

RELAXAÇÃO LAGRANGEANA COM GERAÇÃO DE DESIGUALDADES VÁLIDAS
APLICADA AO PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS

Carlos Alberto de Jesus Martinhon

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E
COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Prof. Nelson Maculan D.Sc
(Presidente / Orientador)

Prof. Abílio Pereira de Lucena, Ph.D
(Orientador)

Prof. Adilson Elias Xavier, D.Sc

Prof. Cid Carvalho de Souza, Ph.D

Prof. Luiz Satoru Ochi, D.Sc

Prof. Marcus V. Poggi de Aragão, Ph.D

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
SETEMBRO DE 1998

MARTINHON, CARLOS ALBERTO DE JESUS

Relaxação Lagrangeana com Geração de Desigualdades Válidas Aplicada ao
Problema de Roteamento de Veículos

IX, 188p. 29,7cm

(COPPE/UFRJ, D.Sc PROGRAMA DE ENGENHARIA DE SISTEMAS -
OTIMIZAÇÃO 1998)

TESE - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Roteamento de Veículos
2. Relaxação Lagrangeana
3. Teoria Poliédrica

I COPPE/UFRJ.

II. Título (série)

*Dedico este trabalho a meus pais
e a minha esposa.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a algumas pessoas que contribuíram, direta ou indiretamente, para realização deste trabalho. Gostaria de agradecer, em especial, a meus orientadores Nelson Maculan e Abílio Lucena, pela amizade, apoio e incentivo dado nas diversas etapas deste trabalho.

Quero agradecer ao amigo Otton pelas lições de linguagem C, tão valiosas no início de minha implementação. Gostaria de agradecer aos amigos Marco, Nivaldo, Orizon, Dante, Rosa, Satoru, Márcia... pelos diversos momentos de descontração e “bate-papo”. Gostaria de agradecer também a meus sogros Cláudio e Martha por todo apoio dado.

Sou realmente muito grato a minha família, meus pais, minhas irmãs, sobrinhos e, em especial minha esposa Priscila pelo seu grande incentivo.

Gostaria de estender meus agradecimentos à CAPES e a todo o Programa de Engenharia de Sistemas da COPPE/UFRJ.

Atenciosamente,

Carlos Alberto de Jesus Martinhon.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc).

RELAXAÇÃO LAGRANGEANA COM GERAÇÃO DE DESIGUALDADES VÁLIDAS
APLICADA AO PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS

Carlos Alberto de Jesus Martinhon

Setembro, 1998.

Orientadores: Nelson Maculan

Abílio Pereira de Lucena

Departamento: Programa de Engenharia de Sistemas e Computação

RESUMO

Trabalhamos na construção de um método exato que busca a combinação de relaxação lagrangeana com resultados de combinatória poliédrica, direcionados, especificamente, para o problema clássico de roteamento de veículos. Neste problema, dispomos de uma frota de K veículos idênticos e desejamos atender um conjunto de n clientes, cada um com uma demanda específica. Todos os veículos devem partir e retornar a uma mesma origem (depósito) e cada cliente deve ser visitado uma única vez. O objetivo será minimizar o “custo total” de transporte no atendimento aos clientes sem violar a capacidade de cada veículo.

Dado um grafo G com $n+1$ vértices, uma K -árvore, é definida como sendo um sub-grafo conexo de G com $n+1$ vértices e $n+K$ arestas. Pode-se mostrar facilmente (Fisher[94.b]), que o problema de roteamento de veículos pode ser modelado como o problema da K -árvore mínima com

2K arestas incidentes ao depósito, juntamente com restrições adicionais de capacidade (imposta aos veículos) e restrições que indiquem que cada cliente deva ser visitado uma única vez. Estas restrições adicionais são dualizadas e um problema lagrangeano é obtido para geração de limites inferiores para o problema de roteamento.

Fazemos uma análise da abordagem utilizada por Fisher[94.b] que emprega K-árvores mínimas com a geração de desigualdades válidas (particularmente sub-rotas violadas). Este trabalho de Fisher[94.b], nos serviu de base para a adoção de novas estratégias na identificação de restrições violadas. Introduzimos as desigualdades *comb* e *multistars* (formulações de Cornuejols e Harche[93] e Araque et al.[90] respectivamente) e desenvolvemos um procedimento para fixação de variáveis.

Uma nova heurística lagrangeana é também apresentada na determinação dos limites superiores para o valor de uma solução ótima do problema de roteamento.

São apresentados resultados computacionais para instâncias de até 199 clientes (na geração dos limites inferiores), e de até 100 clientes, na busca em árvore implementada. Fazemos comparações de nossa abordagem com as abordagens apresentadas por Fisher[94.b] (K-árvores mínimas) e Miller[95] (*b-matching*) na geração dos limites inferiores.

Abstract of thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc)

LAGRANGEAN RELAXATION WITH VALID INEQUALITIES GENERATION FOR
VEHICLE ROUTING

Carlos Alberto de Jesus Martinhon

September, 1998

Thesis Supervisors: Nelson Maculan

Abílio Pereira de Lucena

Department: System Engineering Program

ABSTRACT

We consider an exact approach combining Lagrangean relaxation and polyhedral combinatorics dedicated to the Vehicle Routing Problem (VRP). In the VRP, we want optimally scheduling a fleet of K vehicles to make deliveries to n customers subject to vehicle capacity constraints.

Given a graph with $n+1$ nodes, a K -tree is defined to be a set of $n+K$ edges that span the graph. We show that the vehicle routing problem can be modeled as the problem of finding a minimum cost K -tree with two K edges incident on the depot and subject to some side constraints that impose vehicle capacity and the requirement that each customer be visited exactly once. The side constraints

are dualized to obtain a Lagrangean problem that provides lower bounds in a branch-and-bound algorithm.

We investigate, with the same framework proposed by Fisher[94.b], new identifications procedures to obtain violated inequalities (specially violated subtours) from the Lagrangean problem. We also deals with combs and multistars (like proposed by Cornuejols and Harche[93] and Araque at al.[90]) and we present a new scheme for fixing variables based on the K-tree relaxation.

A new lagrangean heuristic is also presented to produce upper bounds for the optimal solution associated with the VRP.

We present computational results for problems involving 199 customers (in the lower bounds generation procedure) and problems involving 100 customers in the branch-and-bound algorithm. We compare our approach with the approaches proposed by Fisher[94.b] (minimum K-trees relaxation) and Miller[95] (b-matching relaxation).

Conteúdo

Introdução	01
Capítulo I (Roteamento de Veículos)	
I.1 – Introdução	04
I.2 - Métodos heurísticos	06
I.3 - Métodos exatos	09
Capítulo II (Teoria poliédrica)	
II.1 – Introdução	15
II.2 - Definições básicas	17
II.3 - Caracterização de facetas	20
II.4 - Considerações adicionais	23
Capítulo III (Relaxação lagrangeana com geração de restrições)	
III.1 – Introdução	25
III.2 - Considerações iniciais	26
III.3 - Descrição da técnica	31
III.4 - Procedimento alternativo	38
Capítulo IV (Roteamento de veículos utilizando K-árvores mínimas)	
IV.1 – Introdução	42
IV.2 - Formulação utilizando K-árvores mínimas	43
IV.3 - Obtenção de uma K-árvore mínima c/ um número fixo de arestas incidentes ao depósito	53
IV.3.1 - Decremento do grau do depósito	63
IV.3.2 - Incremento do grau do depósito	65
IV.3.3 - Complexidade e estruturas de dados (K-árvore)	70
IV.4 - Geração de restrições	72
IV.5 - Heurísticas lagrangeanas	77
Capítulo V (Roteamento de veículos e combinatória poliédrica)	
V.1 – Introdução	81
V.2 - Notação e considerações iniciais	82
V.3 - Restrições de eliminação de sub-rotas	85
V.4 - Desigualdades <i>comb</i> (pente)	88
V.5 - Desigualdades <i>multistars</i> (estrelas)	90

Capítulo VI (Identificação de restrições violadas)	
VI.1 – Introdução	92
VI.2 - Geração de restrições de eliminação de sub-rotas (outra abordagem)	93
VI.2.1 - Implementação e estrutura de dados utilizada na geração de sub-rotas	103
VI.3 - Identificação de <i>combs</i> (pentas) violadas	106
VI.3.1 - Implementação e estrutura de dados utilizada na geração de <i>combs</i>	113
VI.4 - Identificação de <i>multistars</i> (estrelas) violadas	115
VI.4.1 - Implementação e estruturas de dados utilizada na geração de <i>multistars</i>	119
Capítulo VII (Fixação de variáveis)	
VII.1 – Introdução	121
VII.2 - Considerações iniciais	122
VII.3 - Fixando variáveis em <i>zero</i>	123
VII.3.1 - Determinação de limites inferiores para $P(2K, f)$ e $P'(2K, \bar{f}_0)$	134
VII.4 - Fixando variáveis em <i>um</i>	136
VII.4.1-Determinação de limites inferiores para $Q(2K, e)$ e $Q'(2K, e_0)$	141
VII.5 - Estrutura de dados utilizada na fixação de variáveis	143
Capítulo VIII (Resolução do problema dual lagrangeano e a busca em árvore)	
VIII.1 – Introdução	145
VIII.2 - Método subgradiente com geração de restrições	146
VIII.3 - Clarke&Wright lagrangeano	151
VIII.4 - Busca em árvore (<i>branch-and-bound</i>)	154
VIII.4.1- Determinação da variável <i>branching</i>	155
VIII.4.2- Implementação e estrutura de dados utilizada	157
Capítulo IX (Resultados computacionais)	
IX.1 – Introdução	161
IX.2 - Resultados computacionais (limites inferiores)	162
IX.3 - Resultados computacionais (<i>branch-and-bound</i>)	169
Conclusões	173
Referências Bibliográficas	175

Introdução

No problema clássico de roteamento dispomos de uma frota de K veículos idênticos e desejamos atender um conjunto de n clientes, cada um com uma demanda específica. Todos os veículos devem partir e retornar a uma mesma origem (depósito) e cada cliente deve ser visitado uma única vez. O objetivo será minimizar o “custo total” de transporte no atendimento aos clientes sem violar a capacidade de cada veículo. Iremos nos referir também ao problema clássico de roteamento como o problema de roteamento de veículos com restrições de capacidade (PRVRC).

Trabalhamos na construção de um método exato que busca a combinação de relaxação lagrangeana com resultados de combinatória polidédrica, direcionados, especificamente, para o problema de roteamento de veículos (PRVRC). Fazemos uma análise da abordagem utilizada por Fisher[94.b] que emprega K -árvores mínimas com a geração de desigualdades válidas (particularmente sub-rotas violadas). Este trabalho de Fisher[94.b], nos serviu de base para a adoção de novas estratégias na identificação de restrições violadas. Introduzimos as desigualdades *comb* e *multistars* (formulações de Cornuejols e Harche[93] e Araque et al.[90] respectivamente) e desenvolvemos um procedimento para fixação de variáveis.

Uma nova heurística lagrangeana é também apresentada na determinação dos limites superiores para o valor de uma solução ótima do problema de roteamento.

No capítulo I, fazemos uma breve explanação sobre algumas das variações do problema de roteamento decorrentes do acréscimo de novas restrições. Apresentamos algumas estratégias envolvendo métodos heurísticos e exatos, utilizadas na solução do problema de roteamento. Uma extensa bibliografia utilizando estas duas abordagens é citada.

Os principais conceitos e definições necessárias à aplicação da combinatória poliédrica, são apresentados no capítulo II. Como veremos, estes conceitos serão fundamentais para uma melhor compreensão dos capítulos posteriores.

No capítulo III, fazemos uma exposição do método que combina relaxação lagrangeana com a geração de desigualdades válidas. Este método difere da abordagem tradicional que determina restrições violadas a partir da relaxação linear de uma formulação para o problema original (*branch-and-cut* - vide Junger et al.[95]).

O capítulo IV, trata da relaxação lagrangeana com a geração de sub-rotas violadas utilizada por Fisher[94.b]. Nesta relaxação, Fisher trabalha basicamente na determinação de uma K-árvore mínima com $2K$ arestas incidentes ao depósito (Fisher[94.a]). Discutimos em seguida (seção IV.3), os principais aspectos, presentes em nossa implementação, na obtenção da K-árvore mínima. A geração das restrições de eliminação de sub-rotas e as heurísticas lagrangeanas utilizadas por Fisher são também apresentadas.

No capítulo V, apresentamos algumas classes de desigualdades válidas existentes na literatura para o problema de roteamento e que foram utilizadas em nosso trabalho. Tratamos especificamente das restrições de eliminação de sub-rotas, *combs* e *multistars* respectivamente.

O capítulo VI trata da identificação de restrições violadas a partir da solução do problema lagrangeano (K-árvore mínima com $2K$ arestas incidentes ao depósito). Discutimos novos procedimentos na determinação de sub-rotas, *combs* e *multistars* violadas. Em especial, apresentamos um algoritmo exato na identificação das restrições de eliminação de sub-rotas. Como veremos posteriormente, resolvemos de maneira mais eficiente o problema de identificação de sub-rotas violadas. Isto irá possibilitar a geração de limites inferiores melhores que os apresentados em Fisher[94b]. Os principais aspectos relativos à estrutura de dados utilizada em nossa implementação são também considerados.

No capítulo VII, apresentamos critérios que permitam fixar variáveis em *um* ou *zero*, conforme as arestas correspondentes apareçam ou não em uma solução ótima do problema original. Esta fixação de variáveis deverá ser feita sempre a partir da K-árvore mínima obtida na solução do problema lagrangeano. Como veremos, estes critérios irão propiciar condições para uma melhora na qualidade dos limites inferiores e superiores gerados no transcorrer do método subgradiente.

No capítulo VIII, fazemos uma síntese das principais etapas presentes na solução do problema dual lagrangeano (através do método subgradiente) e apresentamos uma nova heurística lagrangeana, baseada no algoritmo Clarke e Wright[64], para determinação dos limites superiores. Em seguida, fazemos uma exposição da estratégia de ramificação (*branching*) e a busca em árvore (*branch-and-bound*) implementada em nosso trabalho.

Finalmente, no capítulo IX, discutimos alguns dos resultados computacionais obtidos em nossa implementação. Fazemos uma comparação dos limites inferiores obtidos em nossa abordagem com as abordagens apresentadas em Fisher[94b] e Miller[95] respectivamente. Apresentamos uma tabela relacionando o número de variáveis fixadas em *zero* e *um* após a utilização de nosso procedimento que fixa variáveis. Mostramos ainda alguns resultados computacionais obtidos pela nova heurística lagrangeana (C&W lagrangeano) bem como o tempo de processamento e o número de nós gerados na árvore de busca.