Universidade Federal Fluminense – Instituto de Computação IC/UFF
Pós-Graduação em Computação **Prof. Carlos Alberto Martinhon**

Algoritmos Randômicos e Aproximativos - Lista 3

01 – Seja S_n o conjunto de todas as permutações de n elementos. Lembre-se da definição de determinante (vide Seção III.4.4.2 da Apostila), que o sinal da permutação $s \in S_n$ é definido por $sinal(s)=(-1)^t$, onde t representa o número de inversões para se obter s a partir da permutação identidade $s_I=(1,2,..,n)$. Construa um algoritmo que determine o número de inversões t em uma permutação qualquer de n elementos. Qual a sua complexidade?

02 – Considere o procedimento *LazySelect* (Seção III.4.3.1)

a) Mostre que $n^{3/4} log n \in o(n)$.
b) Mostre que $x(1-x)<1/4$, " $x \in [0,1]$.
c) Considere a seguinte lista $S=\{1,4,1,10,7,6,11,15,12,14,20\}$ c/ 11 elementos e $k=6$. Execute uma iteração do algoritmo *LazySelect* retornando $S(k)$. A solução obtida em seu exemplo está correta?
d) Mostre que o tempo esperado do procedimento *LazySelect*-Las Vegas é igual a $2n+o(n)$.

03 – Seja $0 < e_2 < e_1 < 1$. Considere que o método de Monte Carlo tenha sido utilizado na solução de um determinado problema P. Se a probabilidade de acerto é de pelo menos $1-e_1$, independentemente da entrada de dados, calcule o número de execuções necessárias para que a probabilidade de acerto seja de pelo menos $1-e_2$?

04 – Seja $G=(V,E)$ um multigrafo conexo não-orientado. No problema do corte-mínimo entre dois vértices $s,t \in V$ deseja-se determinar a cardinalidade do menor corte $c(V_1, V_2)$ tal que $s \in V_1$ e $t \in V_2$. Mostre que o problema do corte-mínimo em G pode ser solucionado através de um número polinomial do chamadas do procedimento que calcula o corte-mínimo entre s e t.

05 – a) Mostre que $\left(1-\frac{1}{k}\right)^k < \frac{1}{e}, \quad \forall k>0.$ (**Sugestão:** Prove inicialmente que $1+x<e^x$, $\forall x \in \Re$).

b) Mostre que $\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-1} > \frac{1}{e}, \; \forall k>0.$

06 – Utilizando uma fonte de *bits* não-viciados gerados aleatoriamente, construa um algoritmo que simule o resultado da soma de dois dados equilibrados jogados aleatoriamente. Calcule o número esperado de *bits* gerado por seu algoritmo.

07 – Considere o seguinte problema de decisão: Dados 3 matrizes de ordem n, A, B e C, o produto $AB \neq C$? Mostre que este problema pertence à classe RP dos problemas de decisão.

08 – Considere um algoritmo randômico A que sorteie *bit* 0 c/ probabilidade p (onde $0 < p < 1$) e sorteie *bit* 1 com probabilidade $1-p$. Construa um outro algoritmo A' (utilizando A como subrotina) que sorteie 0 ou 1 com igual probabilidade. Qual o tempo esperado de A' como função de p?

09 – Considere novamente o problema dos marinheiros estudado na Seção II.5 (Exemplo II.9). Mostre que a probabilidade de nenhum marinheiro encontrar sua própria cabine se aproxima de $1/e$ quando o número de marinheiros tende a infinito.

10 – Suponha que n dados equilibrados sejam jogados simultaneamente em uma mesa. Um dado será retirado sempre que o número 6 for obtido. Quantas rodadas deverão ser executadas até que todos os dados tenham sido retirados?

11 – Considere a seguinte restrição: $\sum_{i=1}^{k} \hat{x}_i \geq 1, \quad para\ \hat{x}_i \in [0,1]$. Mostre que: $\prod_{1=1}^{k} (1-\hat{x}_i) \leq \left(1-\frac{1}{k}\right)^{ki}$.

NOTA: A lista pode ser discutida em conjunto mas cada aluno deverá entregar sua própria resolução (s/ copiar do colega!).