XXXIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional

Carlos Alberto Martinhon

ALGORITMOS RANDÔMICOS EM OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA

mart@dcc.ic.uff.br

Universidade Federal Fluminense- UFF
Instituto de Computação - IC

Tópicos Principais

1) **Conceitos Básicos:**
   Complexidade de Algoritmos e Probabilidade;

2) **Introdução aos Métodos de Monte Carlo e Las Vegas;**
   Aplicações: Corte mínimo, *Quicksort,* etc.

3) **Classes de Complexidade:**
   P, NP, ZPP, RP, co-RP, BPP, PP.

4) **Algoritmos Aproximativos Determinísticos**
   Definições básicas, Caixeiro Viajante;

5) **Algoritmos Randômicos Aproximativos;**
   MAX-SAT, *Set Covering Problem*

6) **Construção Probabilística de Algoritmos Determinísticos (*Derandomization*).**
   MAX-SAT, *Set Covering Problem*

Complexidade de Algoritmos

Avaliação de desempenho
Parâmetros: tempo e espaço

Função de tempo: $T: tam(P) \rightarrow Z^{+}$

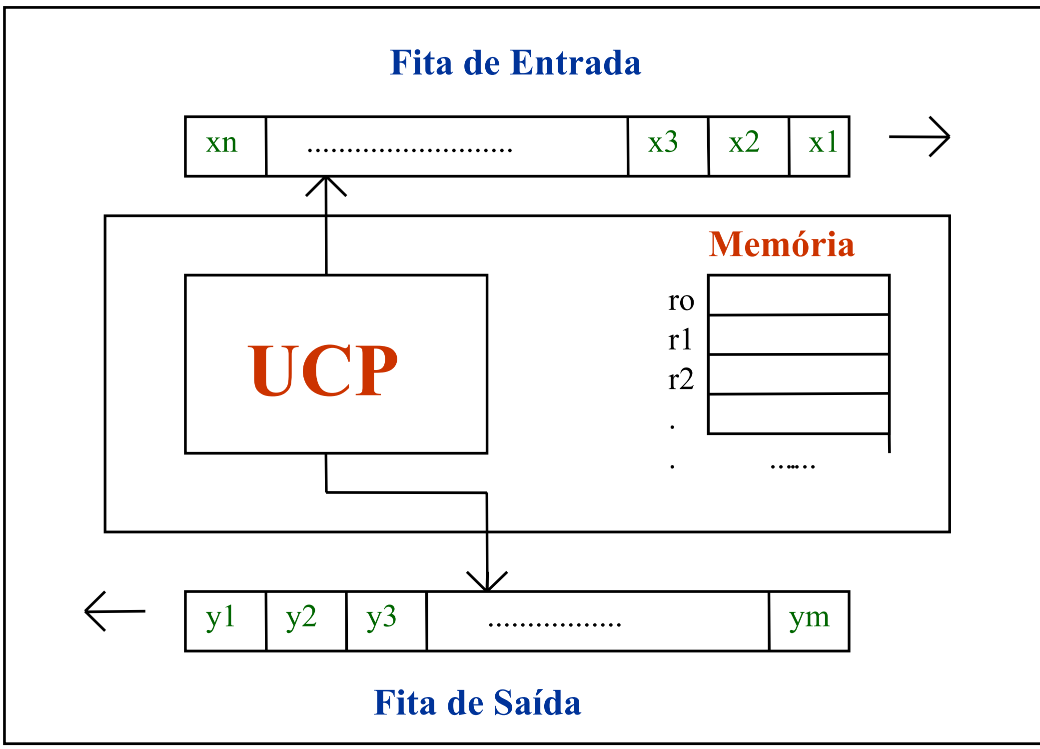
$$T = \sum_{j} k_{j} . t(\sigma_{j})$$

onde *kj* é n. de repetições da instrução σj

O tempo de processamento depende:

- **Máquina utilizada,**
- **Dados de entrada,**
- **Taxa (Tempo x Tamanho)**

Máquina RAM Probabilística
(*Random Access Machine*)

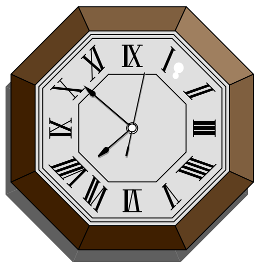


- **Polin. equiv. à Máquina de Turing**
- **Trabalha apenas c/ n. inteiros!**
- **Operações aritméticas:**

  +, -, x, /, sqrt(x), <

- **Pr(*bit* =1) = Pr(*bit*=0) = ½.**

Medidas de Tempo



$$T: tam(I) \rightarrow Z^{+}$$

$$M = \{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$$

$$t(E_i) \rightarrow tempo\ \ da\ \ entrada\ \ E_i$$

$$tam(E_1) = \ldots = tam(E_m) = n$$

$$\Pr(E_i) \rightarrow prob.\, da\, entrada\, E_i$$

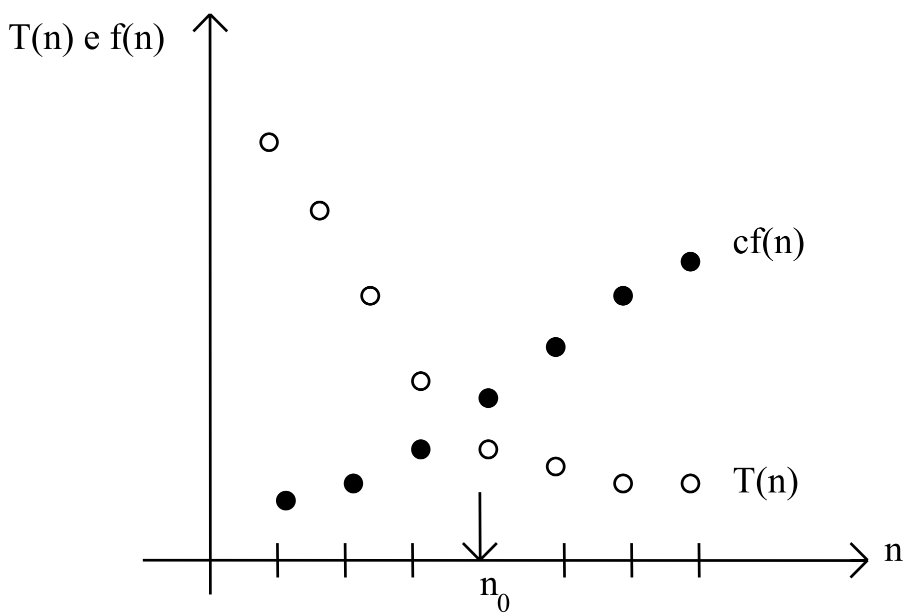
$$T = \min_{1 \le i \le m} \{t(E_i)\} \rightarrow$$ **melhor caso**

$$T = \max_{1 \le i \le m} \{t(E_i)\} \rightarrow$$ **pior caso**

$$T = \sum_{1 \le i \le m} \Pr(E_i).t(E_i) \rightarrow$$ **caso médio**

Complexidade Assintótica

$$O(f(n)) = \{T(n) : \exists\ c, n_0 \ \text{ t.q. } 0 \leq T(n) \leq c.f(n) \quad \forall\ n \geq n_0\}$$



$$\textbf{Prop.:} \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad O(f(n)) \subseteq O(g(n))$$

$$O(1) \subset O(\log n) \subset O(n) \subset O(n^2) \subset \ldots \subset O(2^n) \subset O(n!) \subset \ldots$$

Complexidade Assintótica (cont.)

o(f(n)) = {T(n): ∀ c, ∃ n_0 t.q. 0 ≤ T(n) < c.f(n) ∀ n≥ n_0}

Prop.: $$\lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{f(n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad T(n) \in o(f(n))$$

Exemplo:

$$7n^2 \in O(n^2)\; e\; O(n^3) \quad mas \quad 7n^2 \notin o(n^2)$$

Ω(f(n)) = {T(n): ∃ c, n_0 t.q. T(n)≥ c.f(n) ∀ n≥ n_0}

Prop.: $$\lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{f(n)} = +\infty \quad \Rightarrow \quad T(n) \in \Omega(f(n))$$

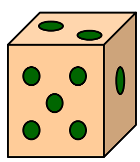
Tópicos em Probabilidade

Seja ε um experimento:

$\Omega \rightarrow$ **possíveis resultados de ε**

$A \subseteq \Omega \rightarrow$ **evento**

Exemplo: Jogar um dado e observar o resultado.



$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$A1 = \{1,3,5\} \rightarrow$ **núm. ímpares**

$A2 = \{2,4,6\} \rightarrow$ **núm. pares**

σ-Álgebra

Seja ψ uma coleção de subconj. de 2^{Ω}

Então ψ é σ-Álgebra see:

$$a)\ \Omega \in \Psi$$

$$b)\ A \in \Psi \Rightarrow A^c \in \Psi$$

$$c)\ A_i \in \Psi \Rightarrow \left(\bigcup_i A_i\right) \in \Psi$$

Exemplo: $\Omega = \{0,1,2,3\}$

$2^{\Omega} = \{\varnothing;\ \{0\};\ \{1\};\ \{2\};\ \{3\};\ \{0,1\};\ \{0,2\};\ \{0,3\};\ \{1,2\};\ \{1,3\};\ \{2,3\};\ \{0,1,2\};\ \{0,1,3\};\ \{1,2,3\};\ \Omega\}$

$\Psi 1 = \{\varnothing;\ \{0\};\ \{1\};\ \{0,1\};\ \{2,3\};\ \{0,2,3\};\ \{1,2,3\};\ \Omega\}$

$\Psi 2 = \{\varnothing;\ \{0\};\ \{1\};\ \{0,1\};\ \{1,3\},\ \{2,3\};\ \{0,2,3\};\ \{1,2,3\};\Omega\}$

Espaço de Probabilidade

Seja ψ uma coleção (σ-álgebra) de subconj. de 2^{Ω}. Então Pr:Ψ→[0,1] é medida de probab., see:

$a)\ \Pr(A) \geq 0, \quad \forall A \in \Psi$

$b)\ \Pr(\Omega) = 1,$

$c)\ Se\ \ A_1, A_2, \ldots \in \Psi\ \ e\ \ A_i \cap A_j = \varnothing\ \ p/\, i \neq j$

$$então:\ P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \Pr(A_i)$$

O trio (Ω,Ψ,Pr(.)) define um espaço de probabilidade see:

a) Ω≠∅ é espaço amostral
b) Ψ é σ-álgebra de subconj. de Ω
c) Pr:Ψ→[0,1] é medida de probab.

Espaço de Probabilidade $(\Omega,\Psi,\Pr(.))$

Propriedades:

$$a)\ \ A_1 \subseteq A_2 \ \Rightarrow \Pr(A_1) \leq \Pr(A_2)$$

$$b)\ \ \Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$$

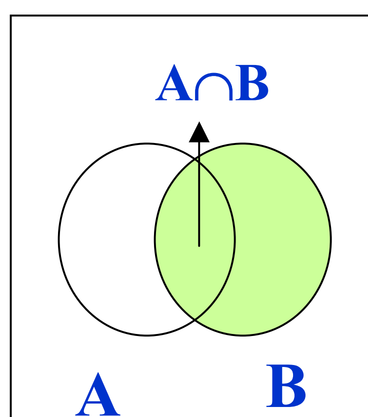
$$c)\ \ P\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i \Pr(A_i)$$

etc.

Probabilidade Condicional

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}, \ \ A \in \Psi.$$

onde $B \in \psi$ e $\Pr(B) > 0$

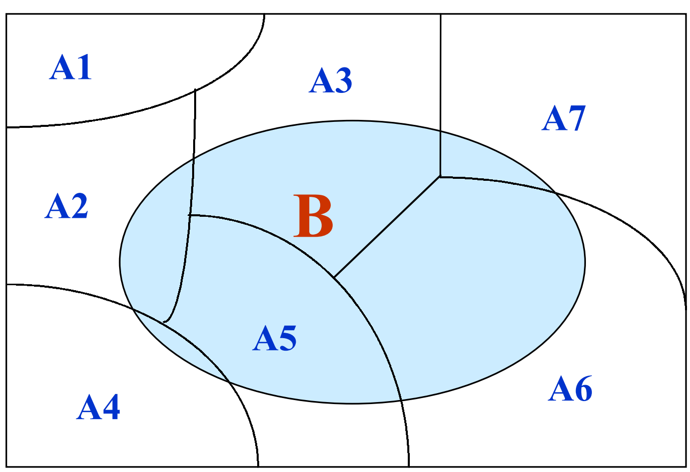


Espaço de Probabilidade $(\Omega,\Psi,\Pr(.))$

Probabilidade Composta:

$$\Pr(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \Pr(A_1).\Pr(A_2 \mid A_1)\ldots.\Pr(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Probabilidade Absoluta:



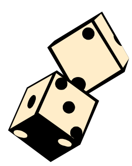
$$\Pr(B) = \sum_i \Pr(A_i).\Pr(B \mid A_i),\ \forall\ B \in \Psi.$$

Independencia entre Eventos

Espaço de Probabilidade $(\Omega,\Psi,Pr(.))$

$$Pr(A\cap B) = Pr(A).Pr(B|A)=Pr(A).Pr(B)$$

Exemplo:



A = {o primeiro dado retorna par}
B = {o segundo dado retorna 5 ou 6}

$$\Omega = \{(x,y): 1\leq x\leq 6 \text{ e } 1\leq y\leq 6\}$$

$$Pr(A) = 18/36 = 1/2$$
$$Pr(B) = 12/36 = 1/3$$
$$Pr(B|A) = Pr(B) = 12/36 = 1/3$$

$$Pr(A\cap B) = Pr(A).Pr(B) = 1/6$$

Espaço de Probabilidade $(\Omega, \Psi, Pr(.))$

Variáveis Aleatórias Discretas

$$X : \Omega \rightarrow R_x$$

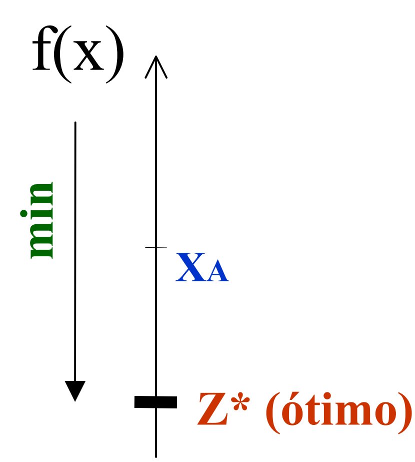
$$R_x = \{x_1, x_2, \ldots\} \quad onde \quad x_i \in \Re$$

Exemplo:

(PLI)

$Z^* = \min f(x)$

s.a $x \in S$



A é algoritmo randômico

$X_A \rightarrow$ possíveis soluções do PLI

$X_T \rightarrow$ tempo de execução

Função densidade de probabilidade

X é var. aleatória (infinitos valores).

Pr: Rx→[0,1] ↔ Pr(X = x_i) = Pr(x_i)

$$a)\ \Pr(x_i) \geq 0 \quad p/\ \ i = 1,2,\ldots$$

$$b)\ \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(x_i) = 1$$

[x_i, Pr(x_i)] → dist. de probabilidade

Experimento: Duas moedas equilibradas são jogadas. Qual o núm. de caras?

Ω = {KK, KC, CK, CC}

X(KK)=2, X(KC)=X(CK)=1, X(CC)=0

Pr(X=2) = ¼ , Pr(X=1) = ½ , Pr(X=0)= ¼

Valor Esperado

X é var. aleatória discreta

$X:\Omega \rightarrow R_X$ (R_X é conj. enumerável)

Pr: $R_X \rightarrow [0,1]$

$$E(X) = \sum_i x_i . \Pr(x_i)$$

Se R_X é infinito então a série converge absolutamente

Linearidade do Valor Esperado:

a) $E(cX+Y) = c.E(X)+E(Y)$, c é const.
b) $E(X_1+...+X_n) = E(X_1)+...+E(X_n)$

Distribuições de Probabilidade

Distribuição de Bernoulli

X é var. aleatória c/ parâmetro *p*

$$\Pr(X=1) = p, \quad \Pr(X=0) = 1-p$$

$$E(X) = 1.\Pr(X=1) + 0.\Pr(X=0) = p$$

Distribuição Binomial

Evento A $\rightarrow$ Pr(A) = *p*

X $\rightarrow$ *n.* de ocorrências de A em *n* repetições do experimento

$$\Pr(X = k) = \binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}, \; onde \;\; k = 1,2,\ldots.,n$$

X é var. aleatória c/ parâmetros *n* e *p*

$$E(X) = n.p$$

Distribuições de Probabilidade

Distribuição Geométrica

Evento $A \rightarrow$ ocorre c/ prob. p

$X \rightarrow$ n. de repetições do experimento até que A ocorra.

$$\Pr(X = k) = (1-p)^{k-1}.p \quad onde \quad k = 1,2,\ldots$$

X é var. aleatória c/ parâmetro p

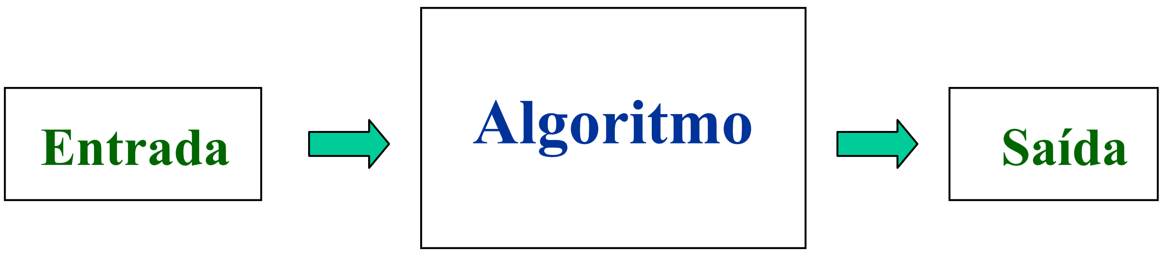
$$E(X) = 1/p$$

Experimento: Jogar um dado equilibrado e observar o resultado.

Evento $A \rightarrow$ ocorre se obtemos o núm. 3

$$\Pr(A) = \mathrm{p} = 1/6 \quad \text{e} \quad \mathrm{E}(X) = 1/\mathrm{p} = 6$$

Algoritmos Determinísticos

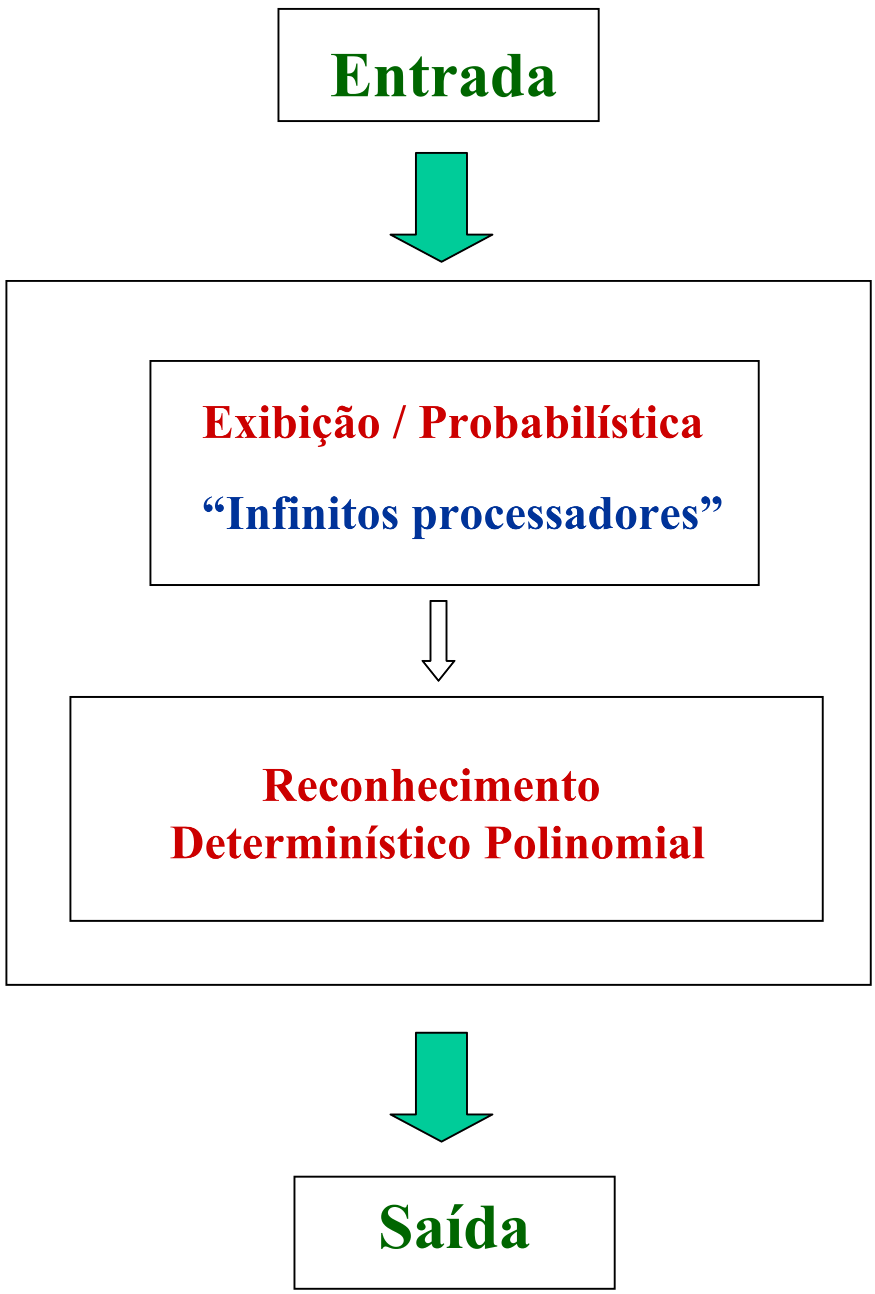


Características:

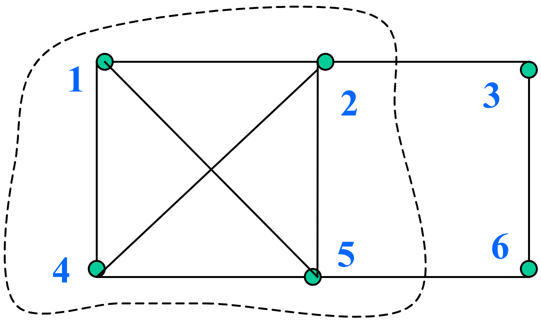
a) O comportamento sempre previsível p/ uma entrada fixa;

b) A análise de desempenho é realizada avaliando-se, normalmente, o *comportamento médio* ou *pior caso* entre todas as entradas.

Algoritmos Não-determinísticos Polinomiais



Clique (Decisão)



Dados: G e k$\in Z^+$

$\exists$ Clique de tam. $\geq$ k?

Procedimento: Clique não-determinística;

Início

Para i=1 **até** k **faça** {exibição}

c(i) $\leftarrow$ escolha{1,..,n};

Para i=1 **até** k-1 **faça** {reconhec.$O(n^2)$}

Para j=i+1 **até** k **faça**

Se A[c(i),c(j)] = 0 **então**

***FRACASSO*;**

***SUCESSO*;**

fim.

Algoritmos Randômicos

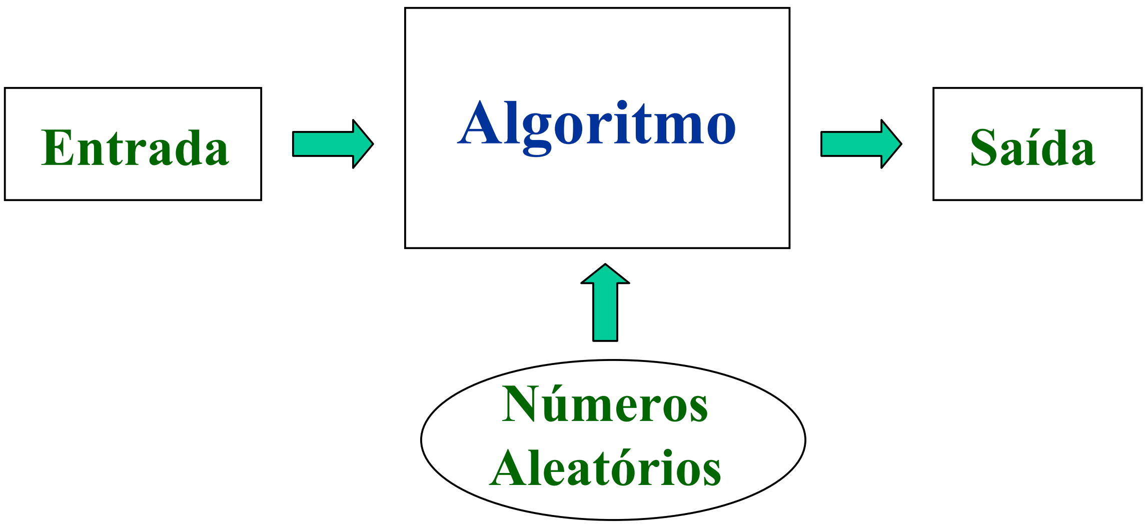
Teoria de Probabilidade + **"Chutes" inteligentes**

Núm. limitado de processadores

Desejamos melhor desempenho

- **Simplicidade**
- **Menor complexidade**

Algoritmos Randômicos



Características:

a) O comportamento pode variar mesmo para uma entrada fixa;

b) Deveremos avaliar o *tempo esperado* de processamento em função do tamanho do problema;

Complexidade de Caso Médio

Entrada Aleatória → **Algoritmo Determinístico** → **Saída Distrib.**

Não confundir com *tempo esperado* de processamento!!

Observação:

a) As entradas são definidas a partir de uma distribuição de probabilidade conhecida;

b) A complexidade média é obtida avaliando-se o *tempo médio* entre todas as saídas

Métodos de Monte Carlo e Las Vegas

Monte Carlo: **O algoritmo executa um número finito de passos e produz uma solução correta com probabilidade $\geq$ 1/2.**

Las Vegas: **O algoritmo sempre produz uma solução correta. O tempo é definido por uma variável aleátoria com valor esperado limitado por uma função** ***preferencialmente*** **polinomial.**

Monte Carlo
e
Las Vegas

Observações:

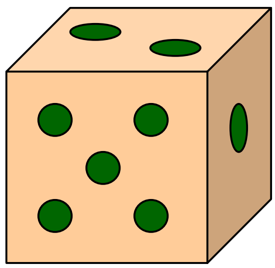
a) O desempenho não depende da entrada;

b) Repetições independentes do algoritmo de Monte Carlo reduzem a probabilidade de falha exponencialmente;

c) Simplicidade e performance.
Para muitos problemas, os algoritmos randômicos são os mais simples, mais rápidos, ou ambos.

Síntese

Las Vegas



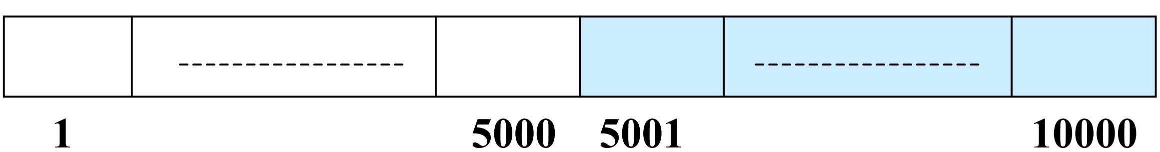
Evento Y → obtemos n. 2
X → núm. de jogadas

Dist. Geométrica

$Pr(Y=1) = 1/6 \Rightarrow E(X) = 6$

Monte Carlo

50% maiores



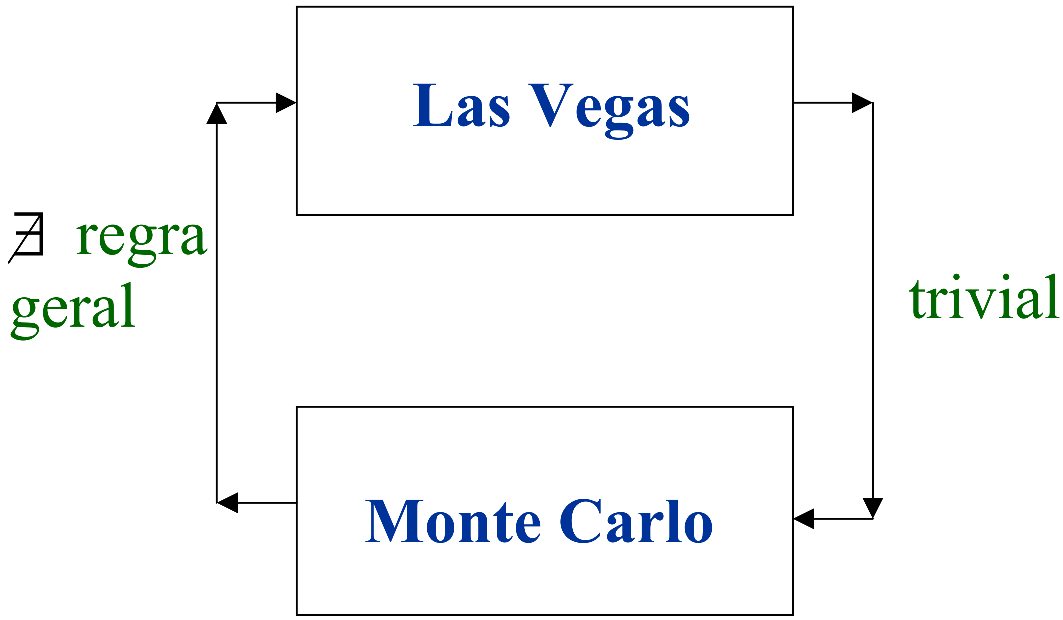
Determinístico: 5000 comparações

Randômico: c/ apenas 10 comparações

$$Pr(\text{falha}) = \frac{1}{2^{10}} = 0{,}0009765\,!!!$$

Conversão

Las Vegas ⟺ Monte Carlo



Las Vegas ⟹ Monte Carlo

Interrompe o processamento do algoritmo de Las Vegas (após tempo esperado)

Monte Carlo ⟹ Las Vegas

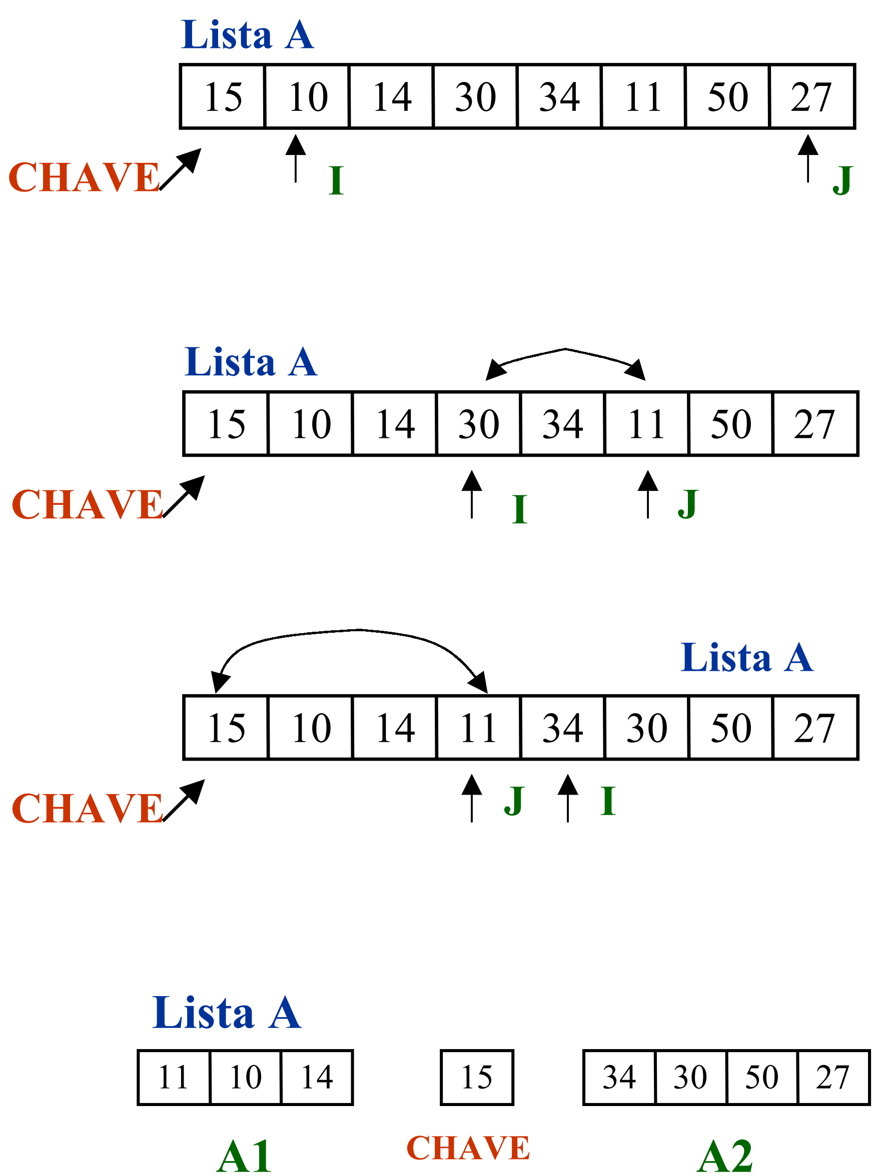
$p(n) \rightarrow$ prob. de sucesso
$T_1(n) \rightarrow$ execução de MC
$T_2(n) \rightarrow$ checagem

Complexidade

$$O\left(\frac{T_1(n) + T_2(n)}{p(n)}\right)$$

Las Vegas

Prob. de Ordenação: *Quicksort Determinístico*



Problema de Ordenação

Complexidade: *Quicksort* (Pior Caso)

$$\begin{cases} T(0) = 0,\ T(1) = 0,\ T(2) = 1 \\ T(n) = T(n\text{-}1) + \underbrace{T(0)}_{0} + cn \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= cn + T(n-1) \\ &= cn + c(n-1) + T(n-2) \\ &= cn + c(n-1) + c(n-2) + T(n-3) \end{aligned}$$

Após k passos:

$$T(n) = c\sum_{i=3}^{n} i + T(2) = c\left(\frac{n(n+1)}{2} - 3\right) + 1$$

Finalmente:

$$\boxed{T(n) = O\left(n^2\right)}$$

Las Vegas (Ordenação)

***Quicksort* Randômico:**
O elemento *CHAVE* é selecionado aleatóriamente (Dist. Uniforme)

Complexidade esperada:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se comparamos } A[i] \text{ c/ } A[j] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i<j} X_{ij}$$

Y é número total de comparações

Da linearidade do valor esperado:

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i<j} X_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i<j} E(X_{ij})$$

Quicksort Randômico (cont.)

$p_{ij} \rightarrow$ **Prob. de comparação entre A[i] e A[j]**

$$E\left(X_{ij}\right) = 1.p_{ij} + 0.(1 - p_{ij}) = p_{ij}$$

Entretanto: $p_{ij} = ?$

Lista "virtual" ordenada

---------	$A[i]$	-----------	$A[j]$	-----------
	i		***j***	

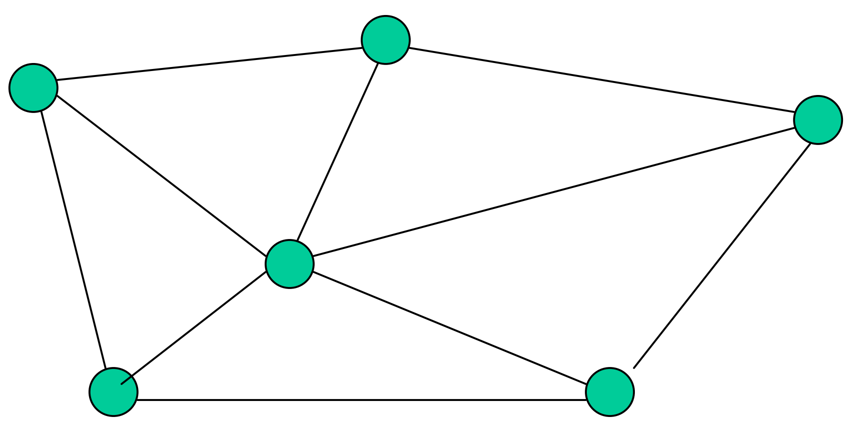
$$\boxed{p_{1n} = 2/n \qquad\qquad p_{ij} = 2/(j-i+1)}$$

$$E\left(Y\right) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{i<j} E(X_{ij}) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{i<j}\frac{2}{j-i+1} \leq$$

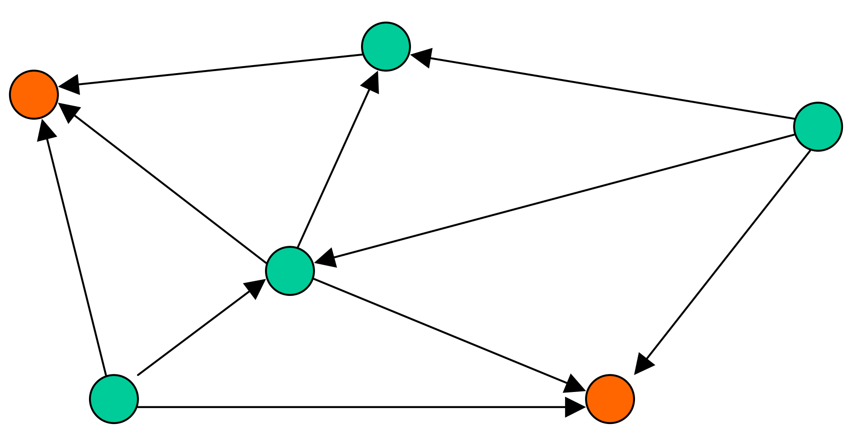
$$\leq n.\sum_{j=2}^{n-1}\frac{2}{j} \cong 2n\ln n = O(n\log n)$$

Las Vegas

Problema: Geração de orientações acíclicas em grafos.



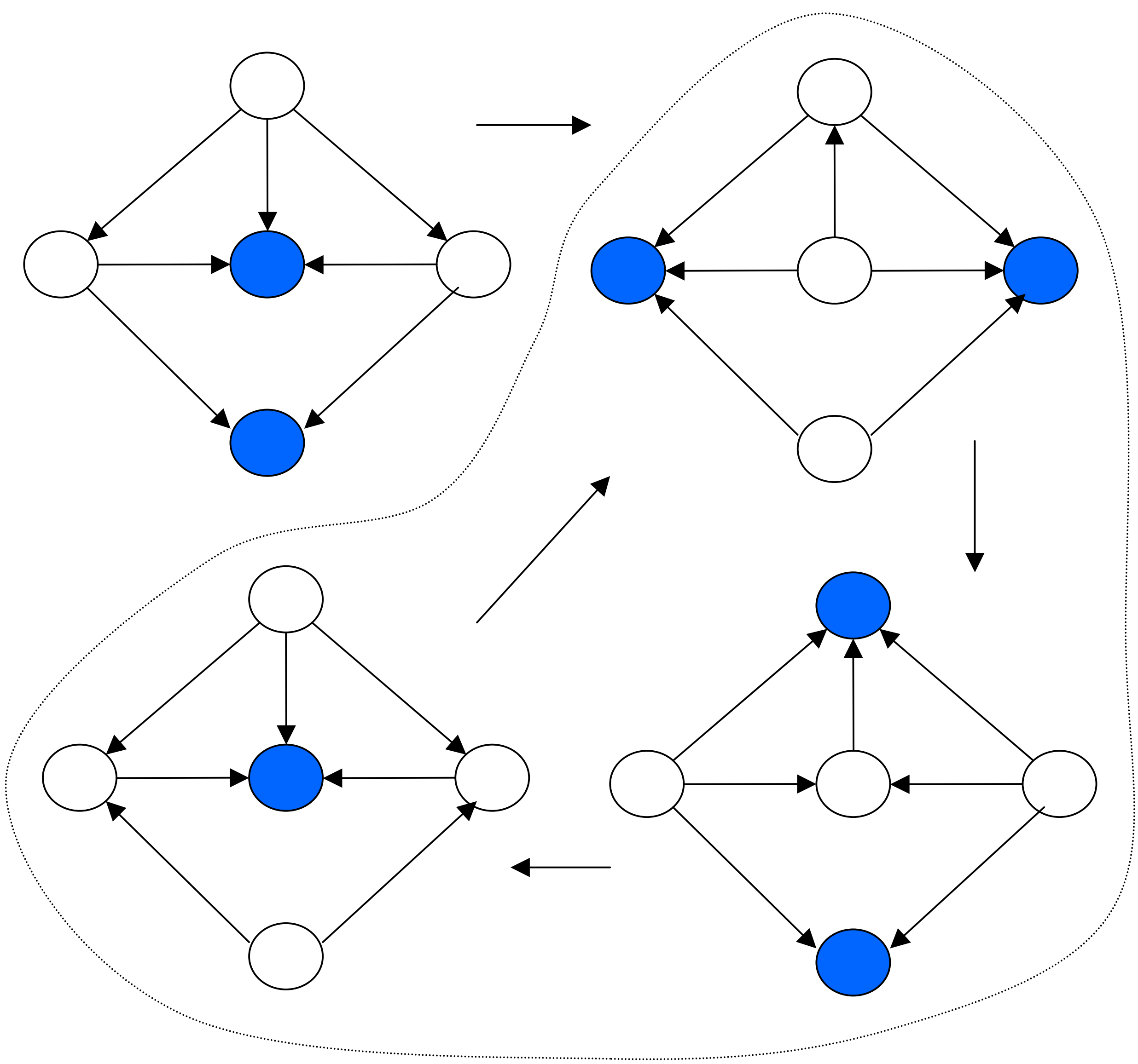
Grafo original (não-orientado)



Grafo orientado – acíclico

Concorrência em Sistemas Distribuídos Anônimos

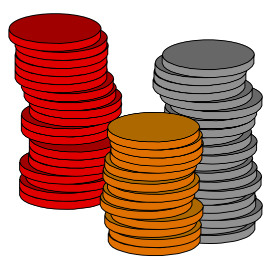
Escalonamento por Reversão de Arestas - ERA



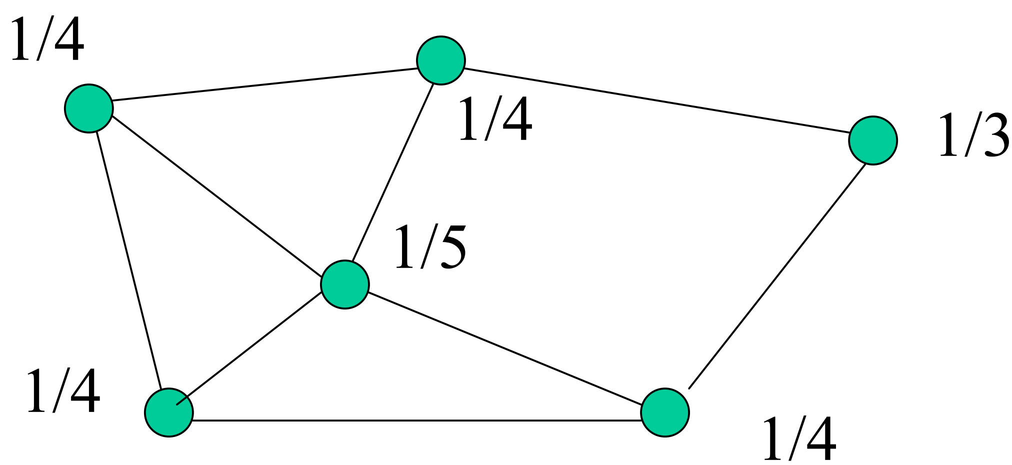
NP-Árduo !! **$m=1$, $p=3$, $\gamma^*=1/3$**

Geração de Orientações Acíclicas em Sistemas Distribuídos

A. Calabrese, F. França [1994]



$$\Pr\left(d_i = 1\right) = \frac{1}{\left|\mathrm{N}(i)\right| + 1}$$



Se G completo: Pr(d_i=1) = 1/n.

a) Moedas equilibradas $O(2^n)$

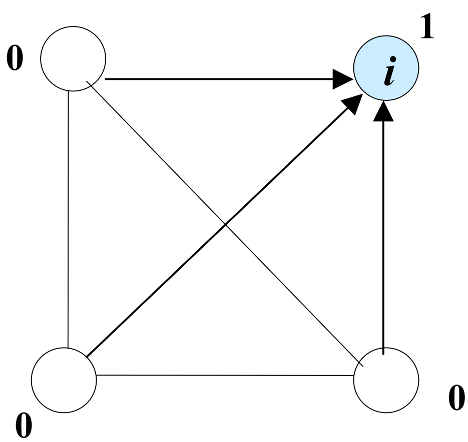
b) Moedas viciadas $O(n.e)$

A. Calabrese, F. França [1994]

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$$

S ocorre se algum nó é campeão

Si's são mutuamente excludentes!!



Grafo parcialmente orientado

(i, j, k, l)

Si

$$\left.\begin{array}{l}(1, 0, 0, 0)\\(0, 1, 0, 0)\\(0, 0, 1, 0)\\(0, 0, 0, 1)\end{array}\right\}\ \mathbf{S}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vdots\\(1, 1, 0, 0)\\\vdots\\(1, 1, 1, 1)\end{array}\right\}\ \overline{\mathbf{S}}$$

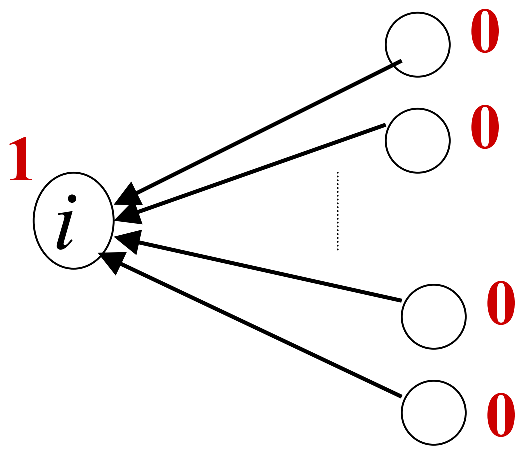
Possíveis configurações

Moedas equilibradas → $O(2^n)$

Moedas viciadas: → $O(n.e)$!!

A. Calabrese, F. França [1994]

Eventos Si



G é completo

Evento S

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$$

Si são mutuam. excludentes!

Moedas não-polarizadas: $\Pr(d_i = 1) = 1/2$

$$\Pr(S) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(S_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n}{2^n}$$

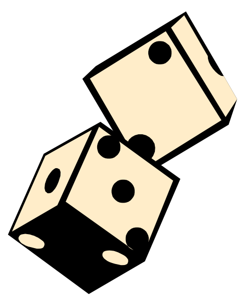
Moedas polarizadas: $\Pr(d_i = 1) = 1/\left(|\mathrm{N}(i)| + 1\right)$

$$\Pr(S) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(S_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \geq \frac{n}{n.e}$$

Geração de Orientações Acíclicas em Sistemas Distribuídos

G. Arantes Jr., F. França, C. Martinhon [2002]

http://www.ic.uff.br/PosGrad/reltec02.html



$f \geq 2$ **faces**

m **arestas**

G é um grafo conexo qualquer

a) Alg-viz: $f = n \quad onde \; |V| = n.$

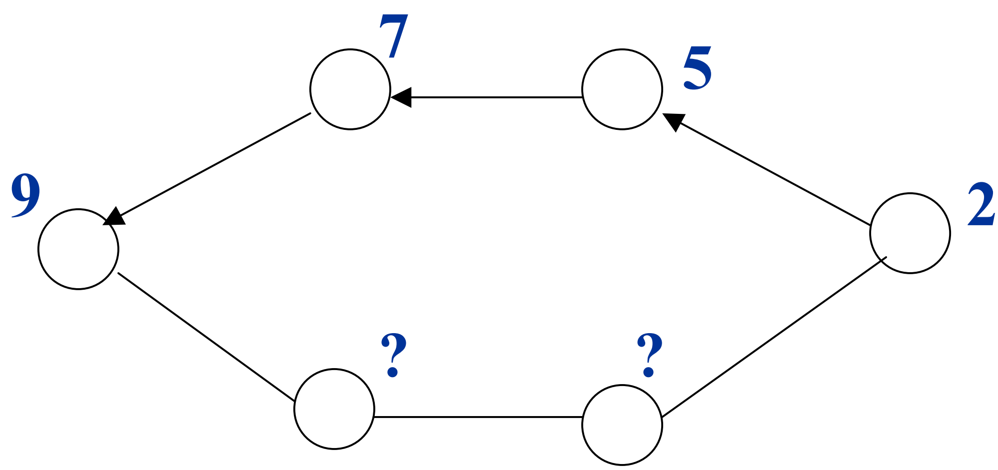
Tempo esperado $\rightarrow \; O(e.n)$

b) Alg-arestas:

Tempo esperado $\rightarrow \; O\left(\lceil \log_f m \rceil \right)$

Alg-Arestas

Convergência:



Teorema 4: **Alg-Arestas sempre gera orientações acíclicas em qualquer grafo $G=(V,E)$.**

Complexidade:

Questão: **Quantas repetições deverão ser realizadas até que todas as arestas tenham sido orientadas?**

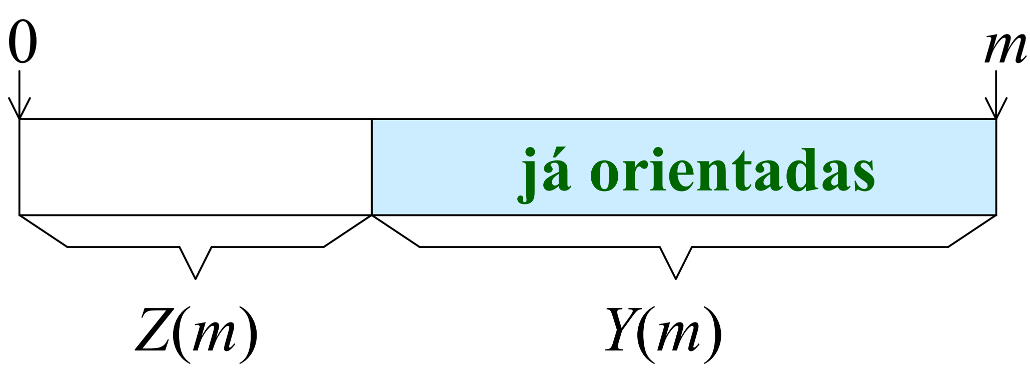
Alg-Arestas (cont.)

$X_{ij} \rightarrow$ **var. aleatória (0 ou 1) indicando se (i,j) foi ou não orientada.**

$\Pr(X_{ij} = 0) = 1/f$ **(fracasso)**

$\Pr(X_{ij} = 1) = 1 - 1/f$ **(sucesso)**

$Y(m) = \sum_{(i,j)\in E} X_{ij} \rightarrow$ **Y é var. aleatória c/ dist. binomial**



$E\big(Y(m)\big) = m(1 - 1/f) \longrightarrow$ **arestas orientadas**

$E\big(Z(m)\big) = m/f \longrightarrow$ **arestas não-orientadas**

Alg-Arestas (cont.)

$$\begin{cases} T(m) = a(m) + T(Z(m)) \\ T(1) = f/(f-1) \end{cases}$$

***m* potência de *f* !**

Substituímos Z(m) por E(Z(m))

$$\begin{aligned} T(m) &= T(m/f) + f/(f-1) \\ &= T(m/f^2) + 2f/(f-1) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= T(m/f^k) + kf/(f-1) \end{aligned}$$

Esperamos obter:

$$m/f^k = 1 \;\Rightarrow\; k = \log_f m$$

Logo:

$$\boxed{T(m) = (f/(f-1))\left(\log_f m + 1\right)}$$

P/ m qualquer:

$$f^{k-1} \le m \le f^k$$

$$\Rightarrow T(m) \le (f/(f-1))\left(\lceil \log_f m \rceil + 1\right)$$

Monte Carlo

Problema de decisão: AB = C?

Soluções determinísticas:

a) **Solução clássica** $\rightarrow \quad O(n^3)$

b) **Método de Strassen[1969]** $\rightarrow \quad O(n^{2,81})$

c) **Coopermith&Winograd[1987]** $\rightarrow \quad O(n^{2,37})$

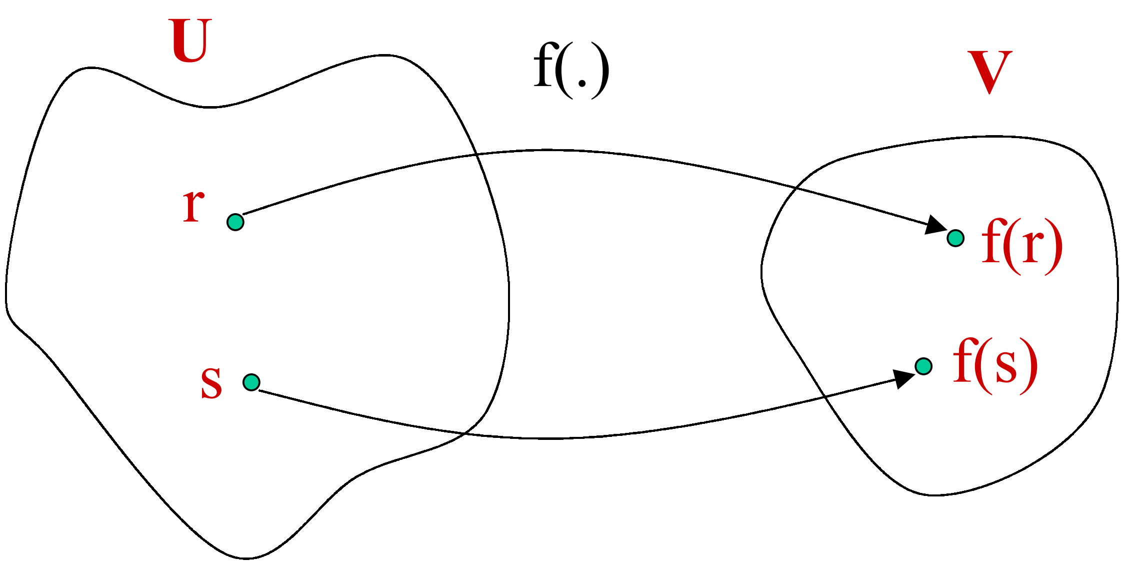
Solução probabilística:

Algoritmo de Freidvals[1979] $\rightarrow \quad O(n^2)$

Problema em aberto: Existe algoritmo determinístico polinomial $O(n^2)$?

Monte Carlo (cont.)

Impressão Digital (*Fingerprint*)



Questão: $\boldsymbol{r = s}$ **?** $\longrightarrow$ $O(log|U|)$ passos

$f\!:U \longrightarrow V$ é função randômica e $|U|>|V|$

Esperamos que $Pr(r = s)$ seja próxima de 1 quando $f(r) = f(s)$!

$\boldsymbol{f(r) = f(s)?}$ $\longrightarrow$ $O(log|V|)$ passos!

Algoritmo de Freidvals[1979]

Dados: A, B e C

1. Escolhe $x \in \{0,1\}^n$ aleatoriamente;
2. **Se** A(Bx) ≠ Cx **então**

    retorna (“AB ≠ C”);

    senão

    retorna (“AB = C”);

    fim.

Complexidade $\longrightarrow$ $O(n^2)$

Nota:

1) Se AB=C então ABx=Cx, ∀ x

Pr(ABx=Cx)=1 **(sucesso!)**

2) Se AB≠C poderemos ter ABx=Cx p/ algum x

Pr(ABx=Cx)≤1/2 **(fracasso!)**

Multiplicação de Matrizes (Decisão)

Teorema: Se AB≠C, e $x \in \{0,1\}^n$ é gerado aleatóriamente então Pr(ABx=Cx)≤1/2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \quad e \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ABx = Cx entretanto AB ≠ C!!

Repetições independentes do algoritmo de Freidvals (Monte Carlo) reduzem a probabilidade de falha exponencialmente!!

Se AB≠C então:

$$\Pr(ABx = Cx) = \frac{1}{2^k} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad k > \lceil \log(1/\varepsilon) \rceil$$

Complexidade $\longrightarrow$ $O(kn^2)$

Multiplicação de Matrizes (Decisão)

Algoritmo: Monte Carlo

Início

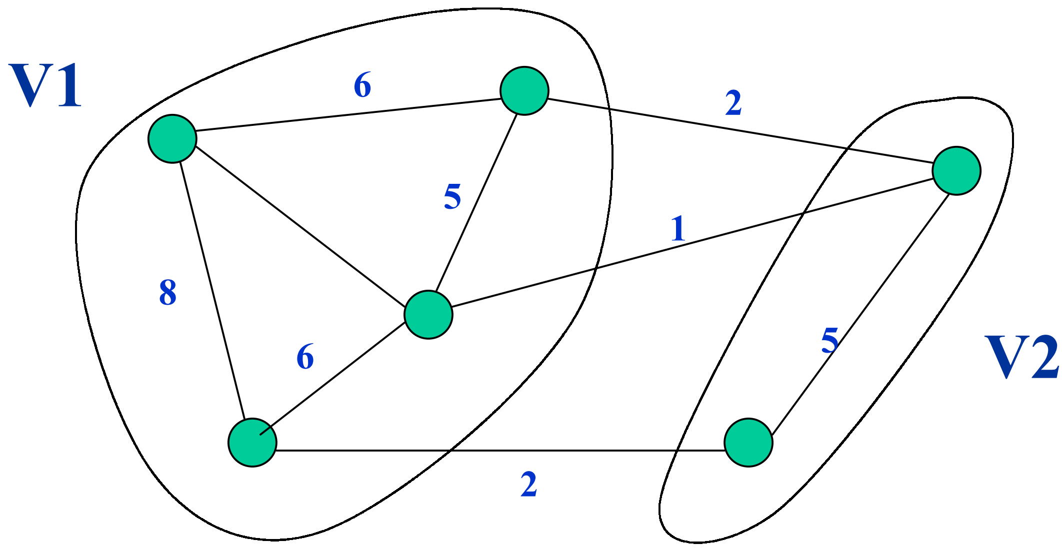
Leia (n,A,B,C,ε);
Finaliza ← falso;
k ← 1;
Repita
- “Chuta” $x_i \in \{0,1\}$ (p/ i=1,2,..,n)
- **Se** A(Bx) ≠ Cx **então**
  Finaliza ← verdadeiro;
- k ← k+1;

Até que $k = \lceil log(1/\varepsilon) \rceil$ **ou** Finaliza;
Se (Finaliza) **então**
- Retorna (AB ≠ C)

senão
- Retorna (AB = C);

Fim.

O Problema do Corte Mínimo em Multigrafos



Observações:

- **Custos positivos** $\rightarrow$ **Polinomial**
- **Custos negativos** $\rightarrow$ **NP-Completo !!**

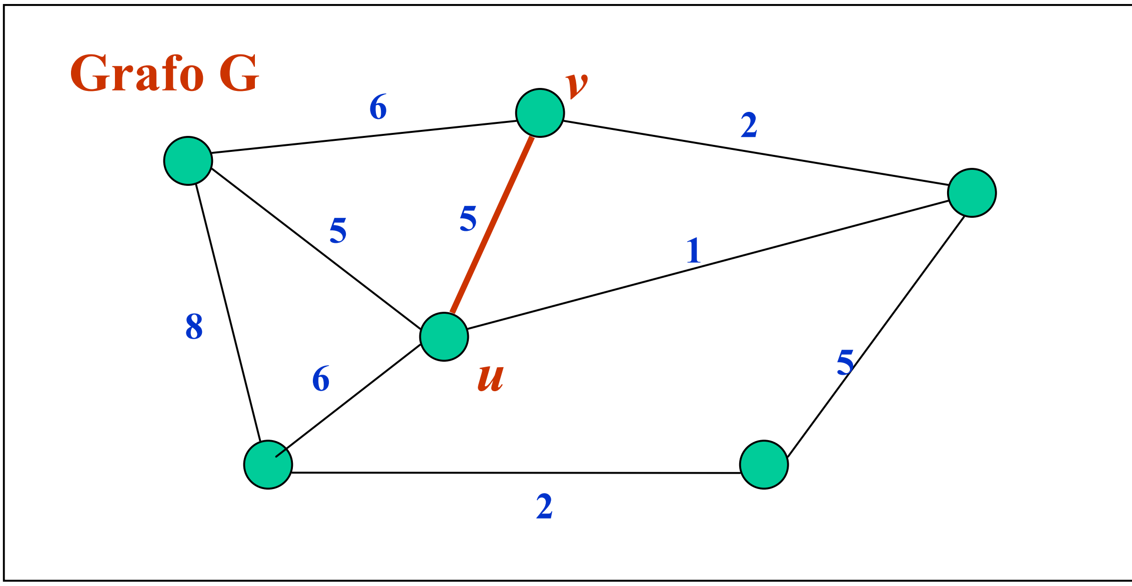
Hao&Orlin[1992]: (determinístico)

$$O\left(mn\log\left(n^2/m\right)\right)$$

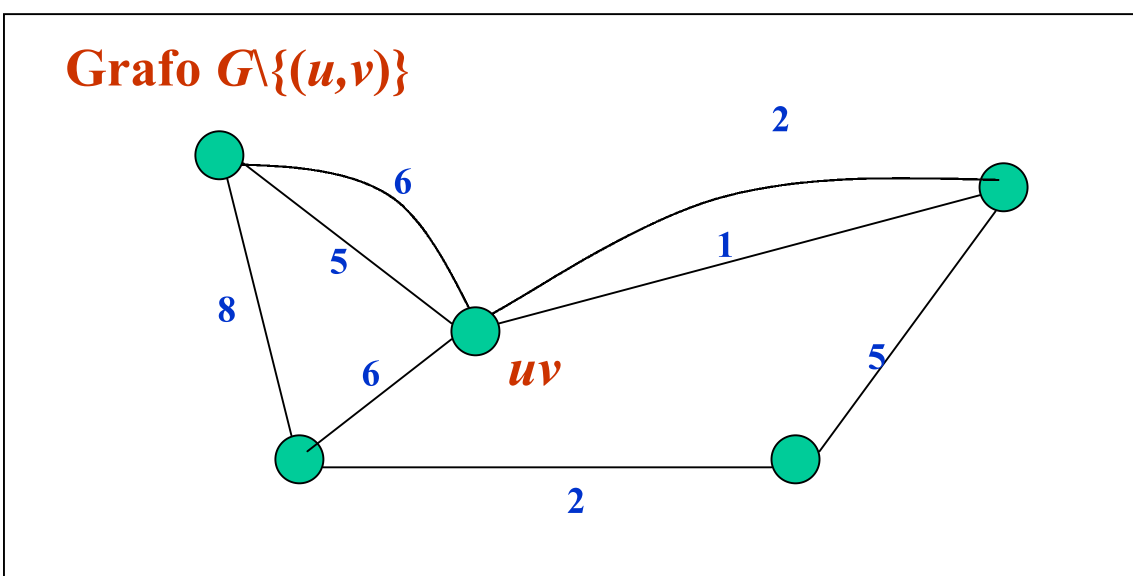
Karger&Stein[1993]: (probabilístico)

$$O\left(n^2\log^{O(1)} n\right)\ c/\ \ prob.\ de\ sucesso \geq \Omega(1/\log n)$$

Contração de Arestas

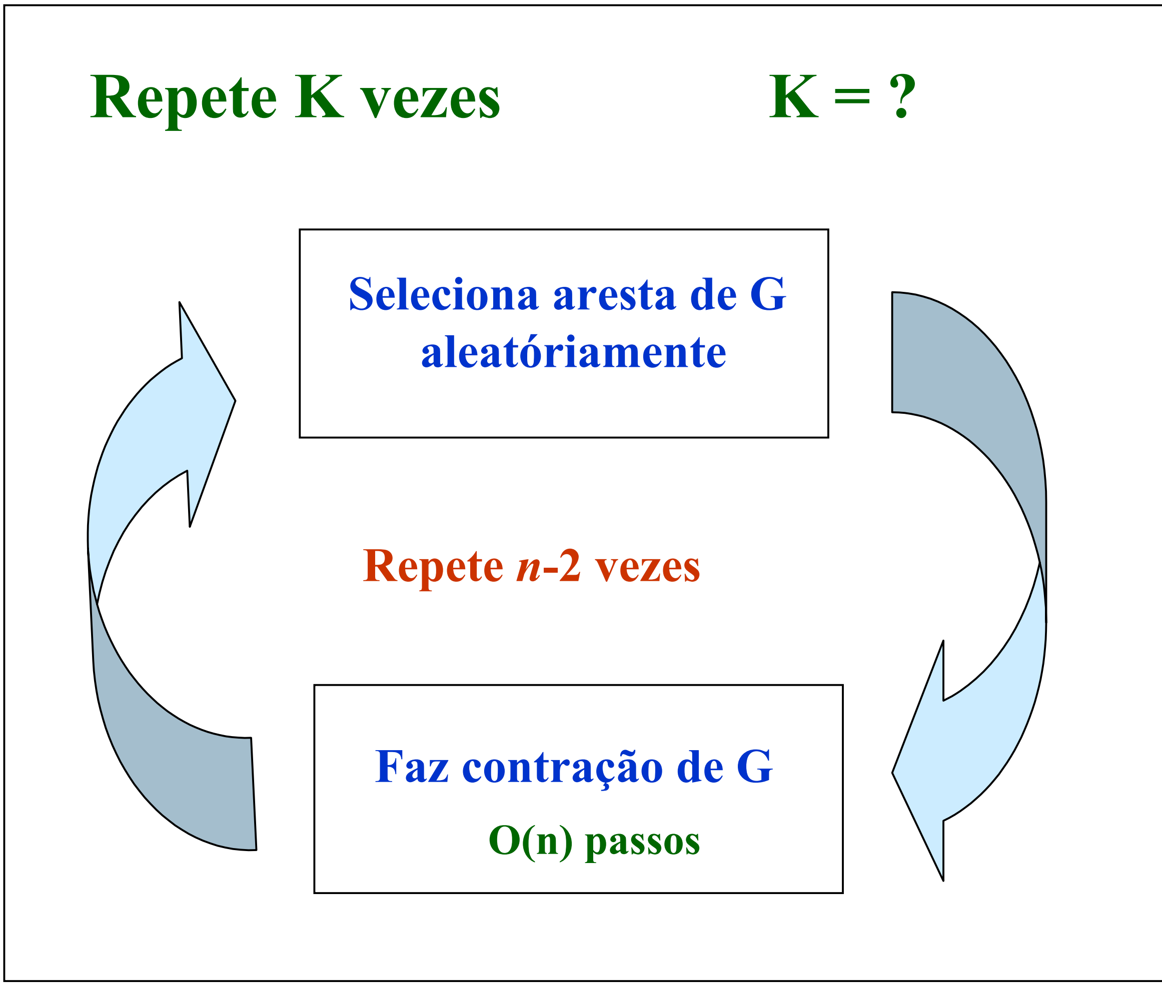


Seleciona (*u*,*v*) aleatóriamente



Contração de (*u*,*v*) $\rightarrow$ *O*(*n*)

Corte Mínimo Randômico



CM $\rightarrow$ **arestas do Corte Mínimo**

Ai $\rightarrow$ **nenhuma aresta de CM foi selecionada na i-ésima iteração** **(não são independentes !!)**

Sucesso!! $\longrightarrow$ $Y = \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i$

Corte Mínimo Randômico

Probabilidade de Sucesso ?

$$\Pr(Y) = \Pr(A_1).\Pr(A_2 \mid A_1).\Pr(A_3 \mid (A_1 \cap A_2)).....\Pr\left(A_{n-2} \mid \bigcap_{i=1}^{n-3} A_i\right)$$

$G_0 = (V_0, E_0)$ é grafo orig. e CM único

c = |CM|
$d(v)$ = grau de v
$|E_0| = m = m_0$
$|V_0| = n = n_0$

$$m = \frac{\sum_{v \in V} d(v)}{2} \geq \frac{cn}{2}$$

$\overline{A_1} \rightarrow$ **aresta de CM foi selecionada (passo 1)**

$$\Pr(\overline{A_1}) = \frac{c}{m} \leq \frac{c}{(cn/2)} = \frac{2}{n} \Rightarrow \Pr(A_1) \geq 1 - \frac{2}{n}$$

Corte Mínimo Randômico (cont.)

$G_1 = (V_1,E_1)$ $\rightarrow$ obtido após primeira contração

$$\Pr\left(A_2 \mid A_1\right) = ?$$

c **= |CM|**
d(v) **= grau de *v***
$|E_1| = m_1$
$|V_1| = n-1$

$$m_1 \geq \frac{c(n-1)}{2}$$

$\overline{A}_2 \rightarrow$ **aresta de CM foi selecionada (passo 2)**

$$\Pr\left(\overline{A}_2\right) = \frac{c}{m_1} \leq \frac{c}{(c(n-1)/2)} = \frac{2}{n-1} \;\Rightarrow\; \Pr\left(A_2\right) \geq 1 - \frac{2}{n-1}$$

Após i contrações conclui-se que:

$$\Pr\left(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right) \geq 1 - \frac{2}{n-i+1}$$

Corte Mínimo Randômico (cont.)

Probabilidade de Sucesso:

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right) \geq \prod_{i=1}^{n-2}\left(1-\frac{2}{n-i+1}\right) = \frac{n-2}{n}.\frac{n-3}{n-1}.\frac{n-4}{n-2}....\frac{1}{3} =$$

$$= \frac{(n-2)!}{(n!/2)} = \frac{2}{n(n-1)} \geq \frac{2}{n^2} = \Omega(n^{-2})$$

Probab. de Fracasso após $K = n^2/2$ **passos:**

$$\Pr(Fracasso) = \left(1-\frac{1}{(n^2/2)}\right)^K = \left(1-\frac{2}{n^2}\right)^{n^2/2} < \frac{1}{e}$$

O algoritmo tem complexidade $O(n^4)$ **e tem prob. de sucesso superior a** ***1-1/e ≅ 0,63***

Isso é bom ??

Corte Mínimo Randômico (cont.)

Nota: $1 + x < e^x, \quad \forall\, x \in \Re$ **(aprox. linear)**

$$(1+x)^{-\delta/x} < \left(e^x\right)^{-\delta/x} = e^{-\delta}$$

Considere:

$$x = -2/n^2 \quad \Rightarrow \quad n^2/2 = -1/x > 0$$

Probabilidade de Fracasso após $K = (n^2/2).\delta$ **passos:**

$$\left(1 - \frac{1}{(n^2/2)}\right)^K = \left(1 - \frac{1}{n^2/2}\right)^{(n^2/2).\delta} < \frac{1}{e^\delta}$$

Fazendo: $\delta = \log n$ **conclui-se que:**

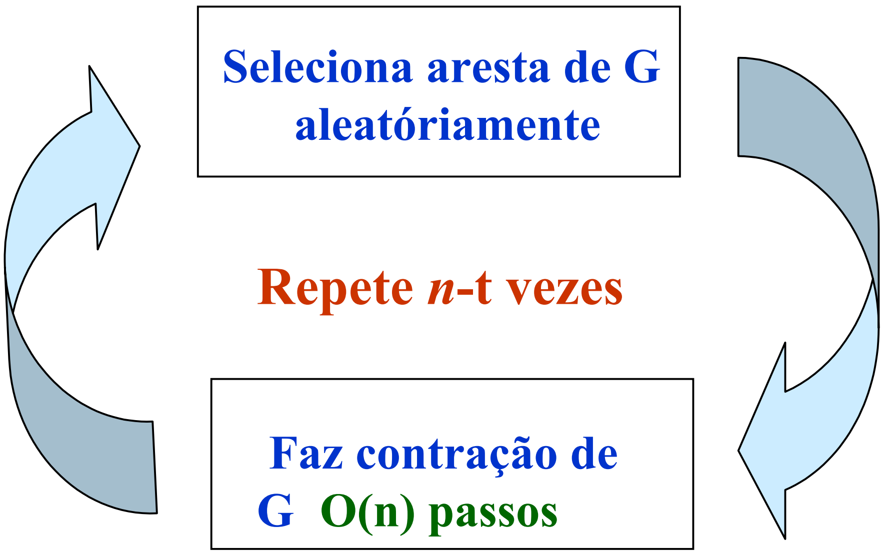
Complexidade $\rightarrow \quad O(n^4.\log n)$

Probabilidade de sucesso $\rightarrow \quad 1 - \dfrac{1}{e^{\log n}}$

P.ex.: n = 64 $\Rightarrow$ **Pr(sucesso) ≥ 99,7% !!**

Corte Mínimo Randômico (Versão 2)

Repete K vezes **K = ?**



Sobram t arestas !! → $O\left(t^3\right)$

CM $\rightarrow$ **arestas do Corte Mínimo**

Ai $\rightarrow$ **nenhuma aresta de CM foi selecionada na *i*-ésima iteração** **(não são independentes !!)**

Sucesso!! $\Pr(Y) = \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n-t} A_i\right) \geq \Omega\left(\left(\frac{n}{t}\right)^2\right)$

Corte Mínimo Randômico (Versão 2)

Sucesso!! $$\Pr(Y) = \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n-t} A_i\right) \geq \Omega\left(\left(\frac{n}{t}\right)^2\right)$$

Após $K = n^2 / t^2$ **repetições :**

Fracasso !! $$\Pr\left(\overline{Y}\right) = \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n^2/t^2} \leq \frac{1}{e}$$

Complexidade total:

$$O\left(\frac{n^2}{t^2}\left(n^2 + t^3\right)\right) = O\left(\frac{n^4}{t^2} + n^2 t\right)$$

Fazemos:

$$n^x = \frac{n^4}{t^2} \quad e \quad n^x = t.n^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{8}{3}}$$

Portanto $$O\left(n^{8/3}\right)$$

Classes de Complexidade

Alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$
Σ^* $\rightarrow$ conjunto de todas as ***strings***

Uma ***linguagem*** $L \subseteq \Sigma^*$ é qquer coleção de strings de Σ

$L = \{x \in \Sigma^*$: x satisfaz propriedade $\pi\}$

Reconhecimento da ***linguagem*** L $\longrightarrow$ Dado $x \in \Sigma^*$, $x \in L$?

Algoritmo A: (A decide $x \in \Sigma^*$)

$$\mathbf{A(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in L}$$
$$\mathbf{A(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \notin L}$$

Classes de Complexidade (cont.)

Classe P

$$L \in P \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \exists A \text{ polinomial tal que} \\ A(x) = 1 \text{ (se } x \in L \text{) ou} \\ A(x) = 0 \text{ (se } x \notin L \text{)} \\ \forall\, x \in \{0,1\}^* \end{array}$$

Classe NP

$$L \in NP \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \exists\ A \text{ polinomial tal que} \\ \forall\, x \in \{0,1\}^*: \\ \bullet\ x \in L \Rightarrow \exists y \in \Sigma^*,\ A(x,y) = 1 \\ \quad \text{e } |y| \text{ é polin. no tam. de x.} \\ \bullet\ x \notin L \Rightarrow \forall y \in \Sigma^*,\ A(x,y)=0 \end{array}$$

Classes de Complexidade (cont.)

Classe RP

$L \in RP \iff$ $\exists$A randômico polin. t.q:
- $Pr[A(x)=1] \geq 1/2$ (se $x \in L$)
- $Pr[A(x)=0]=1$ (se $x \notin L$)

$\forall\, x \in \{0,1\}^*$

Classe co-RP

$L \in co\text{-}RP \iff$ $\exists$ A randômico polin. t.q:
- $Pr[A(x)=1] = 1$ (se $x \in L$)
- $Pr[A(x)=0] \geq 1/2$ (se $x \notin L$)

$\forall\, x \in \{0,1\}^*$

Classe ZPP

$L \in ZPP \iff$ $\exists$ A randômico polin. t.q:
- $Pr[A(x)=1]=1$ (se $x \in L$)
- $Pr[A(x)=0]=1$ (se $x \notin L$)

$\forall\, x \in \{0,1\}^*$

Classes de Complexidade (cont.)

Multiplicação de Matrizes (Decisão)

MULT $\rightarrow$ **L = {** $x = \langle A,B,C\rangle : AB=C$ **}**

$$\boxed{\text{MULT} \in \text{co-RP}}$$

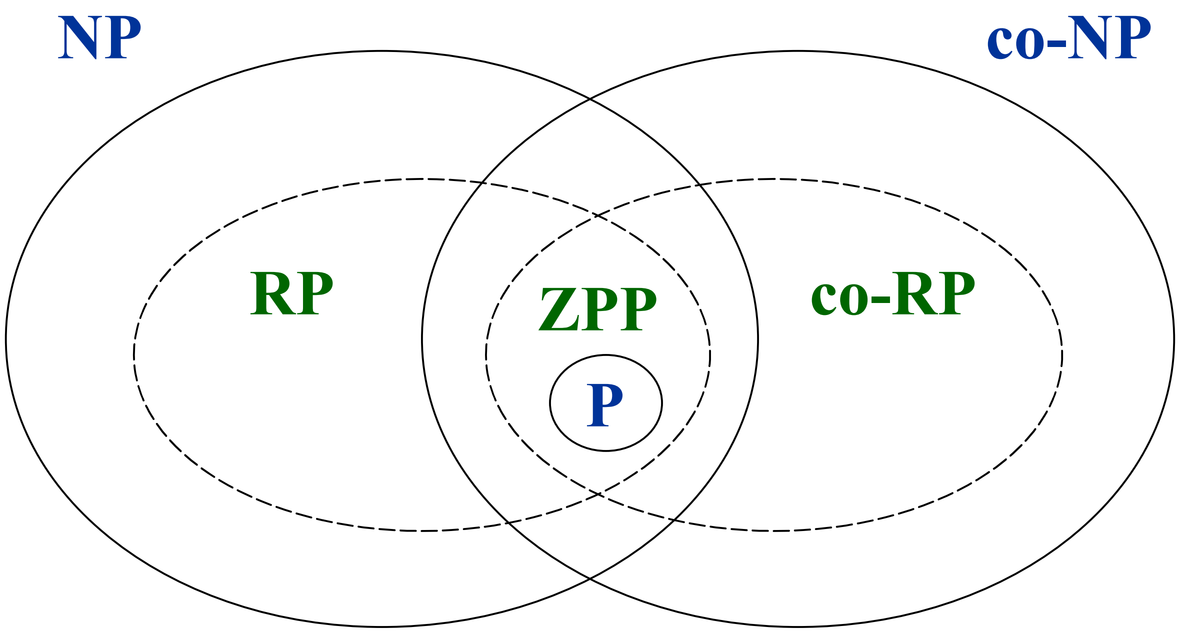
i) $x \in L \Rightarrow Pr[A(x)=1] = 1$

$AB=C \Rightarrow Pr(ABy=Cy)=1, \forall\ y \in \{0,1\}^*$

ii) $x \notin L \Rightarrow Pr[A(x)=0] \geq 1/2$

$AB \neq C \Rightarrow Pr(ABy=Cy) \leq 1/2 \Rightarrow$
$Pr(ABy \neq Cy) \geq 1/2$,
p/algum $y \in \{0,1\}^*$

Classes de Complexidade (cont.)



Fato: $P \subseteq ZPP$
$RP \subseteq NP$
$co\text{-}RP \subseteq co\text{-}NP$

Conjecturas:

$RP \subseteq co\text{-}RP$?

$RP \subseteq NP \cap co\text{-}NP$?

Classes de Complexidade (cont.)

Teorema: ZPP = RP $\cap$ co-RP

Prova: ZPP $\subseteq$ RP $\cap$ co-RP (trivial)

Considere A_1 e A_2 rand. polin. tais que:

a) $x \in L \Rightarrow Pr(A_1(x)=1) \geq 1/2$ e $Pr(A_2(x)=1) = 1$

b) $x \notin L \Rightarrow Pr(A_1(x)=0) = 1$ e $Pr(A_2(x)=0) \geq 1/2$

Algoritmo A: Reconhecimento de L
Início
  Leia ($x \in \{0,1\}^*$)
  Repita
    Se $A_1(x) = 1$ então "sim"
    senão
      Se $A_2(x) = 0$ então "não"
  Até (retornar "sim" ou "não")
fim.

Prova: $RP \cap co\text{-}RP \subseteq ZPP$ (cont.)

(a) $A_1(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x \in L$

(Se $x \notin L$ então $A_1(x) = 0$ pois $Pr(A_1(x) = 0)=1$)

$A_1(x)=0$ (?)

(b) $A_2(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \notin L$

(Se $x \in L$ então $A_2(x) = 1$ pois $Pr(A_2(x) = 1)=1$)

$A_2(x)=0$ (?)

Probabilidade de obtermos S ou N?

a) $x \in L \Rightarrow Pr(A(x)=1)=Pr(A1(x)=1) \geq 1/2$

Nota: $Pr(A(x)=0)=Pr(A_1(x)=0).Pr(A_2(x)=0))=0$

b) $x \notin L \Rightarrow Pr(A(x)=0)=Pr(A_2(x)=0) \geq 1/2$

Nota: $Pr(A_1(x)=0)=0$

Pr(Sim ou Não) $\geq 1/2$

Las Vegas $\rightarrow$ Valor Esperado 2

Classes de Complexidade (cont.)

Classe BPP

$\exists$A randômico polin. t.q:

L$\in$ BPP $\Leftrightarrow$ • Pr[A(x)=1]$\geq$3/4 (se x $\in$ L)

• Pr[A(x)=0]$\geq$3/4 (se x $\notin$ L)

$\forall$ x $\in$ {0,1}*

Classe PP

$\exists$A randômico polin. t.q:

L$\in$ co-RP $\Leftrightarrow$ • Pr[A(x)=1]>1/2 (se x $\in$ L)

• Pr[A(x)=0]>1/2 (se x $\notin$ L)

$\forall$ x $\in$ {0,1}*

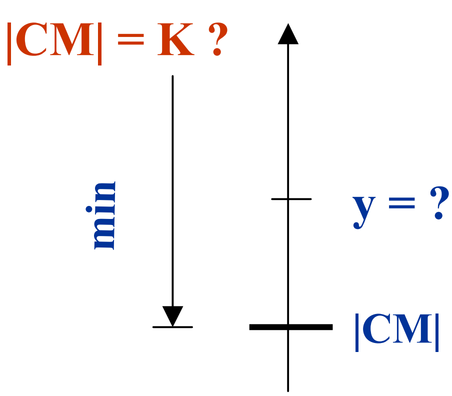
Classes de Complexidade (cont.)

Corte Mínimo em Multigrafos (Decisão)

MULT $\rightarrow$ L = { x=<G,K> : |CM|=K}

$$\boxed{\textbf{CORTEMIN} \in \textbf{BPP}}$$

Algoritmo A: Corte Mínimo - BPP
Início
    y $\leftarrow$ Valor do Corte Mínimo (Monte Carlo)
        c/ probabilidade de sucesso $\geq$ 3/4
    Se K = y então retorna (|CM| = K)
        senão
            retorna (|CM| $\neq$ K);
fim.



Se |CM| = K (x $\in$ L) então
Pr(|CM| = K) $\geq$ 3/4

Se |CM| $\neq$ K (x $\notin$ L) então
Pr(|CM| $\neq$ K) $\geq$ 3/4

Classes de Complexidade (cont.)

Dados ε > 0 e A randômico polin. p/ L ∈ BPP

Questão: Quantas repetições de A serão necessárias p/ que a Pr(falha) < ε?

Algoritmo A’: Repete A *k* vezes e retorna resposta majoritária (A’(x)=1 ou A’(x)=0)

Exemplo:

Se A’(x) = 1 e *k = 3* (n. de repetições)

$$\Pr(A'(x)=1) = \binom{3}{2}.\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right) + \binom{3}{3}.\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cong 0{,}8437$$

Se A’(x) = 1 e *k = 5* (n. de repetições)

$$\Pr(A'(x)=1) = \binom{5}{3}.\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \binom{5}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right) + \\ + \binom{5}{5}.\left(\frac{3}{4}\right)^5 = 0{,}9404$$

Classes de Complexidade (cont.)

Questão: Quantas repetições de A serão necessárias p/ que a Pr(falha) < ε?

Considere: (L∈ BPP ou PP), (β>0)
e A randômico polin. t.q:

- **Pr[A(x)=1] ≥ 1/2 + β (se x ∈ L)**
- **Pr[A(x)=0] ≥ 1/2 + β (se x ∉ L)**

∀ x ∈ {0,1}*

Se A'(x) = 1 é resposta majoritária então:

$$\Pr(A'(x)=1)=1-\sum_{r=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\Pr(A(x)=1,\ r\ \ vezes\ em\ k)$$

$$\geq 1-\left(1/4-\beta^2\right)^{k/2}2^{k-1}\geq 1-\varepsilon$$

Repetições

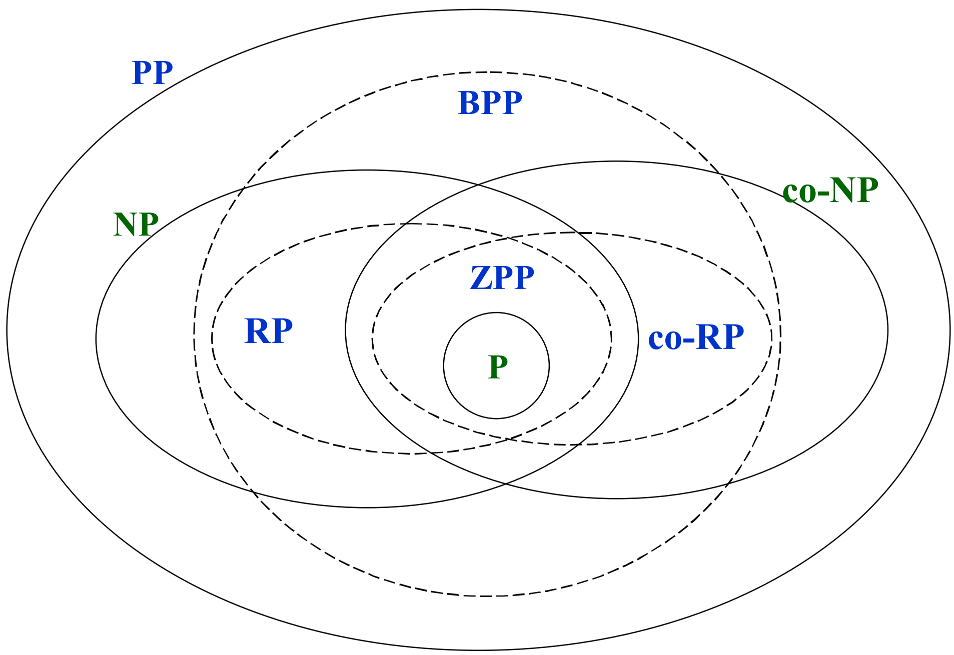
$$k\geq\frac{2\,|\ln 2\varepsilon\,|}{4\beta^2}\longrightarrow$$

$\beta=1/p(|x|)$ **⇒ L ∈ BPP**

$\beta=1/2^{p(|x|)}$ **⇒ L ∈ PP**

Classes de Complexidade (cont.)

Conjecturas:

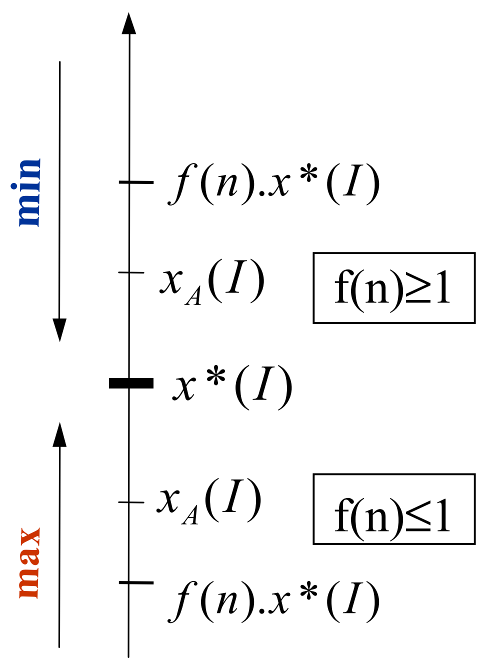


Problemas em aberto:

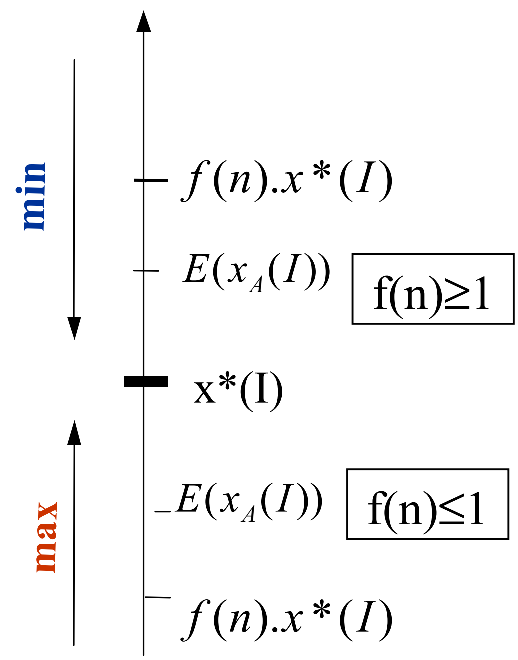
(a) $P = NP$,
(b) $NP = co\text{-}NP$,
(c) $RP = co\text{-}RP$,
(d) $NP \subseteq BPP$,
(e) $RP \subseteq NP \cap co\text{-}NP$.

Algoritmos Aproximativos: Determinísticos e Randômicos

Seja I uma instância qquer de um prob. de otimização. Se A é algoritmo f(n)-aproximativo então:



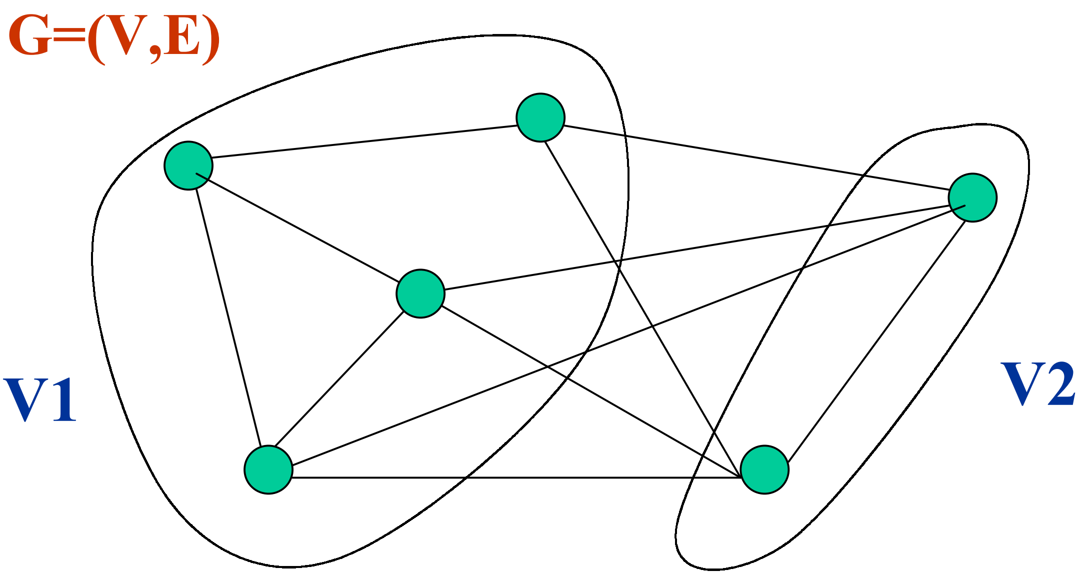
Algoritmos determinísticos f(n)-aproximados



Algoritmos randômicos f(n)-aproximados

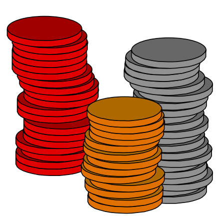
Nota: Se f(n) ≤ δ (p/ um problema de minimização) ou f(n) ≥ δ (p/ um problema de maximização) então A é δ-aproximado

Corte-Máximo em Grafos
(*Max-Cut*)



NP-Árduo mesmo p/ custos unitários !!

Algoritmo Randômico 0,5-aproximado



Joga uma moeda p/ cada vértice do grafo

Se moeda(i) = <cara> coloca nó i em V1
Se moeda(i) = <coroa> coloca nó i em V2

Análise de Aproximação

X $\rightarrow$ núm. de arestas do corte(V1,V2) gerado no procedimento randômico

$Y_j \rightarrow$ indica se aresta *j* pertence ou não ao corte-(V1,V2) (onde *j=1,2,...,m*)

Assim: $$X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_m$$

Da linearidade do valor esperado:

$$E(X) = E(Y_1) + E(Y_2) + \ldots + E(Y_m)$$

Mas,

$$E(Y_j) = 1.\Pr(Y_j = 1) + 0.\Pr(Y_j = 0)$$

onde:

$$\Pr(Y_j = 1) = 1/2 \quad (p/\ 2\ moedas\ \neq's).$$

Finalmente:

$$E(X) = E\left(\sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{j=1}^{m} E\left(Y_j\right) = \frac{m}{2} \geq (0,5).x^*(I)$$

Problema *MAX-SAT*

Seja B é expressão booleana na Forma Normal Conjutiva - FNC

$$B = \bigwedge_{j=1}^{m} C_j \quad \rightarrow \quad \left|C_j\right| = k_j$$

Exemplo:

$$B = \left(\overline{x}_1 \vee x_2\right) \wedge \left(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2\right) \wedge \left(x_2\right) \wedge \left(x_1\right)$$

Problema: MAX-SAT

Determinar o maior núm. de cláusulas em *B* simultâneamente verdadeiras.

MAX-SAT $\rightarrow$ NP-Árduo (Garey&Johnson[1979])

MAX-SAT (cont.)

Algoritmo A1: (Johnson[1974])

Atribui V ou F a cada um dos literais de B c/ probabilidade 1/2.

Var. Aleatória Zj (0 ou 1) $\longleftrightarrow$ **Cláusula Cj (F ou V)**

$$\Pr\left(Z_j = 0\right) = 1/2^{k_j}$$

$$\Pr\left(Z_j = 1\right) = 1 - 1/2^{k_j}$$

Linearidade do valor esperado:

$$x_{A1}(B) = \sum_{j=1}^{m} Z_j \quad \Longrightarrow \quad E\left(x_{A1}(B)\right) = \sum_{j=1}^{m} E\left(Z_j\right)$$

MAX-SAT (cont.)

Mas:

$$E(Z_j) = 1.\Pr(Z_j = 1) + 0.\Pr(Z_j = 0)$$

Assim:

$$E\left(x_{A1}(B)\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{2^{k_j}}\right) \geq m\left(1 - \frac{1}{2^{k}}\right)$$

$$onde : k = \min\{k_j : j = 1,2,..,m\}$$

Como: $m \geq x^*(B) \quad e \quad k \geq 1$

Então:

$$E\left(x_{A1}(B)\right) \geq (1/2).x^*(B)$$

Solução randômica 0,5-aproximada

Arredondamento Randômico

Dado: Formulação PLI

Procedimento Genérico

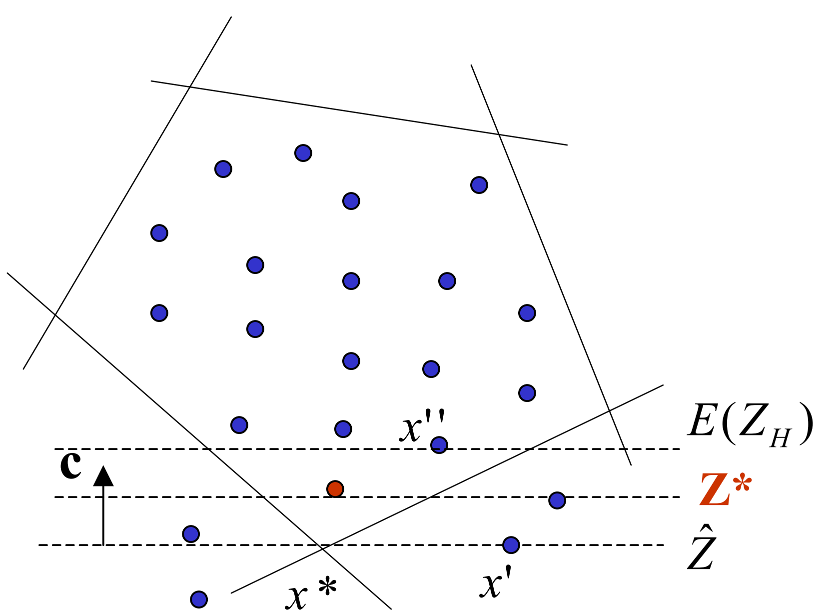
x* $\leftarrow$ **Relaxação Linear do PLI;**

x’ $\leftarrow$ **Arredondamento linear ou não-linear;**

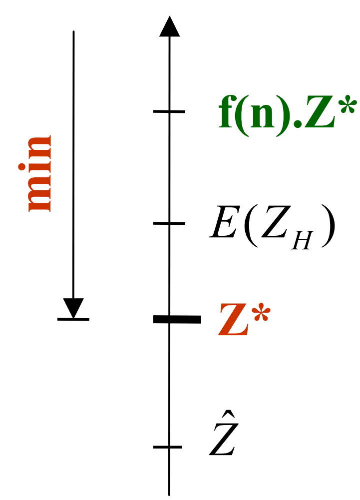
$$\Pr(x_j = 1) = f(x_j^*); \quad p/\ \ j = 1,..,n$$

x’’ $\leftarrow$ **“Derandomiza” x’;**

fim.



Conjunto viável



Função objetivo

Arredondamento Randômico
(MAX-SAT)

Formulação c/ *n* variáveis e *m* restrições:

$$\max\left(\sum_{j=1}^{m} z_j\right)$$

$$s.a:\begin{cases}\displaystyle\sum_{i\in C_j^+} y_i + \sum_{i\in C_j^-}(1-y_i) \geq z_j, & \forall\ j\in\{1,..,m\}\\ y_i,\, z_j \in\{0,1\} & \forall\ i,j\end{cases}$$

Exemplo:

$$B = (\bar{x}_1 \vee x_2)\wedge(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)\wedge(x_1)$$

$$\max(z_1 + z_2 + z_3)$$

$$s.a:\begin{cases}(1-y_1)+y_2 & \geq z_1,\\ (1-y_1)+(1-y_2) & \geq z_2\\ y_1 & \geq z_3,\\ y_i,\, z_j\in\{0,1\}, & \forall\ i,j\end{cases}$$

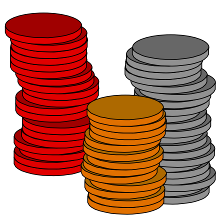
MAX-SAT (cont.)

Algoritmo A2: Arred. Randômico

Passo 1:

$\hat{y} \in [0,1]^n \leftarrow$ **retorna solução do problema relaxado,**

Passo 2: **Joga uma moeda viciada para cada nó (arredondamento linear)**



$$\Pr(y_i = 1) = \hat{y}_i$$
$$\Pr(y_i = 0) = 1 - \hat{y}_i$$

Passo 3: **Determina** $z \in \{0,1\}^m$ **e calcula:**

$$x_{A2}(B) = z_1 + z_2 + \ldots + z_m$$

Qual a aproximação de *$x_{A2}(B)$* em relação ao valor ótimo *$x^*(B)$* ?

Análise de Aproximação (MAX-SAT)

Da linearidade do valor esperado:

$$E(x_{A2}(B)) = E(z_1) + E(z_2) + \ldots + E(z_m)$$

onde: $E(z_j) = \Pr(z_j = 1).$ **Logo:**

$$\Pr\left(z_j = 0\right) = \prod_{i \in C_j} (1 - \hat{y}_i)$$

$$\Pr\left(z_j = 1\right) = 1 - \prod_{i \in C_j} (1 - \hat{y}_i) \longrightarrow$$ **(??)**

Da relaxação linear segue que:

$$\sum_{i \in C_j^+} \hat{y}_i + \sum_{i \in C_j^-} (1 - \hat{y}_i) \geq \hat{z}_j$$

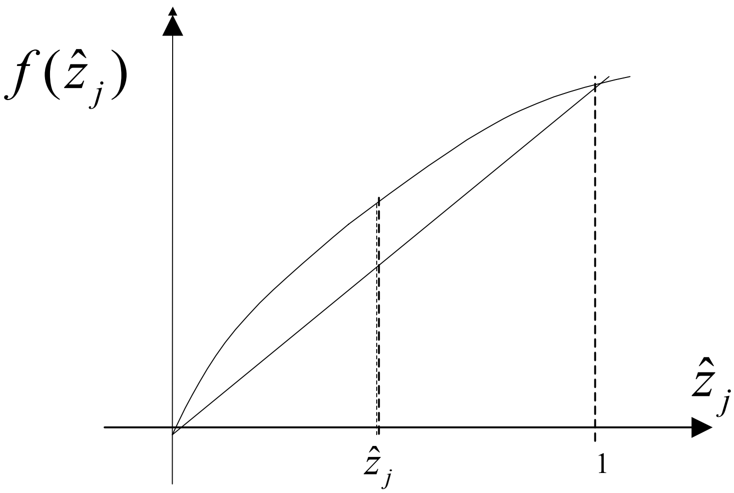
Escolhendo: $\hat{y}_i = \hat{z}_j / k_j$ tem-se que:

$$\Pr\left(z_j = 1\right) = 1 - \prod_{i \in C_j} (1 - \hat{y}_i) \geq 1 - \left(1 - \frac{\hat{z}_j}{k_j}\right)^{k_j}$$

onde: $|C_j| = k_j$,

MAX-SAT (cont.)

A função $f(\hat{z}_j) = 1 - (1 - \hat{z}_j / k_j)^{k_j}$ é côncava no intervalo [0,1].



$$f'(\hat{z}_j) \geq 0$$

$$f''(\hat{z}_j) \leq 0$$

Assim:

$$\Pr(\hat{z}_j = 1) \geq \left(1 - (1 - 1/k_j)^{k_j}\right).\hat{z}_j \geq (1 - 1/e).\hat{z}_j$$

Como:

$m \geq x^*(B)$ e $\hat{z}_1 + \hat{z}_2 + \ldots + \hat{z}_m \geq x^*(B)$

Finalmente:

$$E(x_{A2}(B)) \geq (1 - 1/e)\sum_{j=1}^{m} \hat{z}_j \geq 0,632.x^*(B)$$

MAX-SAT (cont.)

Seja *k* o núm. Mínimo de literais em B (FNC)

k	A1	A2
1	0,5	1,0
2	0,75	0,75
3	0,875	0,704
4	0,938	0,684
5	0,969	0,672

Performance de A1 e A2 como função de k

$$\alpha_k = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \qquad \beta_k = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right)$$

Algoritmo A3:

Executa A1 e A2 e salva melhor solução

Prop.: A3 é 0,75- aproximado

$$\max\{n_1, n_2\} \geq (3/4).x^*(B).$$

onde n1= E(xA1(B)) e n2=E(xA2(B))

Método das Expectâncias Condicionais

Valor Esperado Condicional

$$E(X \mid Y) = \sum_i x_i . \Pr(X = x_i \mid Y)$$

Além disso:

$$E(X) = E(X \mid Y).\Pr(Y) + E(X \mid Y^c).\Pr(Y^c)$$

Se *k≤ E(X)* então:

$$E(X) \le \left(\Pr(Y) + (1 - \Pr(Y))\right).\max\left\{E(X \mid Y), E(X \mid Y^c)\right\}$$
$$= \max\left\{E(X \mid Y), E(X \mid Y^c)\right\}$$

ou seja: $k \le \max\left\{E(X \mid Y), E(X \mid Y^c)\right\}$

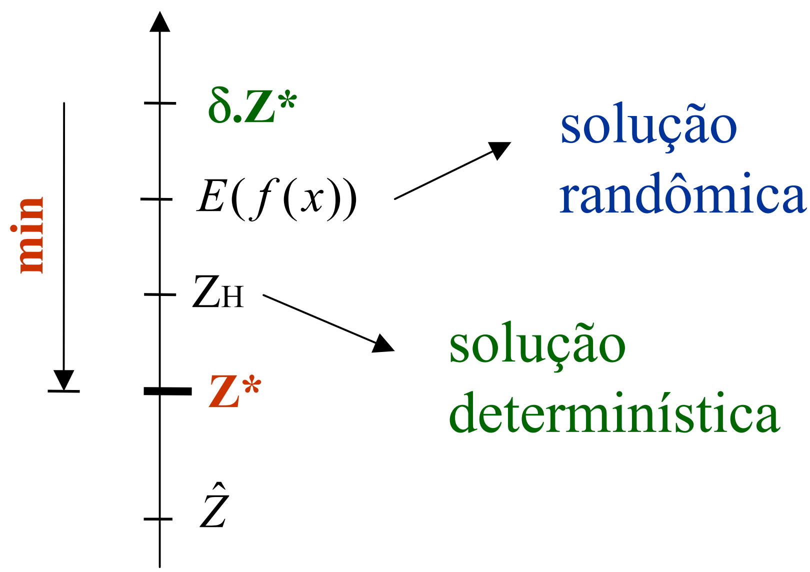
Se *E(X)≤ k* então:

$$E(X) \ge \left(\Pr(Y) + (1 - \Pr(Y))\right).\min\left\{E(X \mid Y), E(X \mid Y^c)\right\}$$
$$= \min\left\{E(X \mid Y), E(X \mid Y^c)\right\}$$

ou seja: $\min\left\{E(X \mid Y), E(X \mid Y^c)\right\} \le k$

Método das Expectâncias Condicionais (Spencer)

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \rightarrow$$ **função objetivo (minimização)**



$$E\big(f(x)\big) = E\big(f(x) \mid x_1 = 1\big).\Pr(x_1 = 1) + E\big(f(x) \mid x_1 = 0\big).\Pr(x_1 = 0)$$

$$\geq \min\big\{E\big(f(X) \mid x_1 = 1\big); E\big(f(x) \mid x_1 = 0\big)\big\} = E\big(f(x) \mid X_1\big) \geq$$

....

$$\geq \min\big\{E\big(f(X) \mid X_1, \ldots, X_{n-1}, x_n = 1\big); E\big(f(X) \mid X_1, \ldots, X_{n-1}, x_n = 0\big)\big\}$$

$$= E\big(f(X) \mid X_1, \ldots, X_n\big) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j = Z_H$$

MAX-SAT (*Derandomização*)

Seja:

$$B = \left(\bar{x}_1 \vee \ldots \vee x_{k_1}\right) \wedge \ldots \wedge \left(x_1 \vee \ldots \vee x_{k_m}\right)$$

Considere novamente o proc. A1 0,5-aproximado:

$$0{,}5.x^*(B) \leq E\left(x_{A1}(B)\right) = E\left(\sum_{j=1}^{m} Z_j\right)$$

Procedimento A1: MAX-SAT Derandomizado

Início

Para *k=1* até *n* faça

Calcula:

$R \leftarrow E(x_{A1}(B)|X_1,\ldots,X_{k-1}, x_k=V);$

$S \leftarrow E(x_{A1}(B)|X_1,\ldots, X_{k-1}, x_k=F);$

Se $R \geq S$ então

$x_k=V$

senão

$x_k=F$

fim.

Retorna $x_{A1}(B)$ e solução $(X_1,\ldots, X_n)$;

fim.

Exemplo: MAX-SAT – *Derandomização*

$$B = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_3)$$

Temos que:

$$E\big(x_{A1}(B) \mid x_1 = V \;\; ou \;\; F\big) = E\left(\sum_{j=1}^{m} Z_j \mid x_1 = V \;\; ou \;\; F\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} E\big(Z_j \mid x_1 = V \;\; ou \;\; F\big) = \sum_{j=1}^{m} 1.\Pr\big(Z_j = 1 \mid x_1 = V \;\; ou \;\; F\big)$$

Qual o máximo de $E\big(x_{A1}(B) \mid x_1 = V \;\; ou \;\; F\big)$?

Se $x_1 = V$:

$$E\big(x_{A1}(B) \mid x_1 = V\big) = \sum_{j=1}^{5} \Pr\big(Z_j = 1 \mid x_1 = V\big) =$$

$$= 1 + (1/2) + (3/4) + 1 + (1/2) = 15/4 \cong 3{,}75$$

Se $x_1 = F$:

$$E\big(x_{A1}(B) \mid x_1 = F\big) = \sum_{j=1}^{5} \Pr\big(Z_j = 1 \mid x_1 = F\big) =$$

$$= (1/2) + 1 + 1 + (3/4) + (1/2) = 15/4 \cong 3{,}75$$

Podemos fazer: x_1=V ou x_1=F

MAX-SAT (*Derandomização*)

P/ x_2 = V ou x_2 = F

$$E\left(x_{A1}(B) \mid X_1, x_2 = V\right) = \sum_{j=1}^{5} \Pr\left(Z_j = 1 \mid X_1, x_2 = V\right) =$$

$$= 1 + 1 + (1/2) + 1 + (1/2) = 4$$

$$E\left(x_{A1}(B) \mid X_1, x_2 = F\right) = \sum_{j=1}^{5} \Pr\left(Z_j = 1 \mid X_1, x_2 = F\right) =$$

$$= 1 + 0 + 1 + 1 + (1/2) = 3{,}5$$

Fazemos x_2 = V

P/ x_3 = V ou x_3 = F

$$E\left(x_{A1}(B) \mid X_1, X_2, x_3 = V\right) = \sum_{j=1}^{5} \Pr\left(Z_j = 1 \mid X_1, X_2, x_3 = V\right) =$$

$$= 1 + 1 + 0 + 1 + 1 = 4$$

$$E\left(x_{A1}(B) \mid X_1, X_2, x_3 = F\right) = \sum_{j=1}^{5} \Pr\left(Z_j = 1 \mid X_1, X_2, x_3 = F\right) =$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 0 = 4$$

Podemos fazer: x_3=V ou x_3=F

$E(x_{A1}(B)|X_1, X_2, X_3) = 4$, onde $X_1=V$, $X_2=V$ e $X_3=V$
é solução 0,5-aproximada!!

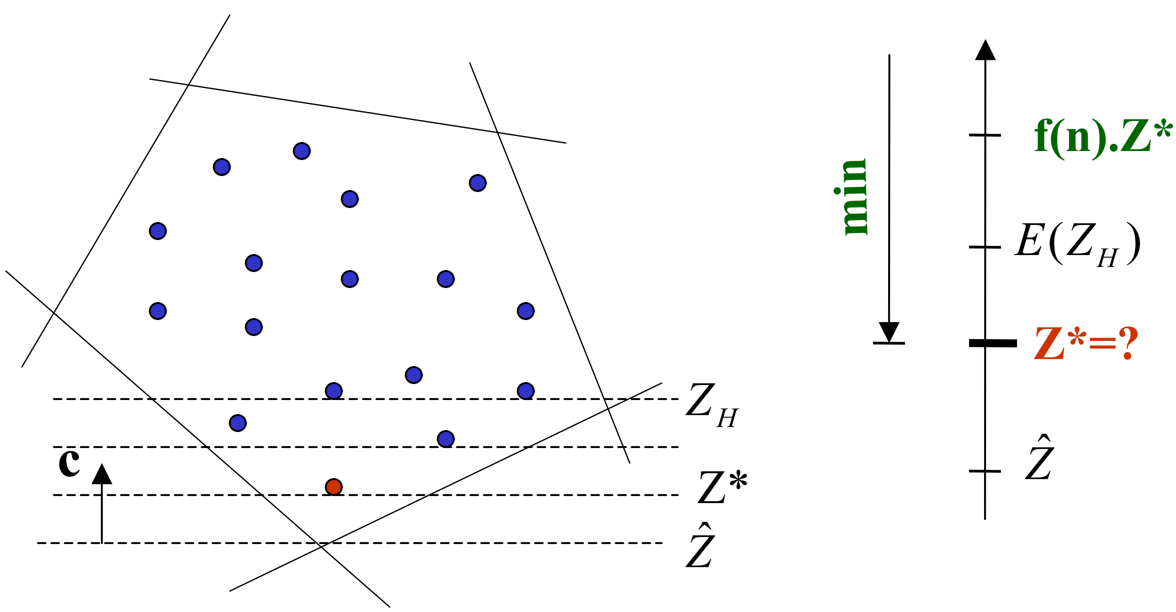
Problema Geral de Recobrimento

(General Covering Problem)

$$Z^* = \min c^T x$$

$$s.t. \begin{cases} Ax \geq b \\ x \in Z_+^n \end{cases}$$

$$c, x \in Z_+^n \quad b \in Z_+^m \quad e \quad A \in Z_+^{mxn}$$



Conjunto viável **Função obj.**

Algoritmo H é randômico O(f(n))-aproximado

Construção de cadeias de DNA

Nucleotídeos →

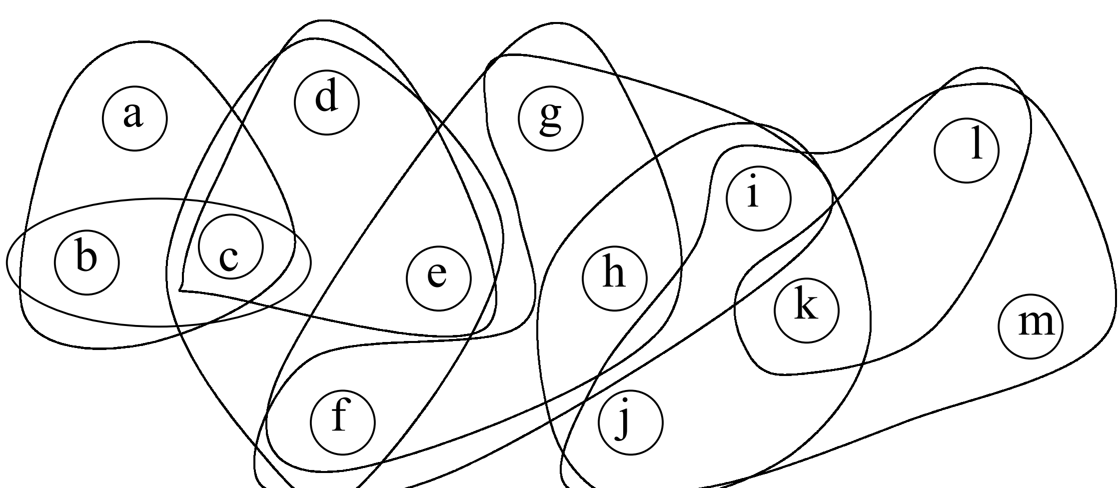
- A - Adenine
- C - Cytosine
- G - Guanine
- T - Thymine

Escherichia coli

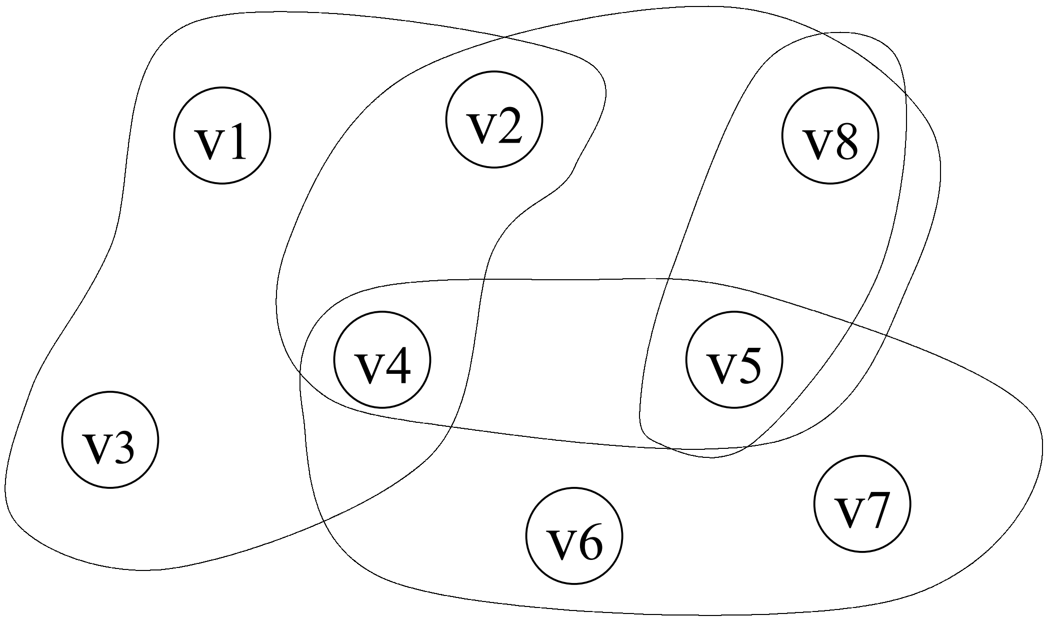
CAACAG CCAGAAACG
ACAGCGCCAGA CGGGTGGAA
AGCAACAG GAAACGG GAAT
ACAGCGCCA GGTGGAATTTG

AGCAACAGCGCCAGAAACGGGTGGAATTTG

a b c d e f g h i j k l m



Recobrimento de conjuntos
(*Set Covering Problem*)



$$Z^* = \min(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_8x_8)$$

$$s.t \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_2 + x_4 + x_5 + \quad + x_8 \geq 1 \\ x_5 + \quad + x_8 \geq 1 \\ x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 1 \\ x_i \in \{0,1\}; \quad i = 1,\ldots,8 \end{cases}$$

$V' = \{v_4, v_6, v_8\} \subseteq V$ define uma sol. viável

Procedimento SC Randômico

(*Set Covering*)

(RL)

$$\hat{Z} = \min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$s.t \begin{cases} \sum_{i: v_i \in S_j} x_i \geq 1, & j = 1,\dots,m \\ x_i \in [0,1], & i = 1,\dots,n \end{cases}$$

Resolve RL e retorna $\hat{Z}$ e $\hat{x} \in [0,1]^n$

Procedimento: SC1$(\hat{x}, x, Z_H)$

1. Para *i=1,2,..,n* faça

$$\Pr(x_i = 1) = \hat{x}_i$$

$$\Pr(x_i = 0) = 1 - \hat{x}_i$$

2. Utilizando $x \in \{0,1\}^n$ **calcule** Z_H;

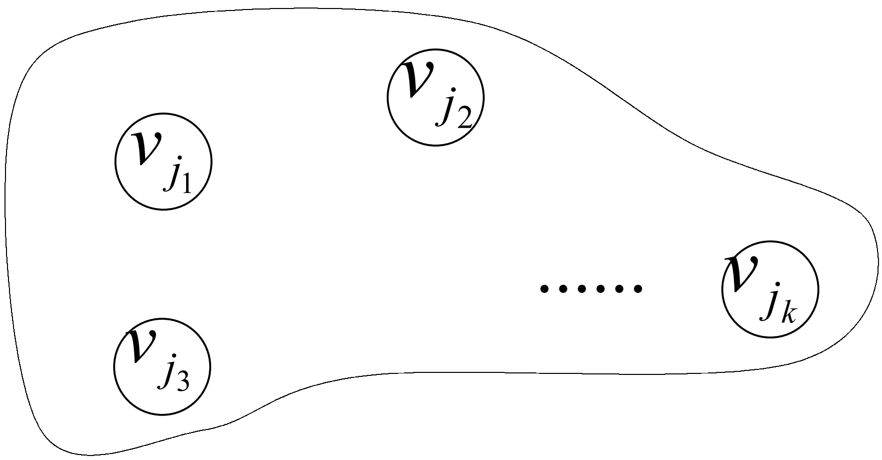
3. Retorna(x, Z_H);

fim.

Nota: A solução x pode *não* ser viável !!

Análise preliminar

O evento E_j ocorre se S_j não for coberto



$|S_j| = k$

$$\Pr(x_i = 0) = 1 - \hat{x}_i \quad onde\ \ i \in \{j_1, \ldots, j_k\}$$

$$\Pr(E_j) = \prod_{i \in \{j_1, \ldots, j_k\}} (1 - \hat{x}_i) \le \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k < \frac{1}{e}$$

Então:

$$\Pr\left(\bigcup_{j=1}^{m} E_j\right) \le \sum_{j=1}^{m} \Pr(E_j) \le \frac{m}{e}$$

$$\boxed{\Pr\left(\bigcap_{j=1}^{m} \overline{E}_j\right) \ge 1 - \sum_{j=1}^{m} \Pr(E_j) \ge 1 - \frac{m}{e}}$$

Probabilidade de successo (?)

Arredondamento Não-Linear

Como incrementar a probabilidade de sucesso?

Resolve RL e retorna $\hat{x} \in [0,1]^n$

Procedimento: SC2 $\left(\hat{x}, x, Z_H\right)$

1. Para i=1,2,..,n **faça** $x_i \leftarrow 0;$

2. $j \leftarrow 1;$

3. Enquanto $\left(j \le t \;\; e \;\; x_i = 0\right)$ **faça**

$$\Pr(x_i = 1) = \hat{x}_i$$

$$\Pr(x_i = 0) = 1 - \hat{x}_i$$

fim;

4. Calcule: $Z_H = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

5. Retorna: $\left(x, Z_H\right)$

fim.

$$\Pr(x_i = 1) = 1 - (1 - \hat{x}_i)^t$$

$$\Pr(x_i = 0) = (1 - \hat{x}_i)^t$$

Questões:

1) x é viável?
2) Como estimar *t*?
3) Aproximação de Z_H?

Análise de viabilidade

O evento E_j ocorre se S_j não for coberto

(I)
$$\boxed{\Pr\left(\mathrm{E}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{E}_m\right) \leq \sum_{j=1}^{m} \Pr(\mathrm{E}_j)}$$

Probabilidade de falha

$$\Pr\left(\mathrm{E}_j\right) \leq \prod_{i \in \{j_1,..,j_k\}} (1-\hat{x}_i);$$ **onde j=1,...,m**

Seja $\sum_{i \in \{j_1,..,j_k\}} \hat{x}_i \geq 1$ **a j-ésima desiqualdade e** $\hat{x}_i = \frac{1}{k}$

$$\Pr\left(\mathrm{E}_j\right) \leq \left(1-\frac{1}{k}\right)^{kt} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{t}$$

Repentindo E_j t = O(logm) vezes segue que:

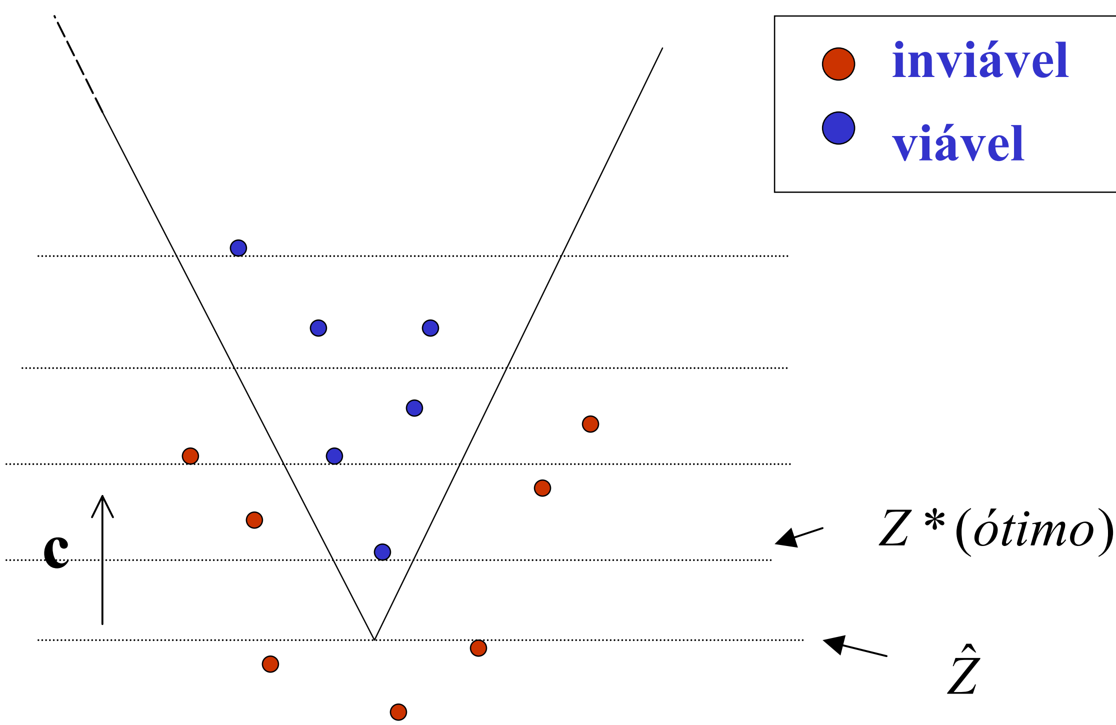
(II)
$$\boxed{\Pr\left(\mathrm{E}_j\right) \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{c\log m} \leq \frac{1}{2m}}$$

Análise de Viabilidade (cont.)

De (I) e (II) segue que:

$$\Pr\left(\mathrm{E}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{E}_m\right) \le \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\Pr\left(\bigcap_{j=1}^{m} \overline{E}_j\right) \ge 1 - \Pr\left(\bigcup_{j=1}^{m} E_j\right) \ge \frac{1}{2}}$$



Análise de Aproximação

Após *t* repetições:

$$\Pr(x_i = 0) = (1 - \hat{x}_i)^t$$

$$\Pr(x_i = 1) = 1 - (1 - \hat{x}_i)^t, \; t \in N$$

Nota: (Desigualdade de Bernoulli)

$$(1 + x)^t \geq 1 + tx, \;\; \forall \; t \in N \;\; e \;\; x \geq -1$$

Se $\left(x = -\hat{x}_i\right)$ **então** $x \in [-1,0]$ e $1 - (1 - \hat{x}_i)^t \leq t\hat{x}_i$

Valor esperado:

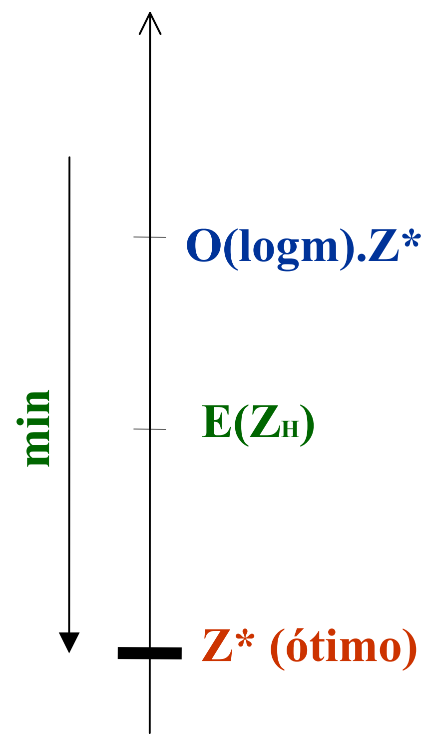
$$E\left(Z_H\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(1 - \left(1 - \hat{x}_i\right)^t\right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} c_i (t\hat{x}_i) = t \sum_{i=1}^{n} c_i \hat{x}_i \leq tZ^*$$

$$\boxed{E(Z_H) \leq O(\log m).Z^*}$$

Análise de aproximação

Teorema: RS2 é procedimento randômico O(logm)-aproximado



$$E(Z_H) \leq O(\log m).Z^*$$

$$\Updownarrow$$

$$\Pr\left(Z_H \leq O(\log m).Z^*\right) \geq \frac{1}{2}$$

NOTA: (Lund&Yannakakis[1992])

O problema do Recobrimento de Conjuntos (*Set covering*) não pode ser aproximado com um fator inferior a O(logm) a menos que P=NP.

Procedimento Monte Carlo

Procedimento: SC3

Dados: A, b, c e ε (prob. de falha)

1. **Resolve (RL) e retorna** $\hat{x} \in [0,1]^n$
2. $k \leftarrow 1$; $Z_H \leftarrow \infty$;
3. **Repita**

    Executa RCS2 $(\hat{x}, x, Z_H(x))$;

    Se (x é viável) **e** ($Z_H(x) < Z_H$) **então**

    $Z_H \leftarrow Z_H(x)$ e salva x;

    $k \leftarrow k+1$;

    Até que $k = \lceil \log(1/\varepsilon) \rceil$

4. **Retorna (x)**

Complexidade: $O\left(n^3 L + nm \log(1/\varepsilon)\right)$

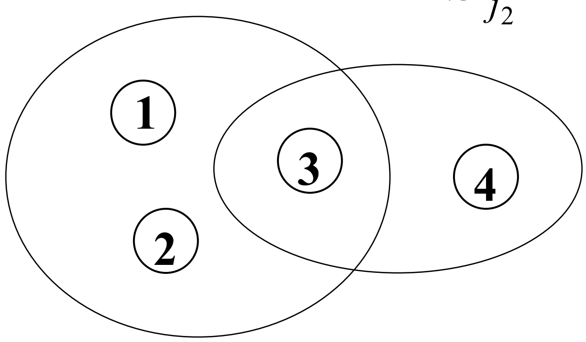
O procedimento Monte Carlo RS3 é O(log m)-aproximado e tem solução viável com prob. ≥ 1-ε.

Correlação positiva entre eventos

E_j **ocorre se** S_j ***não*** **é coberto**

Fato: $\overline{\mathrm{E}}_{j_1}$ **e** $\overline{\mathrm{E}}_{j_2}$ **são eventos correlacionados**

S_{j_1} S_{j_2}



$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_3 + x_4 \geq 1 \end{cases}$$

$$\Pr\left(\bigcap_{j=1}^{m} \overline{E}_j\right) = \Pr\left(\overline{E}_1\right).\Pr\left(\overline{E}_2 \mid \overline{E}_1\right).\Pr\left(\overline{E}_3 \mid \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2\right)\ldots\Pr\left(\overline{E}_m \mid \overline{E}_1 \cap \ldots \cap \overline{E}_{m-1}\right)$$

$$\Pr\left(\overline{E}_l \mid \overline{E}_1 \cap \ldots \cap \overline{E}_{l-1}\right) \geq \Pr\left(\overline{E}_l\right); \quad l \in \{2,..,m\}$$

$$\boxed{\Pr\left(\bigcap_{j=1}^{m} \overline{E}_j\right) \geq \prod_{j=1}^{m} \Pr(\overline{E}_j)}$$

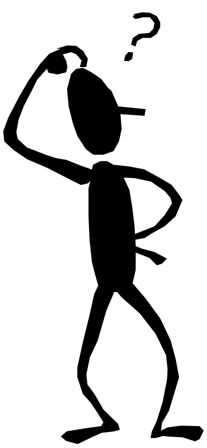
Probabilidade de sucesso

Correlação positiva entre eventos (cont.)

$$F = \bigcap_{j=1}^{m} \overline{E}_j$$

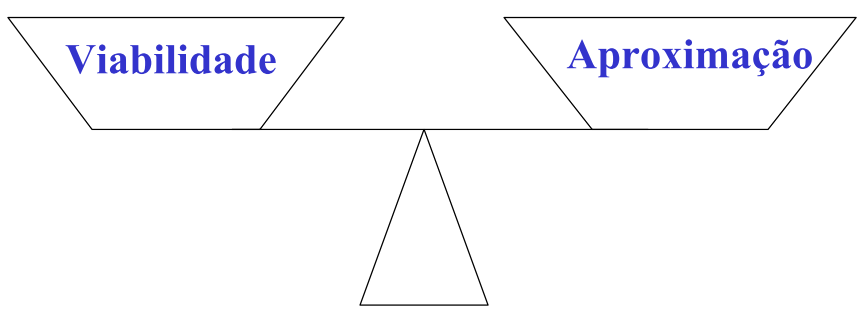
***x* deve ser viável com probabilidade P(F) > 0**

$$\boxed{\begin{aligned} \Pr(x_i = 1) &= 1 - (1 - \hat{x}_i)^t \\ \Pr(x_i = 0) &= (1 - \hat{x}_i)^t \end{aligned}}$$



Dr. t

Como determinar t ?



Questão: $E(Z_H \mid F) = ?$

Correlação positiva entre eventos (cont.)

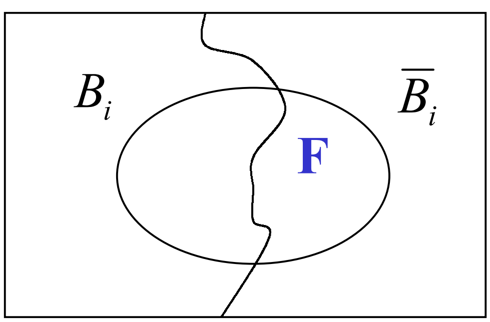
Teorema: *(Bertsimas&Vohra[1998])*

$$E\left(Z_H \mid F\right) \le O(\log \Delta).Z^*$$

onde $\Delta = \max_i |\Delta_i|$ **com** $\Delta_i = \{j : i \in S_j\}$

Prova:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \mid F\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E\left(x_i \mid F\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(1.\Pr\left(x_i = 1 \mid F\right)\right)$$



$$B_i \cap \overline{B}_i = \varnothing$$

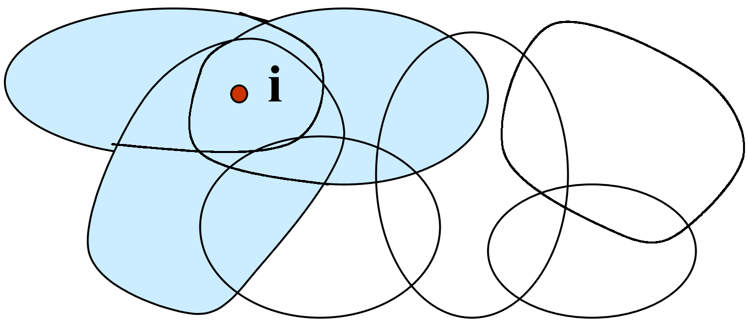
$$B_i \cup \overline{B}_i = \{0,1\}^n$$

$B_i = \{x \mid x_i = 1\}$ $\quad \overline{B}_i = \{x \mid x_i = 0\}$

$$\boxed{\Pr\left(x_i = 1 \mid F\right) = \frac{\Pr(B_i \cap F)}{\Pr(F)} = \frac{\Pr(x_i = 1).\Pr(F \mid x_i = 1)}{\Pr(F)}} \qquad \text{(I)}$$

Fórmula da Bayes

Correlação positiva entre eventos (cont.)



$\Delta_i = \{ j : i \in S_j \}$

$\overline{\mathrm{E}}_j$ **ocorre se** S_j **é coberto**

$$\Pr(F) = \Pr\left(\bigcap_{j=1}^{m} \overline{E}_j \right) \qquad \Pr(F \mid x_i = 1) = \Pr\left(\bigcap_{j \notin \Delta_i} \overline{E}_j \right)$$

Os eventos $\overline{E}_j$ **são correlacionados.**

$$\Pr(F) = \Pr\left(\bigcap_{j=1}^{m} \overline{E}_j \right) \geq \Pr\left(\bigcap_{j \notin \Delta_i} \overline{E}_j \right) . \Pr\left(\bigcap_{j \in \Delta_i} \overline{E}_j \right)$$

Então:

$$\frac{\Pr(F \mid x_i = 1)}{\Pr(F)} = \frac{\Pr\left(\bigcap_{j \notin \Delta_i} \overline{E}_j \right)}{\Pr\left(\bigcap_{j=1}^{m} \overline{E}_j \right)} \leq \frac{1}{\Pr\left(\bigcap_{j \in \Delta_i} \overline{E}_j \right)} \leq \frac{1}{\prod_{j \in \Delta_i} \Pr(\overline{E}_j)}$$

Correlação positiva entre eventos (cont.)

Nota:

$$\Pr\left(\overline{E}_j\right) = 1 - \Pr\left(E_j\right) = 1 - \prod_{i=1}^{k}(1-\hat{x}_i) \geq 1 - \left(\left(1-\frac{1}{k}\right)^k\right)^t > 1 - e^{-t}$$

onde $\left|S_j\right| = k$

$$\prod_{j\in\Delta_i} P\left(\overline{E}_j\right) \geq \prod_{j\in\Delta_i}(1-e^{-t}) = \left(1-e^{-t}\right)^{|\Delta_i|} \geq \left(1-e^{-t}\right)^{\Delta}$$

onde $\Delta = \max_{i=1,..,n}\left|\Delta_i\right|$

Portanto $$\frac{\Pr\left(F \mid x_i = 1\right)}{\Pr(F)} \leq \frac{1}{\left(1-e^{-t}\right)^{\Delta}} \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II) segue que:

$$\Pr\left(x_i = 1 \mid F\right) = \frac{\Pr(F \mid x_i = 1)}{\Pr(F)}.\Pr(x_i = 1) \leq (1-e^{-t})^{-\Delta}.\left(1-(1-\hat{x}_i)^t\right)$$

Então:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \mid F\right) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i.\left(1-e^{-t}\right)^{-\Delta}.t\hat{x}_i \leq t\left(1-e^{-t}\right)^{-\Delta}\sum_{i=1}^{n} c_i\hat{x}_i$$

Positive correlation between events (cont.)

Escolhendo $t = O(\log \Delta) = O(\ln \Delta)$ **e assumindo** $\Delta \geq 2$ **temos:**

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \mid F\right) \leq O(\ln \Delta).\left(\frac{1}{\left(1 - e^{-\ln \Delta}\right)^{\Delta}}\right).Z^* \leq 4.O(\ln \Delta).Z^*$$

e

$$\boxed{E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \mid F\right) \leq O(\log \Delta).Z^*}$$

completando a prova $\square$

Problema: A probabilidade de sucesso se torna exponencialmente pequena.

$$\Pr(F) \geq \prod_{j=1}^{m} \Pr\left(\overline{E}_j\right) = \left(1 - \frac{1}{e^{\log \Delta}}\right)^{m} > 0$$

Derandomização

(Set Covering)

Teorema: ***(Bertsimas&Vohra[1998])***

Uma solução X *derandomizada* (polinomial) pode ser obtida a partir do arredond. não linear t.q:

$$Z_H \leq O(\log m).Z^*$$

Prova:

$$\Phi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + M \sum_{j=1}^{m} Y_j$$

onde

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \sum_{v_i \in S_j} x_i = 0 \quad \rightarrow \quad \textbf{inviável} \\ 0, & c.c \quad \rightarrow \quad \textbf{viável} \end{cases}$$

X é viável $\Leftrightarrow$ Φ(X) ≤ M **M = ?**

$$E(\Phi(x)) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(x_i) + M \sum_{j=1}^{m} E(Y_j)$$

onde

$$\sum_{j=1}^{m} E(Y_j) = \sum_{j=1}^{m} 1.\Pr(Y_j = 1) = 1 - \underline{\Pr(F)}$$

probabilidade de sucesso

Derandomização (cont.)

Da desigualdade de Bernoulli e da correlação positiva entre eventos segue que:

$$E\left(\Phi\left(x\right)\right)=\sum_{i=1}^{n} c_i(1-(1-\hat{x}_i)^t)+M(1-\Pr(F))$$

onde: $\Pr\left(F\right)\geq\left(1-e^{-t}\right)^m$

Então:

$$E\left(\Phi(x)\right)\leq t.\sum_{i=1}^{n} c_i\hat{x}_i+M\left(1-\left(1-e^{-t}\right)^m\right)$$

O valor de M deverá satisfazer:

$$E\left(\Phi(x)\right)\leq t.\hat{Z}+M\left(1-\left(1-e^{-t}\right)^m\right)\leq M$$

Questões: Como escolher M?
Como calcular X_H ?

Derandomização (cont.)

Método das Expectâncias Condicionais

$$E(\Phi(x)) = E(\Phi(x) \mid x_1 = 1).\Pr(x_1 = 1) + E(\Phi(x) \mid x_1 = 0).\Pr(x_1 = 0)$$

$$\geq \min\{E(\Phi(x) \mid x_1 = 1); E(\Phi(x) \mid x_1 = 0)\} = E(\Phi(x) \mid x_1) \geq$$

....

$$\geq \min\{E(\Phi(X) \mid X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n = 1); E(\Phi(X) \mid X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n = 0)\}$$

$$= E(\Phi(X) \mid X_1, \ldots, X_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j = Z_H$$

Então

$$Z_H = \sum_{j=1}^{m} c_j X_j \leq E(\Phi(X)) \leq M$$

M=?

$$\boxed{\begin{array}{ll} & \min M \\ s.t. & k\hat{Z} + M\left(1 - \left(1 - e^{-k}\right)^m\right) \leq M \\ & k, M \geq 0 \end{array}}$$

Derandomização (cont.)

Se escolhemos:

$$M = \frac{\log m}{\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m} . \hat{Z} \quad \textbf{e} \quad k = \log m$$

então

$$Z_H = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j \le \Phi(X) \le \frac{\log m}{\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m} . \hat{Z}$$

e

$$Z_H \le O(\log m) . Z^*$$

completando a prova. □

Nota: $\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m \ge \frac{1}{4} \quad \forall \ m \ge 2$

Outras Aplicações

a) Programação Matemática;
b) Algoritmos em Grafos;
c) Estrutura de Dados;
d) Criptografia;
e) Algoritmos *On-line*;
f) Processamento Distribuído;
g) Derandomização,
h) Biologia Computacional, etc.

Algumas Referências Importantes:

- R. Motwani, P. Raghavan [1995] "***Randomized Algorithms***", Cambrigde Univ. Press.

- R. Karp [1994] "***Probabilistic Recurrence Relations***", Journal of ACM, Vol. 41, n.6 pp.1136-1150.

- R. Karp [1991] "***An Introduction to Randomized Algorithms*** ", Discrete Applied Mathematics, 34:165-201.

- P. Raghavan [1988] "***Probabilistic Construction of Deterministic Algorithms: Approximating Packing Integer Programs***", Journal of Comp. and System Science, 37:130-143.

Referências

- Motwani, Naor and Raghavan [1997] "*Randomized Approximation Algorithms in Combinatorial Optmization*", in Approximation Algorithms for NP-hard Problems, Hochbaum (ed), PWS.
- Bertsimas and Vohra [1998] "*Rounding Algorithms for Covering Problems*", Math. Programming, v. 80 pp. 63-89.
- Raghavan [1988] "*Probabilistic Construction of Deterministic Algorithms: Approximating Packing Inte ger Programs*", J. of Comp. and Sys. Sc., v.37, pp. 130-143.
- Srinivasan [1996] "*Improved Approximations of Packing and Covering Problems*", Proceedings of the 27th Ann. ACM Symp. on the Theory of Comp., pp. 268-276.
- Spencer [1987] "*Ten Lectures on the Probabilistic Method*", CBMS-NSF Regional Conference Series in App. Math., N.52, SIAM