

## CAPÍTULO III

### III.1) CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE (Fluxo de Custo Mínimo):

Com o objetivo de dar suporte ao desenvolvimento de algoritmos de fluxo de custo mínimo, apresentamos, neste capítulo, as condições de otimalidade do problema de fluxo de custo mínimo. Na condição dos ciclos de custo negativo discutimos como gerar um novo fluxo  $x'$  a partir de um fluxo inicial  $x_0$  adicionando-se a este um ciclo de custo negativo, quando isto não mais puder ser implementado teremos chegado a um fluxo ótimo. Estudaremos também a formulação dual do problema de fluxo de custo mínimo. As variáveis duais deste problema são uma generalização do conceito de rótulos de distâncias utilizados no problema de caminho mínimo (condições de custo reduzido). Finalmente, na condição das folgas complementares estabelecemos as condições de otimalidade em termos da rede original.

Veremos como encontrar e interpretar a solução ótima dual do problema de custo mínimo resolvendo um problema de caminho mínimo adequado.

### III.2) FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E REDE RESIDUAL:

Seja  $G=(N,A)$  uma rede direcionada com custo  $c_{ij}$  e capacidades  $l_{ij}$  e  $u_{ij}$  (limites inferior e superior respectivamente) associada a cada arco  $(i,j) \in A$ . A cada nó  $i \in N$  associamos um número  $b(i)$ , cujo sinal indica se  $i$  será fonte ( $b(i)>0$ ) ou demanda ( $b(i)<0$ ). Se  $b(i)=0$  teremos então um nó intermediário.

Formulamos o Problema de Fluxo de Custo Mínimo (PFCM) como abaixo:

$$\begin{aligned} \min \quad & z(x) = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a} \quad & \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{k:(k,i) \in A\}} x_{ki} = b(i), \quad \forall i \in N \quad (I) \\ & l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade assumimos os limitantes inferiores  $l_{ij}$  iguais a zero (vide Ahuja, seção 2.4) e os custos  $c_{ij}$  não-negativos.

Seja:

$$C = \max\{c_{ij} : (i,j) \in A\}$$

$$U = \max\{\max[b(i) : i \in N], \max[u_{ij} : (i,j) \in A] \text{ e } u_{ij} < \infty\}$$

Como veremos posteriormente a definição de C e U serão utilizadas na análise de complexidade.

### **Hipóteses Adicionais:**

**i) *Todos os dados (custos, capacidades, valores de oferta e demanda) são inteiros.***

Esta hipótese não é realmente restritiva já que podemos multiplicar os números racionais (manipulados pelo computador) por um número inteiro suficientemente grande.

**ii) *A rede é direcionada.***

Esta condição é satisfeita facilmente já que podemos transformar arcos não-orientados em orientados.

**iii) *A oferta total é igual à demanda total.***

Assumimos que  $\sum_{i \in N} b(i) = 0$  e que o problema de fluxo de custo mínimo admite pelo menos uma solução viável.

**iv) *Existe um caminho direcionado entre cada par de nós.***

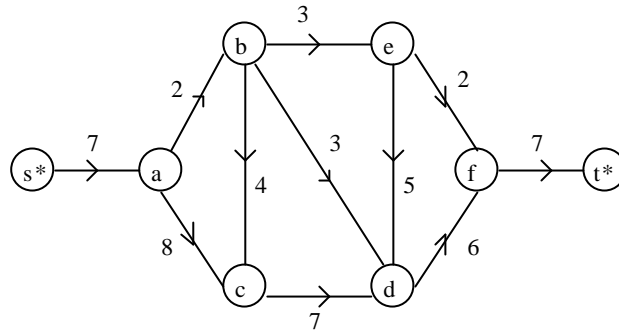
A rede  $G=(N,A)$  contém um caminho direcionado sem restrições de capacidade entre cada par de nós (ou seja, cada arco desse caminho tem capacidade infinita). Impomos esta condição, se necessário adicionando arcos artificiais  $(1,j)$  e  $(j,1)$  para cada  $j \in N$  e atribuindo um grande custo e capacidade infinita a cada um desses arcos. Tais arcos não aparecerão na solução a menos que o problema não contenha solução viável sem arcos artificiais.

**v) *Todos os custos são não-negativos.***

Esta hipótese não implica em perda de generalidade, basta fazermos uma simples transformação que converte arcos com custos negativos em positivos (Ahuja, seção 2.4). Isto pode ser feito desde que os arcos tenham capacidade finita. Quando alguns arcos são irrestritos, assumimos que a rede não contém ciclos direcionados de custo negativo de capacidade infinita. Se a rede contém tais ciclos o valor ótimo do problema de fluxo de custo mínimo é ilimitado. Em (Ahuja, seção 3.4) é descrito um algoritmo de busca que detecta tal situação.

**Observação:** Podemos determinar se o problema de fluxo de custo mínimo admite uma solução viável resolvendo um problema de fluxo máximo (Ahuja, capítulo 7). Para isso, introduzimos um nó

fonte  $s^*$  e um nó demanda  $t^*$ . Para cada nó  $i$  com  $b(i) > 0$ , adicionamos um arco  $(s^*, i)$  com capacidade  $b(i)$  e para cada nó  $i$  com  $b(i) < 0$ , adicionamos um arco  $(i, t^*)$  com capacidade  $-b(i)$ . Abaixo representamos um exemplo de um grafo com 6 nós. Suponha que queiramos enviar 7 unidades de fluxo de  $a$  até  $f$ :



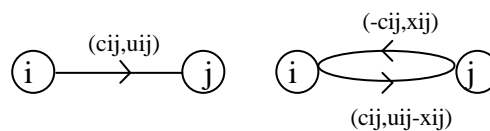
**Figura III.1: Determinação da Solução Viável**

Resolvemos agora o problema de fluxo máximo de  $s^*$  até  $t^*$ . Se o valor do fluxo máximo for igual a  $\sum_{\{i: b(i) > 0\}} b(i) = 7$  então o problema de fluxo de custo mínimo será viável. Caso contrário não admitirá uma solução viável inicial.

Como veremos posteriormente, no desenvolvimento de algoritmos de fluxo em rede e na análise das condições de otimalidade é frequentemente utilizada a avaliação do fluxo incremental sobre um fluxo viável inicial. Definiremos abaixo uma rede auxiliar (rede residual) que nos ajudará na determinação deste novo fluxo residual obtido a partir de um fluxo conhecido.

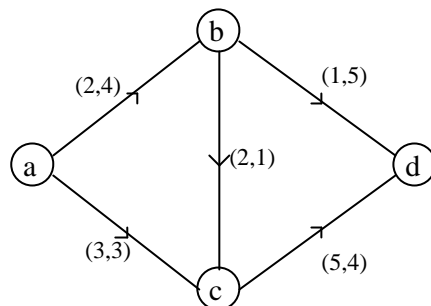
### Definição III.1: (Rede Residual)

Definimos rede residual com respeito a um fluxo dado  $x^0$  da seguinte forma: trocamos cada arco  $(i, j)$  da rede original por dois arcos  $(i, j)$  e  $(j, i)$ , o arco  $(i, j)$  tem custo  $c_{ij}$  e capacidade residual  $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}^0$  e o arco  $(j, i)$  tem custo  $-c_{ij}$  e capacidade residual  $r_{ji} = x_{ij}^0$ . Abaixo ilustramos a obtenção de um arco na rede residual:



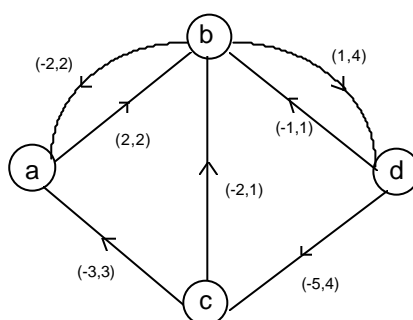
**Figura III.2: Rede Residual**

**Exemplo III.1)** Seja o grafo com 4 vértices abaixo. Os pares ordenados ao lado de cada nó representam o custo e a capacidade de cada arco respectivamente:



**Figura III.3: Rede Original**

Suponha que enviemos um fluxo  $\mathbf{x}^0$  de **a** a **d** da seguinte forma:  $x_{ab} = 2$ ;  $x_{ac} = 3$ ;  $x_{bc} = 1$ ;  $x_{cd} = 4$  e  $x_{bd} = 1$ . A rede residual correspondente será:



**Figura III.4: Rede Residual**

**NOTAÇÃO:** Representamos por  $G(\mathbf{x}^0)$  a rede residual com respeito ao fluxo  $\mathbf{x}^0$ .

Note que a capacidade residual representa o acréscimo possível de fluxo no arco (i,j) até sua saturação. O arco contrário (j,i) denota o possível decremento deste fluxo.

### III.3) DUALIDADE E CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE:

Antes de discutirmos diretamente as condições de otimalidade trataremos inicialmente da obtenção do problema dual. Observe que podemos reescrever nosso Problema de Fluxo de Custo Mínimo (I) na forma compacta como abaixo:

$$\begin{aligned}
& \min (c^T x) \\
& s.a \quad Ax = b \quad (II) \\
& \quad x + z = u \\
& \quad x, z \geq 0 \quad \text{onde } x, z, u \in \Re^m, b \in \Re^m \text{ e } A \in \Re^{m \times n}
\end{aligned}$$

A variável  $z$  acima representa as variáveis de folga relativas ao vetor  $x$ , e  $A$  (matriz de incidência nó arco) é unimodular com valores 1 e -1 em cada coluna (verificação trivial). Reescrevendo (II) de outra forma temos:

$$\begin{aligned}
& \min (c^T \ 0^T) \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \\
& s.a \begin{pmatrix} A & 0 \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ u \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} x^T & z^T \end{pmatrix} \geq 0
\end{aligned}$$

Cujo dual é obtido diretamente como abaixo:

$$\begin{aligned}
& \max (b^T \quad u^T) \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \bar{\mathbf{d}} \end{pmatrix} \\
& s.a \begin{pmatrix} A^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \bar{\mathbf{d}} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} (III) \\
& \mathbf{p} \text{ é irrestrito}, \bar{\mathbf{d}} \geq 0
\end{aligned}$$

Como  $A$  é unimodular e em cada coluna temos exatamente 1 e -1, a matriz  $A^T$  terá exatamente 1 e -1 em cada linha. Fazendo ainda  $\bar{\mathbf{d}} = -\mathbf{d}$  e reescrevendo (III) como abaixo temos finalmente:

$$\begin{aligned}
& \max b^T \mathbf{p} - u^T \mathbf{d} \\
& s.a \quad A^T \mathbf{p} - I \mathbf{d} \leq c \\
& \quad \mathbf{d} \geq 0 \\
& \quad \mathbf{p} \text{ irrestrito}
\end{aligned}$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned}
& \max \left( \sum_{i=1}^n b(i) \mathbf{p}(i) - \sum_{(i,j) \in A} u_{ij} \mathbf{d}_{ij} \right) \\
& \text{s.a. } \mathbf{p}(i) - \mathbf{p}(j) - \mathbf{d}_{ij} \leq c_{ij} \quad (IV) \\
& \mathbf{d}_{ij} \leq 0, \forall (i, j) \in A \\
& \mathbf{p}(i) \text{ irrestrito}
\end{aligned}$$

Observe que o problema dual do problema de caminho mais curto (vide capítulo 2) é um caso particular do problema dual acima! Note que podemos fazer  $\mathbf{d}_{ij} = 0$  e  $d(i) = -\mathbf{p}(i)$  sendo  $b(s)=1$ ,  $b(t)=-1$  e  $b(i)=0$  para  $i \neq s$  e  $i \neq t$ .

Como temos 1 e -1 em cada linha de  $A^T$ , teremos sempre a subtração de duas variáveis duais  $\pi(i)$  e  $\pi(j)$  em cada linha da formulação (IV) acima. Vejamos agora a seguinte definição:

**Definição III.2:** Analogamente ao problema de caminho mínimo, o *custo reduzido*  $\overline{c}_{ij}$  (do problema de fluxo de custo mínimo) é definido como:  $\overline{c}_{ij} = c_{ij} - \mathbf{p}(i) + \mathbf{p}(j)$ . •

É fácil ver que uma solução dual viável (formulação IV) implica em  $\overline{c}_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A$ .

Consideremos agora três condições distintas de otimalidade e equivalentes entre si:

- a) Condição dos Ciclos de Custo Negativo
- b) Condição dos Custos Reduzidos
- c) Condição das Folgas Complementares

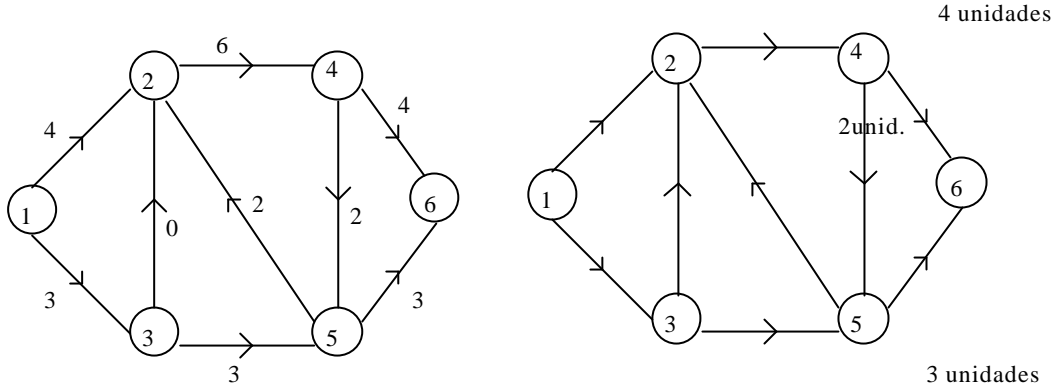
Dependendo do algoritmo utilizado, a escolha de uma das condições de otimalidade poderá ser mais ou menos conveniente na análise do critério de parada e até sugerir novas estratégias para o desenvolvimento de algoritmos.

Vejamos inicialmente as condições dos ciclos de custo negativo:

### III.3.1) CONDIÇÃO DE CICLOS DE CUSTO NEGATIVO:

Na formulação de problemas de fluxo em redes podemos adotar duas abordagens equivalentes: podemos definir fluxos em arcos (já visto) ou definir fluxos em caminhos e ciclos.

**Exemplo III.2:** Abaixo ilustramos um exemplo onde enviamos 7 unidades de fluxo do nó 1 ao nó 6. Um fluxo viável no caso **a** seria por exemplo:  $x_{12}=4$ ,  $x_{32}=0$ ,  $x_{13}=3$ ,  $x_{24}=6$ ,  $x_{35}=3$ ,  $x_{45}=2$ ,  $x_{46}=4$ ,  $x_{56}=3$  e  $x_{52}=2$ .



**Figura III.5: (a) Fluxos em Arcos (b) Fluxos em Caminhos e Ciclos**

Note que na formulação de fluxo em caminhos e ciclos (caso b) enviamos 4 unidades no caminho 1-2-4-6 e 3 unidades no caminho 1-3-5-6 e 2 unidades no ciclo 5-2-4-5. •

Na formulação de fluxos em caminhos e ciclos enumeramos todos os caminhos direcionados  $p$  entre quaisquer dois pares de nós e todos os ciclos direcionados  $w$  da rede. Seja  $P$  a coleção de todos os caminhos e  $W$  a coleção de todos os ciclos. As variáveis utilizadas na formulação envolvendo caminho e ciclos são  $f(p)$  (fluxo no caminho  $p$ ) e  $f(w)$  (fluxo no ciclo  $w$ ). Definimos estas variáveis para todos os caminhos direcionados  $p$  em  $P$  e todos os ciclos direcionados  $w$  em  $W$ .

O fluxo  $x_{ij}$  no arco  $(i,j)$  será igual a soma dos fluxos  $f(p)$  e  $f(w)$  para todos os caminhos  $p$  em  $P$  e todos os ciclos  $w$  em  $W$  que contenham este arco.

**Notação:**  $d_{ij}(p)$  é igual a 1 se o arco  $(i,j)$  está contido no caminho  $p$  e 0 caso contrário. Da mesma forma  $d_{ij}(w)$  é 1 se o arco  $(i,j)$  está contido no ciclo  $w$  e 0 caso contrário. Assim:

$$x_{ij} = \sum_{p \in P} d_{ij}(p) f(p) + \sum_{w \in W} d_{ij}(w) f(w) \quad \bullet$$

Desta forma cada fluxo em caminhos e ciclos determina fluxos em arcos unicamente. Reciprocamente (Ahuja, seção 3.5), podemos decompor também fluxos em arcos em fluxos em caminhos e ciclos.

Vejamos agora a seguinte definição:

**Definição III.2:** (Ciclos Aumentantes)

Um ciclo  $w$  com fluxo  $f(w) > 0$  é chamado ciclo aumentante com respeito a um fluxo  $x$  se:

$$0 \leq x_{ij} + d_{ij}(w)f(w) \leq u_{ij}, \quad \forall (i, j) \in w \quad \bullet$$

Observe que o custo no ciclo aumentante é definido como  $c(w) = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} d_{ij}(w)$ . A

variação de fluxo ao longo deste ciclo será dada por  $c(w)f(w)$ .

A representação de um fluxo em caminhos e ciclos tem importantes consequências. Ela nos permite comparar dois fluxos em uma rede mostrando como obter um fluxo em função de outro através de uma sequência de operações simples. Vejamos agora como obter esta função:

**Teorema III.1 (Teorema dos Ciclos Aumentantes):** Sejam  $x$  e  $x_0$  dois fluxos viáveis do problema de fluxo. Então  $x$  será igual a  $x_0$  mais o fluxo em pelo menos  $m$  ciclos aumentantes com respeito a  $x_0$ . Além disso, o custo de  $x$  é igual ao custo de  $x_0$  mais o custo nestes ciclos aumentantes.

**Demonstração:** Sejam  $x$  e  $x_0$  dois fluxos viáveis do PFCM, ou seja:

$$\begin{array}{ll} Ax = b & e \quad Ax_0 = b \\ 0 \leq x \leq u & 0 \leq x_0 \leq u \end{array}$$

O vetor diferença  $y = x - x_0$  satisfaz a equação homogênea  $A(x - x_0) = 0$ . Desta forma o vetor  $y$  poderá ser representado por fluxos em no máximo  $m$  ciclos. De fato, note que  $y = x - x_0$  não pode ser representado por fluxos em caminhos já que teríamos 2 nós correspondentes a fonte e a demanda ( $b(i) > 0$  e  $b(i) < 0$  respectivamente), não obtendo portanto uma equação homogênea  $Ay = 0$ . Seja então o fluxo neste ciclos definido por:  $f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_r)$  onde  $r \leq m$ . Assim:

$$y_{ij} = d_{ij}(w_1)f(w_1) + \dots + d_{ij}(w_r)f(w_r), \quad \forall (i, j) \in A$$



Como  $x_{ij} = x_{ij}^0 + y_{ij}$  (pois  $y = x - x_0$ ) e  $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ ,  $\forall (i, j) \in A$ , temos:

$$0 \leq x_{ij}^0 + \sum_{k=1}^r d_{ij}(w_k) f(w_k) \leq u_{ij}$$

Note que para cada ciclo  $w_k$ , temos  $0 \leq x_{ij}^0 + d_{ij}(w_k) f(w_k) \leq u_{ij}$ , onde  $(i, j) \in w_k$ . Assim, se adicionamos qualquer um destes fluxos em ciclos a  $x_0$ , a solução resultante continua viável em cada arco  $(i, j)$ . Logo os ciclos  $w_1, w_2, \dots, w_k$ , são aumentantes com respeito a  $x_0$ . Observe ainda que:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} &= \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^0 + \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} y_{ij} \\ &= \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^0 + \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \left[ \sum_{k=1}^r d_{ij}(w_k) f(w_k) \right] \\ &= \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^0 + \sum_{k=1}^r c(w_k) f(w_k) \end{aligned}$$

Assim, enviando o fluxo através dos ciclos aumentantes estaremos alterando  $\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$ , obtendo portanto uma solução viável melhor (ou pior) que a anterior. •

### Importante:

Observe que, em termos da rede residual (definida na seção III.2) cada ciclo aumentante  $w$  com respeito a um fluxo  $x_0$  corresponde a um ciclo direcionado  $w$  em  $G(x_0)$ . Veja que no exemplo III.1, poderíamos passar um fluxo unitário no ciclo  $b-d-c-b$  (observe que este ciclo tem custo negativo). Desta forma, poderíamos reescrever o teorema anterior (sob as mesmas condições) dizendo que o fluxo  $x$  será igual a  $x_0$  mais o fluxo em no máximo  $m$  ciclos direcionados em  $G(x_0)$ . Logo, se temos um fluxo  $x_0$  e ciclos aumentantes  $w$  de custo negativo podemos obter um novo fluxo  $x'$  com custo menor ao anterior.

No exemplo III.1 o custo associado ao fluxo  $x_0$  será  $f(x_0) = 36$ . Se passamos uma unidade de fluxo (na rede residual) no ciclo  $b-d-c-b$  teremos um novo fluxo  $x'$  onde  $x_{ab} = 2$ ,  $x_{ac} = 3$ ,  $x_{bd} = 2$ ,  $x_{cd} = 3$ ,  $x_{bc} = 0$ . Note agora que  $f(x') = 25$ . Observe que houve uma redução no custo já que o fluxo no ciclo  $b-d-c-b$  tem custo negativo.

Desta forma estabelecemos as condições de otimalidade baseada na obtenção da rede residual:

### Teorema III.2: (Condições de Ciclos de Custos Negativos)

Uma solução viável  $x^*$  é uma solução ótima do problema de fluxo de custo mínimo se e somente se a rede residual  $G(x^*)$  não contém ciclos de custo negativo.

**Demonstração:** Suponha inicialmente que  $x^*$  seja uma solução ótima e  $G(x^*)$  contenha ciclos de custo negativo. Do teorema anterior temos:

$$\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^* + \sum_{k=1}^r c(w_k) f(w_k), \quad \text{onde } r \leq m.$$

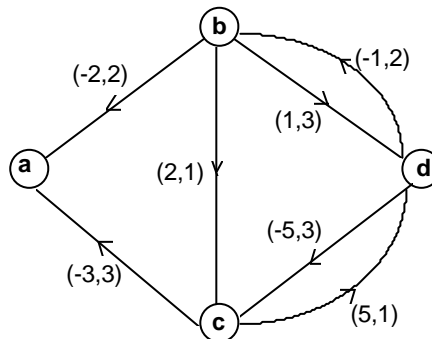
Note que os ciclos  $w_k$  estão em  $G(x^*)$ . Desta forma uma variação do fluxo nestes ciclos aumentantes implicará em uma diminuição da função objetivo (pois são ciclos de custo negativo). Chegamos portanto a uma contradição.

Suponha agora  $x^*$  viável e que a rede residual  $G(x^*)$  não contenha ciclos de custo negativo. Seja  $x_0$  o fluxo ótimo e  $x_0 \neq x^*$ . Do teorema anterior podemos decompor  $x_1 = x_0 - x^*$  em no máximo  $r \leq m$  ciclos aumentantes com respeito ao fluxo  $x^*$ . Logo:

$$\sum_{k=1}^r c(w_k) f(w_k) = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^0 - \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^*$$

Como não temos ciclos de custo negativo, segue  $cx_0 - cx^* \geq 0$ , ou ainda  $cx_0 \geq cx^*$ . Entretanto  $x_0$  é fluxo ótimo, assim  $cx_0 \leq cx^*$ , o que nos dá  $cx^* = cx_0$ . Portanto  $x^*$  também é fluxo ótimo, logo se  $G(x^*)$  não admite ciclos de custo negativo,  $x^*$  será solução ótima. •

**Exemplo III.3:** Considere o exemplo III.1 acima. A nova rede residual relativa ao fluxo  $x'$  dado por  $x_{ab} = 2, x_{bd} = 2, x_{bc} = 0, x_{ac} = 3, x_{cd} = 3$  será:



**Figura III.6: Rede Residual**

Note que o único ciclo da rede residual acima b-c-d-b não é de custo negativo, logo  $x'$  é fluxo ótimo.

### III.3.2) CONDIÇÕES DOS CUSTOS REDUZIDOS:

Consideremos inicialmente o seguinte resultado auxiliar:

**Lema III.1:** Para qualquer ciclo direcionado  $w$  em uma rede  $G$  temos:

$$\sum_{(i,j) \in w} \bar{c}_{ij} = \sum_{(i,j) \in w} c_{ij} \quad \text{onde } \bar{c}_{ij} = c_{ij} - \mathbf{p}(i) + \mathbf{p}(j)$$

**Demonstração:** Sejam  $i_1 - i_2 - \dots - i_k$ , os vértices de um ciclo  $w$  (note que  $i_1 = i_k$ ). Como  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \mathbf{p}(i) + \mathbf{p}(j)$ , temos que:

$$\sum_{(i,j) \in w} \bar{c}_{ij} = c_{i_1 i_2} - \mathbf{p}(i_1) + \mathbf{p}(i_2) + c_{i_2 i_3} - \mathbf{p}(i_2) + \mathbf{p}(i_3) + \dots + c_{i_{k-1} i_k} - \mathbf{p}(i_{k-1}) + \mathbf{p}(i_k) = \sum_{(i,j) \in w} c_{ij}$$

Note que  $\mathbf{p}(i_1) = \mathbf{p}(i_k)$ . •

**Observação:** Lembre-se que  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \mathbf{p}(i) + \mathbf{p}(j)$ , é o custo reduzido associado ao arco  $(i,j)$ . Formulamos assim o seguinte resultado:

**Teorema III.4:** (Condições de Custo Reduzido)

Uma solução viável  $x^*$  é uma solução ótima do problema de fluxo de custo mínimo se e somente se o conjunto de variáveis duais satisfazem a seguinte condição:

$$\bar{c}_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in G(x^*)$$

**Demonstração:** Provaremos este resultado mostrando a equivalência entre as condições de custo reduzido e as condições de ciclo de custo negativo.

Para mostrar que a condição de custo reduzido implica na condição dos ciclos negativos tomamos uma solução ótima  $x^*$  tal que:

$$\sum_{(i,j) \in w} \bar{c}_{ij} = \sum_{(i,j) \in w} c_{ij} - \mathbf{p}(i) + \mathbf{p}(j) \geq 0$$

para qualquer ciclo direcionado  $w$  em  $G(x^*)$ . Logo do lema anterior temos:

$$\sum_{(i,j) \in w} \bar{c}_{ij} = \sum_{(i,j) \in w} c_{ij} \geq 0,$$

portanto  $G(x^*)$  não contém ciclos de custo negativo.

Reciprocamente suponha  $x^*$  uma solução viável e que  $G(x^*)$  não tenha ciclos de custo negativo. Seja  $d(\cdot)$  rótulos parciais que denotam o caminho mais curto do nó 1 a todos os outros nós em  $G(x^*)$ . Do capítulo anterior (teorema II.1), temos que se a rede não contém ciclos de custo negativo, os rótulos  $d(\cdot)$  são bem definidos e satisfazem as condições  $d(j) \leq d(i) + c_{ij}$ ,  $\forall (i,j)$  em  $G(x^*)$ . Definindo  $\pi = d$ , temos  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi(i) + \pi(j) \geq 0$ ,  $\forall (i,j) \in G(x^*)$ . Logo  $x^*$  satisfaz as condições de custo reduzido. •

Observe ainda que a demonstração acima nos dá uma forma de se obter uma solução ótima dual resolvendo-se um problema de caminho mais curto.

Podemos obter também uma solução ótima primal a partir de uma solução ótima dual resolvendo-se um problema de fluxo máximo (Ahuja, capítulo 7).

### III.3.3) CONDIÇÃO DAS FOLGAS COMPLEMENTARES:

Nas duas seções anteriores estabelecemos condições de otimalidade baseadas na obtenção da rede residual. Estabeleceremos agora as condições de otimalidade em termos da rede original  $G=(N,A)$ .

#### **Teorema III.5:** (Condição das Folgas Complementares)

Uma solução viável  $x^*$  do PFCM é ótima se e somente se, o conjunto de variáveis duais  $\pi$ , os custos reduzidos e os fluxos em cada arco  $(i,j)$  satisfazem as seguintes condições de folgas complementares (qualquer que seja  $(i,j)$  em  $A$ ):

$$\text{Se } \bar{c}_{ij} \geq 0 \text{ então } x_{ij}^* = 0 \quad (i)$$

$$\text{Se } 0 < x_{ij} < u_{ij}, \text{ então } \bar{c}_{ij} = 0 \quad (ii)$$

$$\text{Se } \bar{c}_{ij} < 0 \text{ então } x_{ij}^* = u_{ij} \quad (iii)$$

**Demonstração:** Mostraremos que a condição de custo reduzido é equivalente às condições acima.

Inicialmente veremos que se as variáveis duais  $\pi$  e um fluxo  $x$  satisfazem as condições de custo reduzido as condições das folgas complementares serão satisfeitas:

**Caso 1:** Se  $\bar{c}_{ij} > 0$  (na rede original), a rede residual  $G(x^*)$  não poderá conter o arco  $(j,i)$  com custo  $\bar{c}_{ij} = -\bar{c}_{ji} < 0$  pois  $\bar{c}_{ij} > 0, \forall (i,j) \in G(x^*)$ . Teremos então  $x_{ij}^* = 0$ .

**Caso 2:** Se  $0 < x_{ij}^* < u_{ij}$  (na rede original), a rede residual conterá ambos os arcos  $(i,j)$  e  $(j,i)$ . Mas devemos ter  $\bar{c}_{ij} \geq 0$  e  $\bar{c}_{ji} \geq 0$ . Temos então  $\bar{c}_{ij} = \bar{c}_{ji} = 0$ .

**Caso 3:** Se  $\bar{c}_{ij} < 0$  (na rede original), a rede residual  $G(x^*)$  não pode conter o arco  $(i,j)$  pois  $\bar{c}_{ij} < 0$  na rede  $G(x^*)$ . Para se evitar a contradição devemos ter  $x_{ij}^* = u_{ij}$ .

Mostraremos agora que se um par  $(\pi, x)$  satisfaz as condições das folgas complementares será satisfazer também as condições de custo reduzido:

**Caso a:** Se  $\bar{c}_{ij} > 0$  temos  $x_{ij}^* = 0$  na rede original. Desta forma teremos  $\bar{c}_{ij} > 0$  na rede residual (vide definição).

**Caso b:** Se  $0 < x_{ij}^* < u_{ij}$  temos  $\bar{c}_{ij} = 0$  na rede original. Desta forma  $\bar{c}_{ij} = 0$  em  $G(x^*)$ . Teremos também um arco  $(j,i)$  na rede residual onde  $\bar{c}_{ji} = -\bar{c}_{ij} = 0$  implicando em  $\bar{c}_{ji} = 0$  em  $G(x^*)$ .

**Caso c:** Se  $\bar{c}_{ij} < 0$  então  $x_{ij}^* = u_{ij}$ . Temos um arco  $(j,i)$  em  $G(x^*)$  onde  $\bar{c}_{ji} = -\bar{c}_{ij} > 0$ .

Desta forma mostramos que, satisfazendo as condições acima:  $\bar{c}_{ij} > 0, \forall (i, j) \in A$ . •

Com as condições de otimalidade descritas aqui, obtemos os conceitos fundamentais que nos permitirão elaborar os algoritmos de fluxo de custo mínimo.