciones restantes hasta que las capas correspondientes puedan nuevamente intercambiar posiciones. Por tanto, si la celda (3,5) tiene un valor de cero, entonces las capas 3 y 5 son libres para intercambiar posiciones. Por otro lado, si la celda (2,4) tiene un valor de 2, entonces las capas 2 y 4 no pueden intercambiar posiciones durante las dos iteraciones siguientes (es decir, un intercambio que cambia estas capas es clasificado como tabú).

Para implementar restricciones tabú, debe tenerse en cuenta una excepción importante: las restricciones tabú no son inviolables bajo todas las circunstancias. Cuando un movimiento tabú resultara en una solución mejor que cualquiera visitada hasta ahora, su clasificación tabú puede ser reemplazada. Una condición que permite que ocurra tal reemplazo se llama *criterio de aspiración*. A continuación se muestran 4 iteraciones del procedimiento de búsqueda tabú básico, que usa la restricción tabú de capas emparejadas y el criterio de aspiración de la mejor solución.

Solución actual	Estructura tabú	Primeros 5 candidatos
2	2 3 4 5 6 7	Valor de intercambio
5	1 <input type="checkbox"/>	5,4 6 *
7	2 <input type="checkbox"/>	7,4 4
3	3 <input type="checkbox"/>	3,6 2
4	4 <input type="checkbox"/>	2,3 0
6	Valor de aislamiento = 10	4,1 -1
1	5 <input type="checkbox"/>	
	6 <input type="checkbox"/>	

Figura 5: Iteración 0

La solución de partida de la Figura 5 tiene un valor de aislamiento de 10, y la estructura de los datos tabú está inicialmente vacía, es decir, está llena de ceros, indicando que ningún movimiento está clasificado como tabú al comienzo de la búsqueda. Después de evaluar los movimientos de intercambio candidatos, se muestran en la tabla para la iteración 0 los cinco primeros movimientos (en términos de valores de movimiento). Para maximizar localmente el valor de aislamiento del material, intercambiamos las posiciones de las capas 5 y 4, como se indica a través del asterisco en la Figura 5. El aumento total de este movimiento es igual a 6 unidades.

La nueva solución actual tiene un valor de aislamiento de 16 (es decir, el valor de aislamiento anterior más el valor del movimiento seleccionado). La estructura tabú de la Figura 6 ahora muestra que el intercambio de las posiciones de las capas 4 y 5 se prohíbe durante 3 iteraciones. El movimiento que proporciona la mayor mejora en este paso es el intercambio de las capas 3 y 1 con una ganancia de 3.

Solución tabú	Estructura tabú	Primeros 5 candidatos
2	2 3 4 5 6 7	Valor de intercambio
4	1	3, 1   2 *
7	2	2, 3   1
3	3	3, 6   -1
5	4	7, 1   -2
6	5	6, 1   -4
1	6	
	Valor de aislamiento = 16	

Figura 6: Iteración 1

Solución actual	Estructura tabú	Primeros 5 candidatos
4	2 3 4 5 6 7	Valor del intercambio
2	1	4, 5   6 T*
7	2	5, 3   2
1	3	7, 1   0
5	4	1, 3   -3 T
6	5	2, 6   -6
3	6	
	Valor de aislamiento = 14	

Figura 8: Iteración 3

Solución actual	Estructura tabú	Primeros 5 candidatos
2	2 3 4 5 6 7	Valor del intercambio
4	1	1, 3   -2 T
7	2	2, 4   -4 *
1	3	7, 6   -6
5	4	4, 5   -7 T
6	5	5, 3   -9
3	6	
	Valor de aislamiento = 18	

Figura 7: Iteración 2

La nueva solución actual se convierte en la mejor solución encontrada hasta ahora con un valor de aislamiento de 18. En esta iteración se clasifican como tabú dos intercambios como se indica mediante las entradas distintas de cero en la estructura tabú de la Figura 7.

Note que la entrada (4,5) ha disminuido de 3 a 2, indicando que su período tabú original de 3 ahora tiene 2 iteraciones restantes. En este momento ninguno de los candidatos tiene un valor de movimiento positivo. Por lo tanto, se realiza un movimiento de no mejora. El movimiento de no mejora más atractivo es el inverso del movimiento ejecutado en la iteración anterior, pero dado que está clasificado como tabú, este movimiento no se selecciona. Entonces se elige el intercambio de las capas 2 y 4, como se indica en la Figura 7.

La nueva solución actual (Figura 8) tiene un valor de aislamiento inferior a los dos valores obtenidos previamente, como resultado de ejecutar un movimiento con un valor de movimiento negativo. La estructura de datos tabú (en

la Figura 8) ahora indica que 3 movimientos están clasificados tabú, con diferentes períodos tabú restantes. En la parte superior de la lista de candidatos encontramos el intercambio de las capas 4 y 5, el cual, en efecto, representa el inverso del primer movimiento ejecutado, y se clasifica como tabú. Sin embargo, la ejecución de este movimiento produce una solución con un valor de función objetivo que es superior a cualquier valor de aislamiento previo. Por lo tanto, hacemos uso del criterio de aspiración para invalidar la clasificación tabú de este movimiento y seleccionarlo como mejor en esta iteración.

Solución actual	Estructura tabú	Primeros 5 candidatos
5	2 3 4 5 6 7	Valor del intercambio
2	1	7, 1   0 *
7	2	4, 3   -3
1	3	6, 3   -5
4	4	5, 4   -6
6	5	2, 6   -8
3	6	
	Valor de aislamiento = 20	

Figura 9: Iteración 4

La solución actual se convierte en la mejor solución y el proceso continúa. Note que la elección de la restricción tabú y el período tabú de 3 resulta en prohibir sólo 3 de 21 intercambios posibles, dado que el par de capas con un período residual de 1 siempre cae a un período residual de 0 cada vez que se introduce un nuevo par con período 3. (Almacenando la iteración cuando un par de capas se convierte en tabú, y comparando esto con la iteración actual para

determinar el período tabú restante, no es necesario cambiar estas entradas en cada paso como hacemos aquí).

En algunas situaciones, puede ser deseable incrementar el porcentaje de movimientos disponibles que reciben una clasificación tabú. Además, a pesar del tipo de restricción seleccionado, a menudo se obtienen mejores resultados por los plazos tabú que varían dinámicamente, como se describe en la sección 2.5.

*Estructuras de Memoria Tabú Complementarias.* El complemento de “memoria basada en lo reciente” a la “memoria basada en frecuencia” añade una componente que típicamente opera sobre un horizonte más largo. Para ilustrar una de las aplicaciones útiles de largo período de memoria basada en frecuencia, suponemos que han sido ejecutadas 25 iteraciones TS, y que el número de veces que cada par de capas ha sido intercambiado se guarda en una estructura de datos tabú expandida (Figura 10). La diagonal inferior de esta estructura ahora contiene los contadores de frecuencia.

Solución actual	Estructura tabú (Reciente)							Primeros 5 candidatos			
	1	2	3	4	5	6	7	Valor			
1								1, 4	3	3	T
3	1			3				2, 4	-1	-6	
6	2							3, 7	-3	-3	*
2	3	3				2		1, 6	-5	-5	
7	4	1	5				1	6, 5	-4	-6	
5	5		4		4						
4	6			1		2					
7	7	2			3						

Valor Penalizado

Valor de aislamiento = 12 (Frecuente)

Figura 10: Iteración 26

En la iteración actual (iteración 26), la memoria basada en lo reciente indica que los últimos tres pares de capas intercambiados fueron (4, 1), (6, 3), y (4, 7). Los contadores de frecuencia muestran la distribución de movimientos a través de las 25 primeras iteraciones. Usamos estos contadores para diversificar la búsqueda, conduciéndola a nuevas regiones. Esta influencia de diversificación se restringe a operar sólo sobre ocasiones particulares. En este

caso, seleccionamos aquellas ocasiones donde no existen movimientos de mejora admisibles. Nuestro uso de información de frecuencia penalizará movimientos de no mejora mediante la asignación de una penalización mayor a intercambios de pares de capas con mayores contadores de frecuencia. (Típicamente, estos contadores serían normalizados, por ejemplo mediante la división por el número total de iteraciones o su máximo valor). Esto se ilustra en el ejemplo presente simplemente restando un valor de frecuencia del valor del movimiento asociado.

La lista de candidatos superiores para la iteración 26 muestra que el movimiento de máxima mejora es el intercambio (1, 4), pero dado que este par tiene un período tabú residual, es clasificado tabú. El movimiento (2, 4) tiene un valor de -1, y pudiera ser en otro caso el siguiente preferido, excepto si sus capas asociadas hayan sido intercambiadas frecuentemente durante la historia de la búsqueda (de hecho, más frecuentemente que cualquier otro par de capas). Por lo tanto, el movimiento es penalizado fuertemente y pierde su atractivo. El intercambio de las capas 3 y 7 es, por tanto, seleccionado como el mejor movimiento en la iteración actual.

La estrategia de imponer penalizaciones sólo bajo condiciones particulares se usa para preservar la agresividad de la búsqueda. Las funciones de penalización en general se diseñan para justificar no sólo frecuencias sino también valores de movimientos y ciertas medidas de influencia.

Además, las frecuencias definidas sobre diferentes subconjuntos de soluciones anteriores, particularmente subconjuntos de soluciones elite formados por óptimos locales de alta calidad, dan lugar a estrategias complementarias llamadas estrategias de intensificación. Las estrategias de intensificación y diversificación interactúan para proporcionar puntos de apoyo fundamentales de memoria de largo período en búsqueda tabú. El modo en el que tales elementos son capaces de crear métodos realzados de la búsqueda, extendiendo el enfoque simplificado del ejemplo precedente, se elabora en las siguientes secciones.

## 2.2. Búsqueda por entorno

TS puede ser convenientemente caracterizado mediante referencia a la búsqueda en el entorno, aunque incidimos en que la búsqueda en el entorno tiene un significado más amplio en TS que en algunas otras partes de la literatura de las metaheurísticas. Por ejemplo, TS incluye procedimientos constructivos y destructivos entre los procesos que dirige por memoria adaptativa, mientras que tales procedimientos y sus combinaciones son a menudo excluidos de la definición de búsqueda en el entorno en otros enfoques.

Una representación conveniente de búsqueda en el entorno identifica, para cada solución  $x \in X$ , un conjunto asociado de vecinos,  $N(x) \subset X$ , llamado entorno de  $x$ . En búsqueda tabú, los entornos normalmente se asumen simétricos, es decir,  $x'$  es un vecino de  $x$  si y sólo si  $x$  es un vecino de  $x'$ . Los pasos en la búsqueda en el entorno se muestran en la Figura 11.

---

### Método de Búsqueda en el Entorno:

#### Paso 1 (Inicialización).

- (A) Seleccionar una solución de arranque  $x_{Actual} \in X$ .
- (B) Almacenar la mejor solución actual conocida haciendo  $x_{Mejor} = x_{Actual}$  y definiendo  $MejorCoste = c(x_{Mejor})$ .

#### Paso 2 (Elección y finalización).

Elegir una solución  $x_{Siguiente} \in N(x_{Actual})$ . Si los criterios de elección empleados no pueden ser satisfechos por ningún miembro de  $N(x_{Actual})$ , o si se aplican otros criterios de parada, entonces el método para.

#### Paso 3 (Actualización).

Rehacer  $x_{Actual} = x_{Siguiente}$ , y si  $c(x_{Actual}) < MejorCoste$ , ejecutar el paso 1(B). Volver al paso 2.

---

Figura 11: Método de Búsqueda en el Entorno.

El método de la Figura 11 puede representar un método constructivo mediante la estipulación de que  $X$  se expande para incluir vectores  $x$  cuyas componentes toman valores nulos

(no asignados), y mediante la estipulación de que un vecino  $x'$  de  $x$  puede ser obtenido reemplazando una componente nula de  $x$  con una componente no nula. Un método constructivo típico no proporciona entornos simétricos, dado que no se permite que las componentes nulas se conviertan otra vez en nulas (por tanto, el método termina cuando no hay más componentes nulas). Sin embargo, la búsqueda tabú reinstala la relación simétrica permitiendo que coexistan movimientos constructivos y destructivos, como un ejemplo especial del enfoque llamado oscilación estratégica (ver sección 3).

El método de búsqueda en el entorno puede ser alterado fácilmente añadiendo provisiones especiales para generar una variedad de procedimientos clásicos. Citamos los Métodos Descendentes y los Métodos de Monte Carlo. Los métodos descendentes sólo permiten movimientos a soluciones vecinas que mejoran el valor actual, y finalizan cuando no pueden ser encontradas soluciones mejores. El  $x_{Actual}$  final obtenido por un método descendente se llama óptimo local, dado que es al menos tan bueno o mejor que todas las soluciones de su entorno. La deficiencia evidente de un método descendente es que tal óptimo local en la mayoría de los casos no será un óptimo global, es decir, usualmente no minimizará  $c(x)$  sobre todo  $x \in X$ . Algunos procedimientos aleatorios tales como los métodos de Monte Carlo, los cuales incluyen recocido simulado, se pueden representar análogamente añadiendo una simple provisión al paso 2. Los métodos de Monte Carlo continúan muestreando el espacio de búsqueda hasta terminar finalmente mediante alguna forma de limitación de iteración. Normalmente usan una función exponencial para definir probabilidades, inferida de la práctica establecida en ingeniería y ciencia física.

Otro enfoque aleatorio para superar la limitación de los métodos descendentes es simplemente comenzar el método con diferentes soluciones iniciales seleccionadas aleatoriamente, y ejecutar el método múltiples veces. Este enfoque de multiarranque aleatorio puede ser contrastado con un enfoque de perturbación aleatoria, que simplemente elige movimientos aleatoriamente después de alcanzar cada óptimo local, y luego reasume una trayectoria descendente.

## 2.3. Características de la Búsqueda Tabú

La búsqueda tabú, en contraste con los métodos precedentes, emplea una filosofía diferente para ir más allá del criterio de finalizar en un óptimo local. Se reduce énfasis a la aleatorización, y generalmente se usa en un modo altamente restringido, con el supuesto de que la búsqueda inteligente debería estar basada en formas más sistemáticas de dirección. Por consiguiente, muchas implementaciones de búsqueda tabú son en gran parte deterministas. Una excepción ocurre con la variante llamada búsqueda tabú determinística, la cual selecciona movimientos según probabilidades basadas en el estado y en las evaluaciones asignadas a estos movimientos por los principios básicos de la búsqueda tabú.

### 2.3.1. Usos de Memoria TS especiales: Modificaciones de Estructuras de Entorno

La idea de explotar ciertas formas de memoria adaptativa para controlar el proceso de la búsqueda es el tema central subyacente en la búsqueda tabú. El efecto de tal memoria puede ser previsto estipulando que TS mantiene una historia selectiva  $H$  de los estados encontrados durante la búsqueda, y reemplaza  $N(xActual)$  por un entorno modificado que puede ser denotado  $N(H, xActual)$ . La historia determina, por tanto, qué soluciones pueden ser alcanzadas por un movimiento desde la solución actual, seleccionando  $xSiguiente$  de  $N(H, xActual)$ .

En las estrategias TS basadas en consideraciones de período corto,  $N(H, xActual)$  característicamente es un subconjunto de  $N(xActual)$ , y la clasificación tabú sirve para identificar elementos de  $N(xActual)$  excluidos de  $N(H, xActual)$ . En las estrategias de período intermedio y largo,  $N(H, xActual)$  puede contener soluciones que no estén en  $N(xActual)$ , generalmente soluciones elite seleccionadas (óptimos locales de alta calidad) encontradas en varios momentos en el proceso de solución. Estas soluciones elite se identifican típicamente como elementos de un grupo regional en estrategias de intensificación de período intermedio, y como elementos de diferentes grupos en estrategias de diversificación

de período largo. Además, las componentes de las soluciones elite, en contraste con las soluciones en sí mismas, se incluyen entre los elementos que pueden ser conservados e integrados para proporcionar entradas al proceso de búsqueda.

TS también usa historia para crear una evaluación modificada de las soluciones accesibles actualmente. Esto puede ser expresado formalmente diciendo que TS reemplaza la función objetivo  $c(x)$  por una función  $c(H, x)$ , que tiene el propósito de evaluar la calidad relativa de las soluciones accesibles actualmente. Esta función modificada es relevante porque TS usa criterios de decisión agresivos que buscan un mejor  $xSiguiente$ , es decir, que proporcionan un mejor valor de  $c(H, xSiguiente)$ , sobre un conjunto candidato trazado de  $N(H, xAhora)$ . Además, las evaluaciones modificadas están en ocasiones acompañadas de la alteración sistemática de  $N(H, xActual)$ , para incluir soluciones vecinas que no satisfacen las condiciones de factibilidad. La referencia a  $c(x)$  y a la factibilidad se mantiene para determinar si un movimiento es de mejora o conduce a una nueva mejor solución.

Para problemas grandes, donde  $N(H, xActual)$  puede tener muchos elementos, o para problemas donde estos elementos pueden ser costosos de examinar, la orientación de elección agresiva de TS hace altamente importante aislar un subconjunto candidato del entorno, y examinar este subconjunto en vez del entorno completo. Esto puede realizarse en etapas, permitiendo que el subconjunto candidato se extienda si no se encuentran alternativas que satisfagan los niveles de aspiración. Debido a la importancia del papel del subconjunto candidato, nos referimos a este subconjunto explícitamente por la notación  $Candidato\_N(xActual)$ . Entonces, el procedimiento de búsqueda tabú puede ser expresado como se muestra en la Figura 12.

Formalmente, el método de búsqueda tabú es bastante directo de establecer. La esencia del método depende de cómo se define y utiliza la historia almacenada  $H$ , y de cómo se determinan el entorno candidato  $Candidato\_N(xActual)$  y la función evaluación  $c(H, x)$ . En los casos más simples podemos imaginar que  $Candidato\_N(xActual)$  constituye todo  $N(H, xActual)$ , y tomar  $c(H, x) = c(x)$ , ignorando enfoques de investigación de en-

---

## Método de Búsqueda Tabú:

### Paso 1 (Inicialización).

Comenzar con la misma inicialización usada para la Búsqueda por Entorno, y empezar con el expediente de la historia  $H$  vacío.

### Paso 2 (Elección y finalización).

Determinar  $Candidato\_N(xActual)$  como un subconjunto de  $N(H, xActual)$ . Seleccionar  $xSiguiente$  de  $Candidato\_N(xActual)$  para minimizar  $c(H, x)$  sobre este conjunto ( $xSiguiente$  es llamado elemento de evaluación mayor de  $Candidato\_N(xActual)$ ). Terminar mediante un criterio de parada seleccionado.

### Paso 3 (Actualización).

Ejecutar la actualización por el Método de Búsqueda en el Entorno, y actualizar el expediente de la historia  $H$ .

---

Figura 12: Método de Búsqueda Tabú.

torno y consideraciones de período largo que introducen soluciones elite en la determinación de los movimientos. Sin embargo, las estrategias de lista de candidatos que reducen el espacio de movimientos considerados son enormemente importantes para la implementación efectiva [8].

## 2.4. Memoria de la Búsqueda Tabú

### 2.4.1. Memoria Basada en Atributo

Un atributo de un movimiento de  $xActual$  a  $xSiguiente$ , o de un movimiento ensayo de  $xActual$  a una solución tentativa  $xEnsayo$ , puede abarcar cualquier aspecto que cambie como resultado del movimiento. Algunos tipos naturales de atributos aparecen en la Figura 13.

Un movimiento simple evidentemente puede dar lugar a atributos múltiples. Por ejemplo, un movimiento que cambia los valores de dos variables simultáneamente puede dar lugar a cada uno de los tres atributos (A1), (A2), y (A3), además de otros atributos de la forma indica-

---

## Atributos de Movimiento Ilustrativos

para un Movimiento  $xActual$  a  $xEnsayo$ :

- (A1) Cambio de una variable seleccionada  $x_j$  de 0 a 1.
  - (A2) Cambio de una variable seleccionada  $x_k$  de 1 a 0.
  - (A3) El cambio combinado de (A1) y (A2) tomados juntos.
  - (A4) Cambio de una función  $g(xActual)$  a  $g(xEnsayo)$  (donde  $g$  puede representar una función que ocurre naturalmente en la formulación del problema o una función que es creada estratégicamente).
- 

Figura 13: Atributos de Movimiento Ilustrativos.

da.

Cuando nos referimos a asignar valores alternativos a una variable seleccionada  $x_j$  de  $x$ , y particularmente a asignar valores 0 y 1 a una variable binaria, entenderemos por nuestras convenciones anteriores que esto puede referirse a una variedad de operaciones tales como añadir o eliminar aristas de un grafo, asignar o eliminar un servicio de una localización particular, cambiar la posición de procesamiento de un trabajo sobre una máquina, y así sucesivamente. Estas convenciones de código pueden extenderse para incluir la creación de variables suplementarias que representan estados de procesos subordinados. Por ejemplo,  $x_j = 0$  ó 1 puede indicar que una variable asociada es no básica o básica en un procedimiento de solución de punto extremo, como en el método *simplex* y sus variantes para programación lineal y no lineal.

### 2.4.2. Usos de Atributos de Movimiento

Los atributos de movimientos almacenados son a menudo usados en búsqueda tabú para imponer restricciones, que evitan que sean elegidos movimientos que invertirían los cambios representados por estos atributos. Más precisamente, cuando se ejecuta un movimiento de  $xActual$  a  $xSiguiente$  que contiene un atributo  $e$ , se mantiene un registro para el atributo

inverso que denotamos por  $\bar{e}$ , para prevenir que ocurra un movimiento que contenga algún subconjunto de tales atributos inversos. En la Figura 14 se muestran algunos tipos de restricciones tabú empleadas frecuentemente.

---

### Restricciones Tabú Ilustrativas.

Un movimiento es tabú si:

- (R1)  $x_j$  cambia de 1 a 0 (donde  $x_j$  cambió previamente de 0 a 1).
  - (R2)  $x_k$  cambia de 0 a 1 (donde  $x_k$  cambió previamente de 1 a 0).
  - (R3) Ocurre al menos una de las restricciones (R1) y (R2). (Esta condición es más restrictiva que (R1) o (R2) separadamente, es decir, hace más movimientos tabú).
  - (R4) Ocurren (R1) y (R2). (Esta condición es menos restrictiva que (R1) o (R2) por separado, es decir, hace menos movimientos tabú).
- 

Figura 14: Restricciones Tabú Ilustrativas.

#### 2.4.3. El papel de Estado Tabú

Una restricción tabú se activa típicamente sólo en el caso en el que sus atributos hayan ocurrido dentro de un número limitado de iteraciones anteriores a la iteración presente (creando una restricción basada en lo reciente) o hayan ocurrido con una cierta frecuencia sobre un período de iteraciones más largo (creando una restricción basada en la frecuencia). Más precisamente, se cumple una restricción tabú sólo cuando los atributos subyacentes a su definición satisfacen ciertos umbrales de lo reciente o de lo frecuente. Para explotar esta noción, definimos un atributo como tabú-activo cuando su atributo inverso asociado ha ocurrido dentro de un intervalo estipulado de lo reciente o de lo frecuente en movimientos pasados. Un atributo que no es tabú-activo se llama tabú-inactivo.

La condición de ser tabú-activo o tabú-inactivo se llama el *estado tabú* de un atributo. En algunas ocasiones un atributo se llama tabú o no tabú para indicar que es tabú-activo o tabú-inactivo. Es importante tener en mente en esos casos que un “atributo tabú” no corresponde a

un movimiento tabú. Como muestran los ejemplos anteriores, un movimiento puede contener atributos tabú-activos, pero aún no ser tabú si estos atributos no son del número o clases correctas para activar una restricción tabú.

Las restricciones tabú más comunes, cuyos atributos son los inversos de aquellos que definen las restricciones, característicamente tienen el objetivo de prevenir el ciclado y de inducir vigor en la búsqueda. Debe precisarse que el evitar ciclos no es la meta final del proceso de búsqueda. En algunas instancias, un buen camino de búsqueda resultará en volver a visitar una solución encontrada antes. El objetivo más general es continuar estimulando el descubrimiento de nuevas soluciones de alta calidad. En general, un tipo común de restricción opera seleccionando algún subconjunto de atributos y declarando un movimiento tabú si un cierto número mínimo es tabú-activo.

## 2.5. Funciones de Memoria Tabú Basadas en lo Reciente

Para mantener el estado de los atributos del movimiento que componen restricciones tabú, y para determinar cuándo son aplicables estas restricciones, han resultado útiles varias clases básicas de funciones de memoria. Dos ejemplos comunes de funciones de memoria basadas en lo reciente se especifican mediante los vectores  $ComienzoTabu(e)$  y  $FinTabu(e)$ , donde  $e$  varía sobre atributos relevantes a una aplicación particular. Estos vectores identifican, respectivamente, las iteraciones de comienzo y finalización del período tabú para el atributo  $e$ , acotando así el período durante el cual  $e$  es tabú-activo.

La regla para identificar valores apropiados para  $ComienzoTabu(e)$  y  $FinTabu(e)$  resulta de mantener los atributos en cada iteración que son componentes del movimiento actual. En particular, en la iteración  $i$ , si  $e$  es un atributo del movimiento actual, se define un estado tabú para evitar inversiones. Entonces  $ComienzoTabu(e) = i + 1$ , indicando que el atributo inverso  $\bar{e}$  comienza su estado tabú-activo al comienzo de la siguiente iteración. El atributo  $\bar{e}$  mantendrá este estado a lo largo de su período tabú, que denotamos por  $t$ . Esto produce  $FinTabu(e) = i + t$ , tal que el período para  $\bar{e}$  se extiende sobre las  $t$  iteraciones de  $i + 1$  a

$i + t$ .

Como resultado, es fácil comprobar si un atributo arbitrario es activo, simplemente controlando si  $FinTabu(e) \geq IteracionActual$ . Inicializando  $FinTabu(e) = 0$  para todos los atributos nos aseguramos de que  $FinTabu(e) < IteracionActual$ , y por lo tanto que el atributo  $e$  es tabú-inactivo, hasta que se realice la actualización especificada previamente. Esto sugiere que necesitamos mantener sólo un único vector  $FinTabu(e)$  para proporcionar información sobre el estado tabú. Sin embargo, veremos que surgen situaciones en las que es valioso mantener  $ComienzoTabu(e)$ , e inferir  $FinTabu(e)$  añadiendo un valor apropiado de  $t$  (computado actualmente, o preferiblemente extraído de una secuencia pre-almacenada), o mantener  $FinTabu(e)$  como un vector separado.

La memoria a menudo puede ser más específica cuando los atributos representan alternativas binarias, tales como cambiar de  $x_j = 0$  a  $x_j = 1$ . Entonces, en vez de almacenar un valor  $ComienzoTabu(e)$  separado para cada uno de estos atributos, es suficiente con registrar un único valor  $ComienzoTabu(j)$ . Automáticamente sabemos si  $ComienzoTabu(j)$  se refiere a cambiar de  $x_j = 0$  a  $x_j = 1$  o lo contrario, teniendo en cuenta el valor de  $x_j$  en la iteración actual. Si actualmente  $x_j = 1$ , por ejemplo, el cambio más reciente fue de  $x_j = 0$  a  $x_j = 1$ . Entonces, el atributo inverso, derivado de cambiar  $x_j$  de 1 a 0, es aquel cuyo período está representado por el valor de  $ComienzoTabu(j)$ .

A pesar de la estructura de datos usada, la cuestión clave para crear el estado tabú usando memoria basada en lo reciente es determinar un “buen valor” de  $t$ . Las reglas para determinar  $t$  se clasifican como estáticas o dinámicas. Las reglas estáticas eligen un valor para  $t$  que se mantiene fijado a lo largo de la búsqueda. Las reglas dinámicas permiten que el valor de  $t$  varíe.

Los valores indicados, tales como 7 y  $\sqrt{n}$ , son sólo para propósitos ilustrativos, y representan parámetros cuyos valores preferidos deberían ser establecidos por experimentación para una clase particular de problemas. En ocasiones es apropiado permitir diferentes tipos de atributos definiendo una restricción tabú con diferentes valores para el período  $t$ . Por ejemplo, algunos

---

## Reglas Ilustrativas para Crear Período

**Tabú** (Basado en lo Reciente)

**Reglas Estáticas** Elegir  $t$  como una constante tal que  $t = 7$  o  $t = \sqrt{n}$ , donde  $n$  es una medida de la dimensión del problema.

**Reglas Dinámicas**

**Dinámico Simple:** Elegir  $t$  para variar (aleatoriamente o mediante un patrón sistemático) entre cotas  $t_{min}$  y  $t_{max}$ , tal que  $t_{min} = 5$  y  $t_{max} = 7$  o  $t_{min} = ,9\sqrt{n}$  y  $t_{max} = 1,1\sqrt{n}$ .

**Dinámico Atributo Dependiente:**

Elegir  $t$  como en la regla dinámica simple, pero determinar  $t_{min}$  y  $t_{max}$  para ser mayores para aquellos atributos que son más atractivos; por ejemplo, basados en consideraciones de calidad o de influencia.

---

Figura 15: Reglas Ilustrativas para Crear Período Tabú.

atributos pueden contribuir más fuertemente a una restricción tabú que otros, y debería asignarse un período tabú más abreviado para impedir hacer la restricción demasiado severa.

La experiencia práctica indica que las reglas dinámicas son típicamente más robustas que las reglas estáticas. Los buenos valores de parámetros para reglas dinámicas normalmente abarcan un intervalo amplio, y producen resultados comparables o superiores a las salidas producidas por reglas estáticas. Las reglas dinámicas que dependen del tipo y la calidad del atributo, donde se asignan períodos mayores para evitar reversiones de atributos que participan en movimientos de alta calidad, se han probado bastante efectivos para problemas difíciles relacionados con planificación y conducción.

## 2.6. Criterios de Aspiración

Los criterios de aspiración se introducen en la búsqueda tabú para determinar cuándo pueden ser reemplazadas las restricciones tabú, eliminando así una clasificación tabú aplicada a un movimiento en otro caso. El uso apropiado

do de estos criterios puede ser muy importante para permitir a un método TS proporcionar sus mejores niveles de ejecución.

Las primeras aplicaciones empleaban sólo un tipo simple de criterio de aspiración, consistiendo en eliminar una clasificación tabú de un movimiento de ensayo cuando el movimiento conduce a una solución mejor que la mejor obtenida hasta ahora. Este criterio se sigue usando ampliamente. Sin embargo, puede haber otros criterios de aspiración efectivos para mejorar la búsqueda.

Una base para uno de estos criterios surge introduciendo el concepto de influencia, que mide el grado de cambio inducido en la estructura de la solución o factibilidad. (La influencia a menudo se asocia a la idea de distancias de movimiento, es decir, donde se concibe que un movimiento de mayor distancia tiene mayor influencia). Esta noción puede ser ilustrada para el problema de distribuir objetos desigualmente pesados entre cajas, donde el objetivo es dar a cada caja, tan aproximadamente como sea posible, el mismo peso. Un movimiento de alta influencia, que cambia significativamente la estructura de la solución actual, se ejemplifica por un movimiento que transfiere un objeto muy pesado de una caja a otra, o que intercambia objetos de pesos similares entre dos cajas. Tal movimiento puede no mejorar la solución actual, aunque es menos probable conducir a una mejora cuando la solución actual es relativamente buena. De cualquier manera, los movimientos de alta influencia son importantes, especialmente durante intervalos de separación de optimalidad local, porque con una serie de movimientos que se limita solamente a hacer pequeños cambios estructurales es poco probable obtener una oportunidad para la mejora significativa.

Los movimientos de menor influencia normalmente pueden ser tolerados hasta que las oportunidades para el aumento a partir de ellos parezcan ser insignificantes. En tal punto, y en ausencia de movimientos de mejora, los criterios de aspiración cambian para dar a los movimientos influyentes un rango mayor. Además, una vez que se ha realizado un movimiento influyente, deberían ser eliminadas o “debilitadas” las restricciones tabú establecidas previamente para movimientos menos influyentes. Estas consideraciones de influencia de movimiento interactúan con las consideraciones

de región y dirección de búsqueda, como se indica a continuación.

Las aspiraciones son de dos tipos: *aspiraciones de movimiento* y *aspiraciones de atributo*. Una aspiración de movimiento, cuando se satisface, revoca la clasificación tabú del movimiento. Una aspiración de atributo, cuando se satisface, revoca el estado tabú-activo del atributo. En el último caso el movimiento principal puede no cambiar su clasificación tabú, dependiendo de si la restricción tabú puede ser activada por más de un atributo.

Los siguientes criterios determinan la admisibilidad de una solución ensayo,  $x_{Ensayo}$ , como un candidato a ser considerado, donde  $x_{Ensayo}$  es generado por un movimiento que ordinariamente sería clasificado tabú.

## Criterios de Aspiración Ilustrativos

**Aspiración por Defecto:** Si todos los movimientos disponibles están clasificados tabú, y no se han hecho admisibles mediante algunos otros criterios de aspiración, entonces se selecciona el movimiento “menos tabú”. (Por ejemplo, seleccionamos un movimiento que pierda su clasificación tabú por el menor incremento en el valor de *IteraciónActual*, o por una aproximación a esta condición).

**Aspiración por objetivo:**

**Forma Global:** Se satisface una aspiración de movimiento, permitiendo que  $x_{Ensayo}$  sea un candidato para la selección, si  $c(x_{Ensayo}) < MejorCoste$ .

**Forma Regional:** Subdividimos el espacio de búsqueda en regiones  $R \subseteq X$ , identificadas mediante cotas sobre los valores de funciones  $g(x)$  (o por intervalos de tiempo de búsqueda). Denotemos por  $MejorCoste(R)$  el mínimo  $c(x)$  encontrado en  $R$ . Entonces para  $x_{Ensayo} \in R$ , se satisface una aspiración de movimiento (para moverse hacia  $x_{Ensayo}$ ) si  $c(x_{Ensayo}) < MejorCoste(R)$ .

### **Aspiración por Dirección de Búsqueda:**

Sea  $direccion(e) = mejora$  si el movimiento más reciente conteniendo a  $\bar{e}$  fue un movimiento de mejora, y  $direccion(e) = nomejora$ , en otro caso. ( $direccion(e)$  y  $FinTabu(e)$  se fijan a sus valores actuales en la misma iteración). Se satisface una aspiración de atributo para  $e$  (haciendo a  $e$  tabú-inactivo) si  $direccion(e) = mejora$  y el movimiento ensayo actual es un movimiento de mejora, es decir, si  $c(xEnsayo) < c(xActual)$ .

### **Aspiración por Influencia:** Sea

$influencia(e) = 0$  ó  $1$  según si el movimiento que establece el valor de  $ComienzoTabu(e)$  es un movimiento de baja influencia o un movimiento de alta influencia. ( $influencia(e)$  se fija a la vez que  $ComienzoTabu(e)$ ). Además, sea  $Ultima(L)$ , para  $L = 0$  ó  $1$ , igual a la iteración más reciente en la que fue realizado un movimiento de nivel de influencia  $L$ . Entonces una aspiración de atributo para  $e$  se satisface si  $influencia(e) = 0$  y  $ComienzoTabu(e) < Ultima(1)$ . Para múltiples niveles de influencia  $L = 0, 1, 2, \dots$ , la aspiración para  $e$  se satisface si hay un  $L > influencia(e)$  tal que  $ComienzoTabu(e) < Ultima(L)$ .

Los criterios de aspiración precedentes incluyen varias estrategias útiles para la búsqueda tabú que aún no se han examinado ampliamente y que garantizan una investigación más completa. Por ejemplo, un caso especial de la Aspiración Regional por Objetivo ocurre definiendo  $R = \{x : g(x) = r\}$ , donde  $g(x)$  es una función de dispersión creada para distinguir entre diferentes vectores  $x$  según el valor asignado a  $g(x)$ . Entonces,  $MejorCoste(R)$  es convenientemente guardada como  $MejorCoste(r)$ , identificando el mínimo  $c(x)$  encontrado cuando  $g(x) = r$ . La “regionalidad” definida por  $R$  en este caso proporciona una base para integrar los elementos de la aspiración y diferenciación. (Una función de dispersión  $g(x)$  también puede ser tratada como una función atributo, e incorporada en las restricciones tabú como se ha descrito anterior-

mente. O por el contrario, una función de dispersión puede ser definida sobre atributos, con énfasis particular en aquellos que califican como influyentes).

La Aspiración por Dirección de la Búsqueda y la Aspiración por Influencia proporcionan aspiraciones de atributos en vez de aspiraciones de movimientos. En la mayoría de los casos, las aspiraciones de atributos y movimientos son equivalentes. Sin embargo, se emplean diversos medios para probar estas dos clases de aspiraciones.

## **2.7. Memoria Basada en Frecuencia**

La memoria basada en frecuencia proporciona un tipo de información que complementa la información proporcionada por la memoria basada en lo reciente, ampliando la base para seleccionar movimientos preferidos. Como lo reciente, la frecuencia a menudo está ponderada o descompuesta en subclases teniendo en cuenta las dimensiones de calidad de la solución e influencia del movimiento.

Para nuestros propósitos presentes, concebimos medidas de frecuencia como proporciones, cuyos numeradores representan cuentas del número de ocurrencias de un evento particular (por ejemplo, el número de veces que un atributo particular pertenece a una solución o movimiento) y cuyos denominadores generalmente representan uno de cuatro tipos de cantidades: (1) el número total de ocurrencias de todos los eventos representados por los numeradores (tal como el número de iteraciones asociadas), (2) la suma de los numeradores, (3) el máximo valor del numerador, y (4) la media del valor del numerador. Los denominadores (3) y (4) dan lugar a lo que se puede llamar frecuencias relativas. En los casos en los que los numeradores representan cuentas ponderadas, algunas de las cuales pueden ser negativas, los denominadores (3) y (4) se expresan como valores absolutos y el denominador (2) se expresa como una suma de valores absolutos.

En el ejemplo de intercambiar objetos entre cajas, los atributos *DesdeAtributos* están asociados con mover un objeto fuera de una de las dos cajas y los atributos *HaciaAtributos*

están asociados con mover un objeto dentro de una de estas cajas. Denotemos por  $x(1), x(2), \dots, x(\text{IteracionActual})$  la secuencia de soluciones generadas en el momento presente del proceso de búsqueda, y denotemos por  $S$  una subsecuencia de esta secuencia de soluciones. Tomamos la libertad de tratar  $S$  como un conjunto además de como una secuencia ordenada. Los elementos de  $S$  no son necesariamente elementos consecutivos de la secuencia de solución completa.

A modo de notación, denotemos por  $S(x_j = p)$  el conjunto de soluciones en  $S$  para las cuales  $x_j = p$ , y denotemos por  $\#S(x_j = p)$  la cardinalidad de este conjunto (el número de veces que  $x_j$  recibe el valor  $p$  sobre  $x \in S$ ). Análogamente, denotemos por  $S(x_j = p$  a  $x_j = q)$  el conjunto de soluciones en  $S$  que resultan por un movimiento que cambia  $x_j = p$  a  $x_j = q$ . Finalmente, denotemos por  $S(\text{de } x_j = p)$  y  $S(\text{a } x_j = q)$  los conjuntos de soluciones en  $S$  que contienen respectivamente  $x_j = p$  como un *DesdeAtributo* o  $x_j = q$  como un *HaciaAtributo*. En general, si *AtributoSolucion* representa cualquier atributo de una solución que puede tomar el papel de un *DesdeAtributo* o un *HaciaAtributo* para un movimiento, y si *MovimientoAtributo* representa un atributo de movimiento arbitrario denotado por (*DesdeAtributo*, *HaciaAtributo*), entonces

$$S(\text{SolucionAtributo}) = \{x \in S : x \text{ contiene } \text{AtributoSolucion}\}.$$

$$S(\text{MovimientoAtributo}) = \{x \in S : x \text{ resulta de un movimiento que contiene } \text{MovimientoAtributo}\}.$$

$$S(\text{DesdeAtributo}) = \{x \in S : x \text{ inicia un movimiento a } \text{DesdeAtributo}\}.$$

$$S(\text{HaciaAtributo}) = \{x \in S : x \text{ resulta de un movimiento que contiene a } \text{HaciaAtributo}\}.$$

La cantidad  $\#S(x_j = p)$  constituye una *medida de residencia*, dado que identifica el número de veces que el atributo  $x_j = p$  reside en las soluciones de  $S$ . Correspondientemente, llamamos la frecuencia que resulta de dividir tal medida por uno de los denominadores de (1) a (4) una *frecuencia de residencia*. Para el numerador  $\#S(x_j = p)$ , los denominadores (1) y (2) corresponden ambos a  $\#S$ , mientras que los

denominadores (3) y (4) son dados respectivamente por  $\text{Max}(\#S(x_k = q)) : \text{todo } k, q$  y por  $\text{Media}(\#S(x_k = q)) : \forall k, q$ .

Las cantidades  $\#S(x_j = p$  a  $x_j = q)$ ,  $\#S(\text{de } x_j = p)$  y  $\#S(\text{a } x_j = q)$  constituyen medidas de transición, dado que identifican el número de veces que  $x_j$  cambia de y/o a valores especificados. Asimismo, las frecuencias basadas en tales medidas son llamadas *frecuencias de transición*. Los denominadores para crear tales frecuencias de las medidas precedentes incluyen  $\#S$ , el número total de veces que los cambios indicados ocurren sobre  $S$  para diferentes valores  $j$ ,  $p$  y/o  $q$ , y cantidades *Max* y *Media* asociadas.

*Distinciones entre tipos de Frecuencia.* Las frecuencias de residencia y transición en ocasiones transmiten información relacionada, pero en general llevan diferentes aplicaciones. Algunas veces están confusas en la literatura. Una distinción significativa es que las medidas de residencia, en contraste con las medidas de transición, no se refieren a si un atributo de solución particular de un elemento  $x(i)$  en la secuencia  $S$  es un *DesdeAtributo* o un *HaciaAtributo*, o incluso si es un atributo que cambia en movimiento de  $x(i)$  a  $x(i + l)$  o de  $x(i - l)$  a  $x(i)$ . Sólo es relevante que el atributo puede ser un *DesdeAtributo* o un *HaciaAtributo* en algún movimiento futuro. Tales medidas pueden conducir a diferentes tipos de implicaciones dependiendo de la elección de la subsecuencia de  $S$ .

Una alta frecuencia de residencia, por ejemplo, puede indicar que un atributo es altamente atractivo si  $S$  es una subsecuencia de soluciones de alta calidad, o puede indicar lo contrario si  $S$  es una subsecuencia de soluciones de baja calidad. Por otro lado, una frecuencia de residencia que es alta (baja) cuando  $S$  contiene tanto soluciones de alta como de baja calidad puede apuntar a atributo fortalecido (o excluido) que restringe al espacio de búsqueda, y que necesita ser desechado (o incorporado) para permitir diversidad.

Desde el punto de vista de la simplificación del cómputo, cuando  $S$  está formado por todas las soluciones generadas después de una iteración especificada, entonces puede mantenerse una medida de residencia actual y actualizada por referencia a valores del vector *ComienzoTabu*, sin la necesidad de incrementar un conjunto de

contadores en cada iteración. Para un conjunto  $S$  cuyas soluciones no vienen de iteraciones secuenciales, sin embargo, las medidas de residencia se calculan simplemente poniendo una etiqueta sobre los elementos de  $S$ .

Las medidas de transición son generalmente bastante fáciles de mantener ejecutando actualizaciones durante el proceso de generación de soluciones (asumiendo que las condiciones que definen  $S$ , y los atributos cuyas medidas de transición son buscadas, se especifican con anterioridad). Esto resulta del hecho de que típicamente sólo se consideran relevantes unos pocos tipos de cambios de atributos para detectar cuándo una solución se reemplaza por la siguiente, y éstos pueden aislarse y registrados fácilmente. Las frecuencias del ejemplo de la sección 2.1 constituyen una instancia de frecuencias de transición que fueron mantenidas en esta manera simple. Su uso en este ejemplo, sin embargo, alentaba la diversidad aproximando el tipo de papel que las frecuencias de residencia son usualmente mejor satisfechas para ser tomadas.

Como una distinción final, una frecuencia de transición alta, en contraste con una frecuencia de residencia alta, puede indicar que un atributo asociado es un “llenador excelente”, que cambia dentro y fuera de la solución para ejecutar una función de buen ajuste. Tal atributo puede ser interpretado como el opuesto de un atributo influyente, como se consideró anteriormente en la discusión de Aspiración de Influencia. En este contexto, una frecuencia de transición puede ser interpretada como una medida de volatilidad.

*Ejemplos de Usos de Medidas de Frecuencia.* A continuación se muestran ilustraciones de frecuencias de residencia y de transición. (Sólo se indican los numeradores, entendiendo que los denominadores son proporcionados por las condiciones (1) a (4)).

La medida (F5) puede ser interpretada como el valor medio  $c(x)$  sobre  $S$  cuando  $x_j = p$ . Esta cantidad puede ser directamente comparada con otras medias o puede ser pasada a una medida de frecuencia usando denominadores tales como la suma o el máximo de estas medias.

Los atributos que tienen mayores medidas de frecuencia, como aquellos que tienen mayores medidas de lo reciente (es decir, que ocurrieron en soluciones o movimientos más cercanos al

---

## Ejemplos de Medidas de Frecuencia

### (Numeradores)

$$(F1) \#S(x_j = p)$$

$$(F2) \#S(x_j = p \text{ para algún } x_j)$$

$$(F3) \#S(a \text{ } x_j = p)$$

$$(F4) \#S(x_j \text{ cambia}), \text{ es decir, } \#S(x_j \neq p \text{ a } x_j = p)$$

$$(F5) \sum_{x \in S(x_j=p)} c(x) / \#S(x_j = p)$$

$$(F6) \text{ Reemplazar } S(x_j = p) \text{ en (F5) con } S(x_j \neq p \text{ a } x_j = p)$$

$$(F7) \text{ Reemplazar } c(x) \text{ en (F6) con una medida de la influencia } S(x_j \neq p \text{ a } x_j = p)$$


---

presente), pueden iniciar un estado tabú-activo si  $S$  está formado por soluciones consecutivas que finalizan con la solución actual. Sin embargo, la memoria basada en frecuencia típicamente encuentra su uso más productivo como parte de una estrategia de período más largo, la cual emplea incentivos además de restricciones para determinar qué movimientos son seleccionados. En tal estrategia, las restricciones se convierten en penalizaciones de evaluación, y los incentivos se convierten en mejoras de la evaluación, para alterar la base para calificar movimientos como atractivos o no atractivos.

Para ilustrarlo, a un atributo tal como  $x_j = p$  con una frecuencia de residencia alta le puede ser asignado un incentivo fuerte (“beneficio”) para servir como un *DesdeAtributo*, resultando por tanto en la elección de un movimiento que produce  $x_j \neq p$ . Tal incentivo es particularmente relevante en el caso donde *ComienzoTabu*( $x_j \neq p$ ) es pequeño, dado que este valor identifica la última iteración en que  $x_j \neq p$  sirvió como un *DesdeAtributo*, y por tanto descubre que  $x_j = p$  ha sido un atributo de cada solución desde entonces.

La memoria basada en frecuencia por tanto es usualmente aplicada introduciendo estados tabú graduados, como un fundamento para definir valores de penalización e incentivos para modificar la evaluación de los movimientos. Existe una conexión natural entre este enfoque y el enfoque de memoria basada en lo reciente

que crea estados tabú como una condición todo-o-ninguno. Si el período de un atributo en memoria basada en lo reciente está concebida como un umbral condicional para aplicar una penalización muy grande, entonces las clasificaciones tabú producidas por tal memoria pueden ser interpretadas como el resultado de una evaluación que se convierte fuertemente inferior cuando las penalizaciones están activadas. Es razonable anticipar que los umbrales condicionales deberían también ser relevantes para determinar los valores de penalizaciones y los incentivos en estrategias de período largo. La mayoría de las aplicaciones en el presente, sin embargo, usan un múltiplo lineal simple de una medida de frecuencia para crear un término de penalización o de incentivo.

## 2.8. Memoria Basada en Frecuencia en Procesos de Intensificación y Diversificación Simples

Las funciones de intensificación y diversificación en la búsqueda tabú ya están implícitas en muchas de las prescripciones anteriores, pero se convierten especialmente relevantes en procesos de búsqueda de período largo. Las estrategias de intensificación crean soluciones agresivamente estimulando la incorporación de “atributos buenos”. En el período corto esto consiste en incorporar atributos que han recibido las mayores evaluaciones por los enfoques y criterios descritos anteriormente, mientras que en el intermedio a largo período consiste en incorporar atributos de soluciones de subconjuntos elite seleccionados. Por otro lado, las estrategias de diversificación generan soluciones que incorporan composiciones de atributos significativamente diferentes a los encontrados previamente durante la búsqueda. Estos dos tipos de estrategias se contrapesan y refuerzan mutuamente de varias formas.

Examinamos formas simples de enfoques de intensificación y diversificación que hacen uso de memoria basada en frecuencia. Estos enfoques serán ilustrados por referencia a medidas de frecuencia de residencia, pero algunas observaciones similares se aplican al uso de medidas de transición, teniendo en cuenta características contrastantes notadas previamente.

Para una estrategia de diversificación elegimos  $S$  como un subconjunto significativo de la secuencia de solución completa; por ejemplo, la secuencia entera empezando con el primer óptimo local, o la subsecuencia formada por todos los óptimos locales. (Para ciertas estrategias basadas en medidas de transición,  $S$  puede estar formado por la subsecuencia que contiene cada sucesión intacta máxima de movimientos de no-mejora que inmediatamente siguen un óptimo local, concentrándose en  $S(\textit{HaciaAtributo})$  para estos movimientos).

Para una estrategia de intensificación elegimos  $S$  como un subconjunto pequeño de soluciones elite (óptimos locales de alta calidad) que comparten un gran número de atributos comunes, y en segundo lugar cuyos miembros pueden alcanzarse uno de otro mediante números de movimientos relativamente pequeños, independientes de si estas soluciones caen cerca la una de la otra en la secuencia de la solución. Por ejemplo, las colecciones de tales subconjuntos  $S$  pueden ser generadas por procedimientos de agrupamiento, seguido del uso de un enfoque de procesamiento paralelo para tratar cada  $S$  seleccionado por separado.

Para propósitos ilustrativos, supongamos que un movimiento actualmente bajo consideración incluye dos atributos de movimiento, denotados por  $e$  y  $f$ , los cuales pueden ser expresados como  $e = (e\textit{Desde}, e\textit{Hacia})$  y  $f = (f\textit{Desde}, f\textit{Hacia})$ . Proporcionamos reglas para generar una función de penalización o incentivo,  $PI$ , basada en medidas de frecuencia de los atributos  $e$  y  $f$ , las cuales se aplican igualmente a estrategias de intensificación y diversificación. Sin embargo, la función  $PI$  crea una penalización para una estrategia (intensificación o diversificación) si y sólo si crea un incentivo para la otra. Para describir esta función, denotemos por  $f(e\textit{Desde})$  y  $f(e\textit{Hacia})$ , etc., la medida de frecuencia para los  $\textit{DesdeAtributos}$  y  $\textit{HaciaAtributos}$  indicados, y denotemos por  $T1, T2, \dots, T6$  umbrales positivos seleccionados, cuyos valores dependen del caso considerado.

Las condiciones precedentes para definir  $PI$  están relacionadas con las ilustradas previamente para identificar condiciones en las cuales los atributos se convierten en tabú-activos. Por ejemplo, especificando que (1) debe ser positivo para hacer  $PI$  positivo corresponde a introducir una penalización tabú (o un incentivo) cuando

---

## Funciones PI Ilustrativas de Penalización

### e Incentivo para *HaciaAtributos*

Elegir  $PI$  como una función monótona no decreciente de una de las siguientes cantidades, donde  $PI$  es positiva cuando la cantidad es positiva, y es 0 en otro caso. ( $PI$  proporciona una penalización en una estrategia de diversificación y un incentivo en una estrategia de intensificación).

- (1)  $Min\{f(eHacia), f(fHacia)\} - T_1$
  - (2)  $Max\{f(eHacia), f(fHacia)\} - T_2$
  - (3)  $Media\{f(eHacia), f(fHacia)\} - T_3$
- 

## Funciones PI Ilustrativas de Penalización

### e Incentivo para *DesdeAtributos*

Elegir  $PI$  como una función monótona no decreciente de una de las siguientes cantidades, donde  $PI$  es positiva cuando la cantidad es positiva, y es 0 en otro caso. ( $PI$  proporciona un incentivo en una estrategia de diversificación y una penalización en una estrategia de intensificación).

- (1)  $Min\{f(eDesde), f(fDesde)\} - T_4$
  - (2)  $Max\{f(eDesde), f(fDesde)\} - T_5$
  - (3)  $Media\{f(eDesde), f(fDesde)\} - T_6$
- 

ambas medidas exceden sus umbrales comunes. Si una medida es expresada como la duración desde que un atributo fue el más recientemente hecho tabú-activo, y si el umbral representa un límite común para el período tabú, entonces (1) puede expresar una restricción basada en lo reciente para determinar una clasificación tabú. La asignación de diferentes umbrales a atributos diferentes en (1) corresponde a establecer períodos tabú atributo-dependientes. Análogamente, los restantes valores de (2) a (6) pueden ser interpretados como análogos a los valores que definen medidas basadas en lo reciente para establecer una clasificación tabú, implementada en este caso a través de una penalización.

De estas observaciones se concluye que la medida de frecuencia  $F$  puede extenderse para

representar medidas combinadas de lo reciente y de lo frecuente. Note que la memoria basada en lo reciente, almacenando datos de *ComienzoTabu*, puede también referirse a cambios que han ocurrido más lejos en el pasado además de aquellos que han ocurrido más recientemente. Aunque estas medidas están ya implícitamente combinadas cuando se unen las penalizaciones y los incentivos basados en medidas de frecuencia con clasificaciones tabú basadas en medidas de lo reciente, como un fundamento para seleccionar movimientos actuales, es posible que otras formas de combinación sean superiores.

## 3. Aspectos más amplios de Intensificación y Diversificación

Los métodos de intensificación y diversificación que utilizan penalizaciones e incentivos representan sólo una clase de tales estrategias. Una colección mayor surge de la consideración directa de los objetivos de intensificación y diversificación. Examinamos diversos métodos que se han demostrado útiles en aplicaciones previas, e indicamos métodos que consideramos prometedores en aplicaciones futuras. Para empezar hacemos una distinción importante entre diversificación y aleatorización.

*Diversificación frente a aleatorización.* Cuando TS busca una colección de soluciones diversas, es muy diferente que cuando busca una colección de soluciones aleatorizadas. En general, estamos interesados no sólo en colecciones diversas sino en secuencias diversas, dado que frecuentemente el orden en que se examinan los elementos es importante en TS. Esto ocurre, por ejemplo cuando buscamos identificar una secuencia de nuevas soluciones (no vistas antes) de forma que cada solución sucesiva sea *maximalmente* diversa en relación a todas las soluciones previamente generadas. Esto incluye posibles referencias a un conjunto base de soluciones, tales como  $x \in S$ , que da prioridad al objetivo de diversificación (es decir, donde el primer objetivo es establecer diversificación con respecto a  $S$ , y después con respecto a otras soluciones generadas).

*Refuerzo por restricción.* Uno de los primeros tipos de estrategias de intensificación, caracterizada en términos de explotar variables fuertemente determinadas y consistentes en [4], comienza seleccionando un conjunto  $S$  como indicado para determinar una penalización y una función de incentivo, es decir, una consistente en soluciones elite agrupadas a través de una medida de clasificación. En vez de (o además de) crear penalizaciones e incentivos, con el objetivo de incorporar atributos a la solución actual que tenga altas medidas de frecuencia sobre  $S$ , el método de refuerzo por restricción opera estrechando el rango de posibilidades permitidas añadiendo y quitando tales atributos.

La consideración inicial sugiere que este método de restricción no ofrece nada más allá de las opciones disponibles por penalizaciones e incentivos. No obstante, el método puede conseguir más que esto por dos motivos. Primero, las restricciones explícitas pueden acelerar substancialmente la ejecución de los pasos de elección reduciendo el número de alternativas examinadas. Segundo, y más significativamente, muchos problemas se simplifican y colapsan una vez que se introduce un número de restricciones explícitas, permitiendo que las implicaciones estructurales salgan a la superficie, permitiendo que estos problemas se resuelvan más fácilmente.

*Reencadenamiento de camino.* El reencadenamiento de camino (PR, *path relinking*) se inicia seleccionando dos soluciones  $x'$  y  $x''$  de una colección de soluciones elite producidas durante las fases de búsqueda. Se genera un camino desde  $x'$  a  $x''$ , produciendo una secuencia de soluciones  $x' = x'(1), x'(2), \dots, x'(r) = x''$  donde  $x'(i+1)$  se crea a partir de  $x'(i)$  en cada paso eligiendo el movimiento que deja el menor número de movimientos restantes hasta alcanzar  $x''$ . Finalmente, una vez que el camino esté completo, una o más de las soluciones  $x'(z)$  se seleccionan como soluciones para iniciar una nueva fase de búsqueda

Este método proporciona un medio fundamental para perseguir el objetivo de intensificación y diversificación cuando sus pasos se implementan para explotar variantes estratégicas de reglas de elección. Un número de movimientos alternativos típicamente calificarán para producir la siguiente solución a partir de  $x'(i)$  por el criterio del “menor número de movimientos

restantes”, permitiendo consecuentemente una variedad de caminos posibles de  $x'$  a  $x''$ . Seleccionar movimientos no atractivos relativos a  $c(x)$  en cada paso tenderá a producir una serie final de movimientos de fuerte mejora, mientras que seleccionar movimientos atractivos tenderá a producir movimientos de menor calidad al final. (El último movimiento, no obstante, mejorará, o dejará  $c(x)$  sin cambiar, ya que  $x''$  es un mínimo local.) Por tanto, elegir el mejor, peor o movimiento medio, usando un criterio de aspiración para anular las elecciones en los dos últimos casos si está disponible una solución suficientemente atractiva, proporciona opciones que producen efectos contrastantes en la generación de la secuencia indicada. (Existen argumentos a favor de seleccionar el mejor movimiento en cada paso, y entonces repetir el proceso intercambiando  $x'$  y  $x''$ .)

*Procedimientos de Listas de Candidatos.* La sección 2.3.1 destaca la importancia de los procedimientos para aislar un conjunto de movimientos candidatos de un entorno grande, para evitar el gasto computacional de evaluar todo el entorno. Procedimientos de este tipo han sido utilizados en métodos de optimización desde que el tema de la reducción de los esfuerzos computacionales se ha tomado en serio (desde al menos los 50 y probablemente antes). Algunas de las formas más estratégicas de estos problemas vienen del campo de la optimización de redes [10]. En tales métodos, el subconjunto de movimientos se referencia mediante una lista que identifica sus elementos definitorios (tales como índices de variables, nodos y arcos), y por tanto estos métodos han adquirido el nombre de *estrategias de listas de candidatos*.

Las estrategias de listas de candidatos implícitamente tienen una influencia diversificante motivando que diferentes partes del espacio de entorno se examinen en diferentes iteraciones. Esto sugiere que debe beneficiarse de coordinar tales estrategias con otras estrategias de diversificación, un área que permanece abierta a la investigación. Las estrategias de listas de candidatos también son muy naturales para procesos de paralelización, donde se examinan en paralelo formas de descomposición de entornos a examinar de forma secuencial. Los movimientos pueden seleccionarse eligiendo el mejor candidato por varios procesos, o en su lugar cada proceso puede ejecutar sus propios movimientos preferidos, generando trayectorias de soluciones

paralelas que son periódicamente coordinadas a un nivel superior. Estos últimos procedimientos se mantienen considerablemente prometedores.

*Entornos compuestos.* La identificación de un entorno efectivo para definir los movimientos desde una solución a otra puede ser extremadamente importante. Por ejemplo, un intento de resolver un problema de programación lineal eligiendo los movimientos que incrementan o decrecientan variables del problema, frente a elegir movimientos que usan procesos de pivotaje o direcciones de búsqueda, obviamente puede provocar una diferencia sustancial en la calidad de la solución final obtenida. Las innovaciones que han hecho a la programación lineal una potente herramienta de optimización dependen significativamente del descubrimiento de entornos efectivos para hacer los movimientos.

Para aplicaciones combinatorias donde las posibilidades para crear entornos están ampliamente confinadas a varios procesos constructivos o destructivos, o a intercambios, mejoran frecuentemente los resultados combinando entornos para crear movimientos. Por ejemplo, en aplicaciones de secuenciación generalmente es preferible combinar entornos consistentes en movimientos de inserción y movimientos de intercambio, permitiendo considerar ambos tipos de movimientos en cada paso. Otra forma de combinar entornos es generar movimientos combinatorios, donde una secuencia de movimientos simples es tratada como un solo movimiento más complejo.

Un tipo especial de método para crear movimientos compuestos resulta de una sucesión de pasos en los que un elemento es asignado a un nuevo estado, con la consecuencia de *expulsión* de algún otro elemento de su estado actual. El elemento expulsado se asigna a su vez a un nuevo estado, expulsando a otro elemento, y así sucesivamente, creando una cadena de tales operaciones. Por ejemplo, tales procesos ocurren en un problema de secuenciación de tareas al mover una tarea a una nueva posición ocupada por otra tarea, expulsando esta tarea de su posición. La segunda tarea entonces se mueve a una nueva posición expulsando aún otra tarea, y así sucesivamente. Finalmente se acaba por insertar la última tarea entre dos tareas que son actualmente adyacentes. Este tipo de método llamado, estrategia de expulsiones en cadena,

incluye la expulsión de enlaces entre elementos (tales como tareas) más que expulsar los elementos en sí, y también se aplica a elementos agregados y a enlaces. Las estrategias de expulsiones en cadena tienen útiles aplicaciones en problemas de muchos tipos, particularmente en conexión con planificación, rutas, clasificación y partición [1], [7]. Un método tabú que incorpora expulsiones en cadena se ha probado altamente exitoso en problemas de asignación multinivel generalizados [9], sugiriendo la relevancia de estas estrategias para crear entornos compuestos en otras aplicaciones de la búsqueda Tabú.

*Oscilación Estratégica.* El método de oscilación estratégica está estrechamente relacionado con los orígenes de la búsqueda tabú, y proporciona una técnica efectiva entre intensificación y diversificación para medio a largo plazo. La oscilación estratégica opera moviendo hasta chocar con una frontera, representada por la factibilidad o una etapa de construcción, que normalmente representaría un punto donde el método se pararía. En vez de parar, sin embargo, la definición de entorno se extiende, o el criterio de evaluación para seleccionar movimientos se modifica, para permitir que la frontera se cruce. El método entonces continúa por una profundidad especificada más allá de la frontera, y se vuelve. En este punto se vuelve a aproximar a la frontera y se cruza, esta vez en dirección opuesta, procediendo a un nuevo punto de giro. El proceso de acercarse repetidamente y cruzar la frontera desde diferentes direcciones crea una forma de oscilación que da al método su nombre. El control sobre esta oscilación se establece generando evaluaciones modificadas y reglas de movimiento, dependiendo de la región en la que se está actualmente navegando y de la dirección de búsqueda. La posibilidad de recorrer de nuevo una trayectoria anterior se evita con los mecanismos tabú estándares.

Un ejemplo de este método ocurre para el problema de la mochila multidimensional, donde los valores de las variables 0-1 se cambian de 0 a 1 hasta que se alcanza la frontera de factibilidad. El método entonces continúa dentro de la región no factible usando el mismo tipo de cambios, pero con un evaluador modificado. Después de un número seleccionado de pasos, la dirección se invierte cambiando variables de 1 a 0. El criterio de evaluación conduce hacia la mejor variación (o la de menor empeoramiento).

to) de acuerdo a si el movimiento es de más a menos o de menos a más factible (o no factible), y se acompaña por las restricciones asociadas sobre los cambios admisibles de valores en las variables. Una implementación de tal método de [2], [3] ha generado soluciones particulares de alta calidad para el problema de la mochila multidimensional.

El uso de oscilación estratégica en aplicaciones que alternan procesos constructivos y destructivos puede acompañarse de movimientos de intercambio que mantienen la construcción a un determinado nivel. Un *principio de optimalidad aproximada*, que establece aproximadamente que buenas construcciones a un nivel son más probables de estar cerca de buenas construcciones a otro nivel, motiva una estrategia de aplicar intercambios a distintos niveles, a cada lado de una estructura blanco o diana tal como el árbol generador, para obtener construcciones refinadas antes de pasar a niveles adyacentes.

Finalmente, remarcamos que la frontera incorporada en la oscilación estratégica no necesita definirse en términos de factibilidad o estructura, sino que puede definirse en términos de una región donde la búsqueda parece gravitar. La oscilación entonces consiste en obligar a la búsqueda a salir de esta región y permitirle volver.

## Referencias

- [1] Dorndorf, U. y Pesch, E. (1994) "Fast Clustering Algorithms", *ORSA Journal on Computing*, 6:2, 141-153.
- [2] Freville, A. y Plateau, G. (1986) "Heuristics and Reduction Methods for Multiple Constraint 0-1 Linear Programming Problems", *European Journal of Operational Research*, 24, 206-215.
- [3] Freville, A. y Plateau, G. (1990) "Hard 0-1 multiknapsack test problems for size reduction methods", *Invesstigacion Operativa*, 1, 251-270.
- [4] Glover, F. (1977) "Heuristics for Integer Programming Using Surrogate Constraints", *Decision Science*, 8, 156- 166.
- [5] Glover, F. (1986) "Future Paths for Integer Programming and Links to Artificial Intelligence", *Computers and Operations Research*, 5, 533-549.
- [6] Glover, F. y Laguna, M. (1993). Tabu Search. *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems*, C. Reeves, ed., Blackwell Scientific Publishing, pp. 71-140.
- [7] Glover, F. (1996) "Ejection Chains, Reference Structures and Alternating Path Methods for Traveling Salesman Problems", *Discrete Applied Mathematics*, 65, 223-253.
- [8] Glover, F. y Laguna, M. (1997). *Tabu Search*, Kluwer Academic Publishers.
- [9] Laguna, M., Kelly, J. P., Gonzalez-Velarde, J. L., y Glover, F. (1995) "Tabu Search for the Multilevel Generalized Assignment Problem", *European Journal of Operational Research* 82, 176-189.
- [10] Mulvey, J. (1978) "Pivot strategies for primal simplex network codes", *Journal of the Association for Computing Machinery*, 25, 266-270.