

Capítulo IV

Roteamento de Veículos e a utilização de K-árvores Mínimas

IV.1 - Introdução:

Apresentamos neste capítulo, o trabalho desenvolvido por Fisher[94.b] que utiliza o método de relaxação lagrangeana com geração de restrições (capítulo anterior) aplicado ao problema clássico de roteamento de veículos. Como discutido anteriormente, uma frota de K veículos deve atender a um conjunto de n clientes cada um com uma demanda específica. O atendimento deve ser realizado de modo a não violar as restrições de capacidade de cada veículo. Além disso, cada cliente é visitado por apenas um veículo e nenhum veículo poderá atender mais de uma rota. O objetivo será atribuir a esses veículos uma sequência de visitas aos clientes que minimize o “custo total” de transporte.

Em seu artigo, Fisher[94.b] utiliza uma relaxação lagrangeana onde cada subproblema considerado se resume na obtenção de uma K -árvore mínima (definida adiante) com $2K$ arestas incidentes ao depósito (vértice 0). Este subproblema é resolvido em $O(n^3)$ passos e gera limites inferiores melhores que aqueles obtidos por Christofides et al.[81.a], que utilizam uma abordagem

parecida para a obtenção de limites inferiores. Neste artigo, Christofides et al.[81.a] constróem uma 0-árvore com um vértice fixo (depósito) de grau k (onde $K \leq k \leq 2K$).

Na seção seguinte apresentamos a formulação e a relaxação lagrangeana utilizadas por Fisher [94.b] na solução do problema de roteamento. Na seção IV.3, estudamos como obter uma K -árvore mínima com um número fixo de arestas incidentes ao depósito. Na seção IV.4, apresentamos a abordagem utilizada por Fisher na identificação de restrições violadas pela solução do problema lagrangeano. Finalmente, na seção IV.5, discutimos algumas estratégias para a determinação de limites superiores (heurísticas lagrangeanas) sugeridas por Fisher[94.b].

IV.2 - Formulação utilizando K -árvores Mínimas:

Suponha que cada um dos K veículos a serem utilizados tenha capacidade \mathbf{b} e cada cliente demanda d_i (onde $i=1,\dots,n$). Consideramos ainda $d_0 = 0$, como sendo a demanda associada ao depósito. Os custos entre as cidades i e j serão simétricos, ou seja, $c_{ij} = c_{ji}$.

Seja $N=\{1,\dots,n\}$ o conjunto de clientes e $N_0 = N \cup \{0\}$, o conjunto N com a inclusão do depósito. Utilizaremos uma variável binária x_{ij} para indicar se a aresta (i,j) foi ou não utilizada na solução do problema. Se $E = \{(i,j) / i,j \in N_0 \text{ e } i < j\}$ é o conjunto de arestas associados a nosso problema, diremos que um subgrafo T_k de um grafo $G(N_0, E)$ define uma K -árvore de G , se e somente se T_k for conexo, e tiver $n+1$ vértices e $n+K$ arestas.

Como as arestas (i,j) de E são não direcionadas, para simplificar a notação, assumiremos que o par de índices ij em x_{ij} estão associados a um par não ordenado. Assim, x_{ij} e x_{ji} denotam a mesma variável. Teremos portanto, $n(n+1)/2$ variáveis x_{ij} associadas a pares não-ordenados de $N_0 \times N_0$. Definimos ainda:

$$x = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, x_{12}, \dots, x_{n-1,n}) \text{ e } X = \left\{ x / x \in \{0,1\}^{|E|} \text{ define uma } K\text{-árvore e } \sum_{i=1}^n x_{0i} = 2K \right\}$$

Note $x \in X$ é um vetor de incidência (ou característico) associado à K -árvore com depósito de grau $2K$.

Seja d_i , a demanda associada ao cliente $i \in N$. Para cada $S \subseteq N$, define-se $\bar{S} = N_0 \setminus S$, $d(S) = \sum_{i \in S} d_i$ e $r(S) = \left\lceil \frac{d(S)}{b} \right\rceil$. Como veremos adiante, $r(S)$ representa um limite inferior para o número de veículos necessários para atender aos clientes do conjunto S . Para $S \subseteq N_0$, seja $E(S)$ o conjunto de todos os pares não-ordenados ij onde $i, j \in S$ e $i \neq j$. Assim, temos a seguinte formulação para o Problema de Roteamento de Veículos com restrições de capacidade:

$$z^* = \min \sum_{ij \in E(N_0)} c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$s.a. \quad \begin{cases} \sum_{\substack{j \in N_0 \\ i \neq j}} x_{ij} = 2; & \forall i \in N \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij} \geq 2r(S); & \forall S \subseteq N \text{ com } |S| \geq 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$x \in X \quad (4)$$

As desigualdades (3) são análogas às restrições de eliminação de sub-rotas utilizadas na formulação do problema do caixeiro viajante proposta por Dantzig, Fulkerson e Johnson[54]. Nobert[82] e Laporte et al.[85] mostraram que as restrições de capacidade (3) podem ser representadas equivalentemente por:

$$\sum_{ij \in E(S)} x_{ij} \leq |S| - r(S); \quad \forall S \subseteq N \text{ com } |S| \geq 2 \quad (3')$$

Para ilustrar a condição (3') vejamos o exemplo da figura IV.1 onde consideramos 3 veículos de capacidade 15 e duas partições S e S' . Ao lado de cada nó estão representadas as demandas de cada cliente.

Na partição S temos $r(S) = \left\lceil \frac{12}{15} \right\rceil = 1$. Segue então de (3') que $\sum_{ij \in E(S)} x_{ij} \leq 3 - 1 = 2$.

Logo, a restrição se verifica para esta partição já que temos apenas 2 arestas com ambas as

extremidades em S . Entretanto, para a partição S' temos $r(S') = \lceil 16/15 \rceil = 2$, assim

$\sum_{ij \in E(S')} x_{ij} \leq 3 - 2 = 1$, e a restrição não é satisfeita. Observamos portanto que a restrição

associada à partição S' é violada. Assim, temos uma solução não viável para o problema de roteamento de veículos com restrições de capacidade.

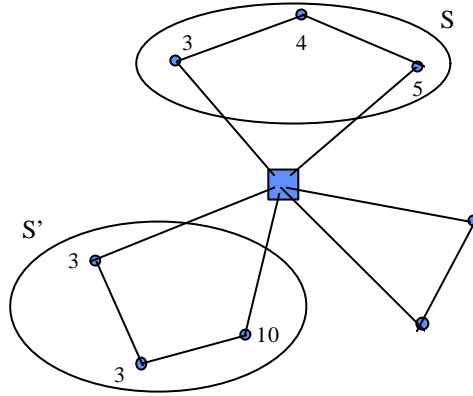


Figura IV.1: Solução que não satisfaz as restrições de capacidade

A viabilidade é garantida se a solução acima satisfizer a seguinte condição apresentada em Fisher[94.b]:

Teorema IV.2.1:

Uma solução $x \in X$ é viável para o problema de roteamento de veículos se e somente se satisfizer (2) e (3).

Prova:

(\leftarrow) Note que para x pertencente a X e que satisfaça a condição (2) devemos ter K ciclos que começam e terminam no depósito (não temos outra possibilidade). Seja S_k um destes ciclos onde $k \in \{1, \dots, K\}$. Se $d(S_k) > b$ então teremos $r(S_k) = \left\lceil \frac{d(S_k)}{b} \right\rceil > 1$. Segue-se então de (3)

que $\sum_{i \in S_k} \sum_{j \in S_k} x_{ij} \geq 4$. Isto é um absurdo já que $\sum_{i \in S_k} \sum_{j \in S_k} x_{ij} = 2, \forall k \in \{1, \dots, K\}$. Devemos ter portanto,

$d(S_k) \leq b, \forall k \in \{1, \dots, K\}$ (solução viável).

(\rightarrow) Se $x \in X$ é viável para o problema de roteamento, devemos ter K ciclos que começam e terminam no depósito. Segue portanto que a condição (2) é satisfeita. Seja $r(S)$ o número mínimo de veículos necessários para atender os clientes de S . Desta forma, como cada veículo deve entrar e sair de S , teremos pelo menos $2r(S)$ arestas entre os conjuntos S e \bar{S} . Logo (3) se verifica. •

Em seu trabalho, Fisher [94.b] apresenta inicialmente resultados para rotas com no mínimo 2 clientes, ou seja, não são permitidas soluções viáveis com a presença de rotas simples. Em um problema de roteamento de veículos, rotas simples são inviáveis quando:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n d_i - d_j > (K-1)b, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Note que a soma das demandas de todos os outros clientes (diferentes de j) não pode ser atendida pelos $(K-1)$ veículos restantes. Sendo assim, não podemos ter soluções viáveis para o problema de roteamento com rotas simples e utilizando K veículos. Como discutido em Fisher [94.b], sua abordagem pode ser facilmente modificada de maneira a permitir a presença de rotas simples.

Associando-se multiplicadores $u_i \in \Re$ ($i \in N$) às restrições (2) e $\mathbf{n}_S \in \Re^+$ ($\forall S \subseteq N$ c / $|S| \geq 2$) às restrições (3) e dualizando-as de forma lagrangeana temos:

$$\sum_{ij \in E(N_0)} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^n u_i \left(2 - \sum_{j \in N_0 \text{ e } i \neq j} x_{ij} \right) + \sum_{S \subseteq N} \mathbf{n}_S \left(2r(S) - \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \right) \quad (\text{i})$$

ou ainda:

$$\sum_{ij \in E(N_0)} c_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j \in N_0 \text{ e } i \neq j} x_{ij} - \sum_{S \subseteq N} \mathbf{n}_S \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} + 2 \sum_{i=1}^n u_i + 2 \sum_{S \subseteq N} \mathbf{n}_S r(S) \quad (\text{ii})$$

Para simplificar essa expressão vejamos o seguinte exemplo onde temos duas partições S_0 e S_1 como representadas na figura IV.2.

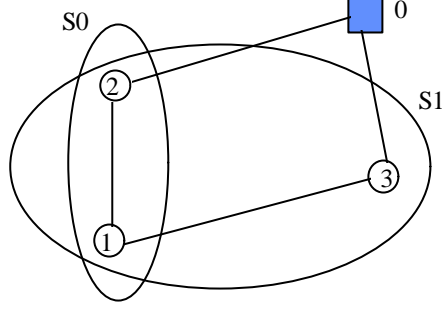


Figura IV.2: Obtenção da função lagrangeana

Desenvolvendo as parcelas não nulas de nossa expressão e lembrando que $x_{ji} = x_{ij}$ (sempre que $i > j$) temos:

$$c_{02}x_{02} + c_{03}x_{03} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} - u_1(x_{13} + x_{12}) - u_2(x_{02} + x_{12}) - u_3(x_{03} + x_{13}) - \\ - \mathbf{n}_{S_0}(x_{13} + x_{02}) - \mathbf{n}_{S_1}(x_{03} + x_{02}) + 2(u_1 + u_2 + u_3) + 2\mathbf{n}_{S_0}r(S_0) + 2\mathbf{n}_{S_1}r(S_1)$$

Note que, como não temos rotas simples não temos arestas duplicadas na função objetivo. Colocando as variáveis em evidência obtemos:

$$(c_{02} - u_0 - u_2 - \mathbf{n}_{S_0} - \mathbf{n}_{S_1})x_{02} + (c_{03} - u_0 - u_3 - \mathbf{n}_{S_1})x_{03} + (c_{12} - u_1 - u_2)x_{12} + (c_{13} - u_2 - u_3 - \mathbf{n}_{S_0})x_{13} + \\ + 2(u_1 + u_2 + u_3) + 2\mathbf{n}_{S_0}r(S_0) + 2\mathbf{n}_{S_1}r(S_1)$$

Generalizando este procedimento para a expressão (ii) chegamos à seguinte relaxação lagrangeana:

$$z_D(u, \mathbf{n}) = \min \sum_{ij \in E(N_0)} \bar{c}_{ij}x_{ij} + 2 \sum_{i=1}^n u_i + 2 \sum_{S \subseteq N} v_S r(S) \quad (5) \\ s. a. \quad x \in X$$

onde:

$$u_0 = 0 \quad e \quad \bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - u_j - \sum_{\substack{i \in S, j \in \bar{S} \\ \text{ou} \\ i \in \bar{S}, j \in S}} v_S$$

Temos que $z_D(u, \mathbf{n}) \leq z^*$ onde z^* é o valor da solução ótima do problema original (Geoffrion [74]). Utilizamos o método subgradiente (Held, Crowder e Wolfe[74]) para “resolver” o seguinte problema dual lagrangeano:

$$\begin{aligned} & \max z_D(u, \mathbf{n}) \\ & s.a. \ u \in \mathfrak{R}^n \\ & \quad \mathbf{n} \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{P.D})$$

obtendo assim o melhor limite inferior possível neste caso.

Como temos um número exponencial de restrições em (3), não é viável a dualização de todas essas restrições explicitamente. Sendo assim, devemos desenvolver mecanismos que gerem dinamicamente essas restrições à medida que forem sendo violadas pela solução do problema lagrangeano. Todas as outras restrições serão ignoradas fazendo-se $\mathbf{n}_s = 0$. Note que uma restrição ignorada só irá efetivamente contribuir para a função de custo lagrangeana quando seu multiplicador associado for não nulo. No método subgradiente, todos os multiplicadores são inicialmente tomados iguais a *zero*. Desta forma, uma restrição só é efetivamente considerada quando for violada pela solução do problema lagrangeano, já que isto levaria a um multiplicador não-nulo para a restrição.

Como discutido anteriormente, seria impraticável a geração explícita de todas as restrições apresentadas em (3) ou (3'). Fisher[94.b] trabalha com uma quantidade de restrições bem inferior às 2^n restrições geradas por todas as possíveis partições do conjunto N. Segundo Fisher[94.b], testes computacionais indicam que a utilização das restrições (3) geram limites inferiores mais interessantes quando comparados às restrições (3').

Fisher[94.b] propõe ainda a substituição de (3) ou (3') por um novo conjunto de restrições que levem a uma formulação mais forte (no sentido de uma relaxação linear) para o problema.

Note que o produto $br(S)$ define a capacidade mínima exigida para todos os veículos que circulam pelos vértices de S . Na ilustração abaixo apresentamos um exemplo bem simples onde temos uma partição S com 2 nós. Considerando $r(S)=1$ (segue-se de (3) que $\sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij} \geq 2$, e a restrição se verifica). Observe que temos 4 arestas com um de seus extremos em S e outro em \bar{S} .

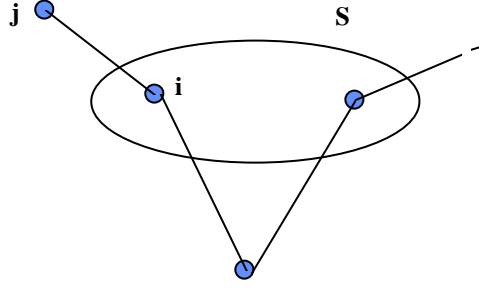


Figura IV.3: Análise das restrições (3)

Note que, se $x_{ij} = 1$ no lado esquerdo de (3) (para algum cliente $j \in \bar{S}$), teremos j sendo atendido por algum veículo de S . Dessa forma, a capacidade mínima $br(S)$ destinada aos veículos que percorrem S , deverá ser suficiente para atender também a demanda de clientes de \bar{S} tais que $x_{ij} = 1$ para algum i pertencente a S . Logo, a capacidade mínima de todos os veículos que entram e saem de S deverá ser igual a $d(S)$ mais a demanda de todos os clientes j de \bar{S} com $x_{ij} = 1$. Teremos portanto a seguinte modificação:

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij} \geq 2 \left\lceil \frac{d(S) + \sum_{\substack{i \in S \\ j \in \bar{S}}} d_j x_{ij}}{b} \right\rceil \quad (6)$$

A desigualdade (6) não pode ser utilizada diretamente já que seu lado direito é uma função não linear de x . Isto não impede entretanto, que a utilizemos como ferramenta para geração de outras restrições.

Seja $S \subseteq N$, um subconjunto qualquer de N . Fazendo $S' = \{j \in \bar{S} / j \geq 1 \text{ e } d_j > br(S) - d(S)\}$ definimos:

$$e_j = \begin{cases} 0, & j \in S \\ 0, & j \in S' \text{ e } |S'| \leq 2 \\ \frac{r(S)}{r(S)+1}, & j \in S' \text{ e } |S'| > 2 \\ 1, & j \in \bar{S} - S' \end{cases} \quad (7)$$

Note que S' representa os clientes de \bar{S} que não podem ser atendidos pela capacidade “ociosa” após o atendimento aos clientes de S . Ou seja, a demanda de j é superior à capacidade restante nos veículos que percorrem S .

A idéia é reduzir o máximo possível alguns dos coeficientes de (3) sem destruir a viabilidade do problema original, ou seja, sem violar as restrições de capacidade. Desta forma estaremos obtendo um novo conjunto de restrições (apresentadas abaixo) que dominarão as restrições apresentadas em (3). Assim:

$$\sum_{j=0}^n e_j \sum_{i \in S} x_{ij} \geq 2r(S), \quad \forall S \subseteq N \text{ para } |S| \geq 2 \quad (8)$$

Note em (7) que se $|S'| \leq 2$ teremos (8) apenas com coeficientes 0's e 1's. Entretanto, se $|S'| > 2$ aqueles coeficientes associados a S' serão alterados para $r(S)/(r(S)+1)$ (menor que 1). Obtemos portanto uma sensível melhora em relação às restrições (3).

O seguinte teorema (apresentado em Fisher [94.b]) garante a substituição das restrições (3) pelas restrições (8) apresentadas acima:

Teorema IV.2: Uma solução $x \in X$ será viável para o problema de roteamento de veículos se e somente se satisfizer as restrições (2) e (8).

Prova:

(\leftarrow) Este caso segue diretamente já que qualquer solução $x \in X$ satisfazendo (2) e (8) também irá satisfazer (2) e (3). Note que (3) e (8) são quase idênticos, excetuando-se apenas aqueles coeficientes que são menores em (8). Logo, do teorema IV.1, temos que $x \in X$ será viável para o problema de roteamento.

(\rightarrow) Mostraremos agora que se $x \in X$ satisfaz (2) e (3) então x também satisfaz a (8). Consideremos inicialmente $|S'| = 0$. Neste caso, teremos de (7) que $e_j = 1, \forall j \in \bar{S}$. Assim, (3) e (8) serão idênticos.

Vejamos agora a situação onde temos $|S'| \geq 1$ e $x_{kj^*} = 1$ para algum $j^* \in S'$ e $k \in S$. Dois casos deverão ser analisados para mostrar que (8) realmente se verifica:

Caso 1: ($|S'| \leq 2$)

Seja $S'' = \{j \in S' / \sum_{i \in S} x_{ij} > 0\}$. Se $|S''| = 1$, então o cliente j^* de S' e um ou mais clientes de S estarão em uma mesma rota r (isto se deve ao fato de termos $x \in X$ e que satisfaz (2)). Como $d_{j^*} > br(S) - d(S)$ ou ainda $d_{j^*} + d(S) > br(S)$, serão utilizados pelo menos $r(S)+1$ veículos para atender os clientes de $S \cup \{j^*\}$. Dessa forma, pelo menos $r(S)$ veículos serão necessários para atender os clientes de S que não estão na rota r . Assim, teremos pelo menos $2r(S)$ arestas incidentes em S de $\bar{S} - S'$. Segue portanto, que toda solução que satisfaz (3) com $|S''| = 1$ também irá satisfazer a (8). Assim, poderemos anular e_{j^*} (coeficiente de x_{ij^*} p/ $j^* \in S'$), sem perder a viabilidade de nosso problema.

Vejamos agora a situação onde temos $|S''| = 2$, ou seja, dois clientes de S' estão ligados a clientes de S . Se os dois clientes de S'' estiverem em uma mesma rota, analogamente à situação anterior teremos no mínimo $r(S)$ veículos para atender os demais clientes de S . Logo, teremos pelo menos $2r(S)$ arestas incidentes a S de $\bar{S} - S'$ e (8) se verifica.

Se os dois clientes de S'' estiverem em duas rotas distintas, serão necessários pelo menos $r(S)-1$ veículos para atender os demais clientes de S (que não estão nestas duas rotas). Segue

que, no mínimo $2r(S)-2$ arestas serão incidentes a S . Note entretanto que, para cada uma das duas rotas temos uma aresta de $\bar{S}-S'$ incidente a S . Assim, teremos no mínimo $2r(S)$ arestas incidentes a S de $\bar{S}-S'$. Concluimos então que mesmo fazendo $e_j = 0$, toda solução que satisfaz a (3) com $|S'| = 2$ também irá satisfazer a (8).

Caso 2: ($|S'| > 2$)

Como $d_{j^*} > br(S) - d(S)$ e $x_{kj^*} = 1$ para $k \in S$, $j \in S'$, serão necessários pelo menos $r(S)+1$ veículos para atender os clientes de S . Logo, teremos no mínimo $2r(S)+2$ arestas incidentes a S . Segue: $\sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij} \geq 2r(S) + 2$. Multiplicando ambos os lados da desigualdade por

$$r(S)/(r(S)+1) \text{ teremos: } \sum_{i \in S} \frac{r(S)}{r(S)+1} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij} \geq 2r(S).$$

Portanto, toda solução x que satisfaz a desigualdade acima também satisfaz (8) •

Apesar da melhoria introduzida acima, o conjunto de restrições (8) não define facetas. Para ilustrar essa situação vejamos o seguinte exemplo onde temos $S=\{1,2,3\}$, $d_1 = d_2 = d_3 = 3$, $d_j = 1$ para $j \geq 4$ e $b=5$.

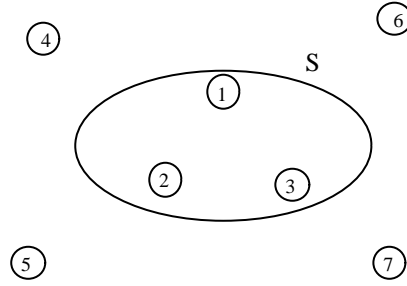


Figura IV.4: Análise das restrições (3) e (8)

Note que, como $S'=\emptyset$ temos (3) e (8) duas desigualdades idênticas. Assim, $\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \geq 4$, já que $\lceil 9/5 \rceil = 2$. É fácil ver que $\sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij} \geq 6$ é válida e domina (8). Como discutido no capítulo II, uma faceta não pode ser dominada por nenhuma outra restrição válida para o problema.

Antes de tratarmos propriamente da solução do problema dual lagrangeano vejamos como obter uma K -árvore mínima com $2K$ arestas incidentes ao depósito. Assim, definido os custos \bar{c}_{ij} para cada par $i, j \in N_0$, trataremos primeiramente da relaxação lagrangeana (apresentada em (5)).

IV.3 - Obtenção de uma K -árvore Mínima c/ um número fixo de arestas incidentes ao depósito:

Seja dado um grafo $G=(N_0, E)$ com um conjunto de $n+1$ vértices onde $N_0=\{0, 1, \dots, n\}$, um conjunto E de arestas e um inteiro $K \geq 0$. Como discutido na seção anterior, chamaremos T_K (subgrafo de G) de K -árvore se T_K for um grafo conexo com $n+1$ vértices e $n+K$ arestas. Note que se $K=0$, teremos uma árvore geradora de G (0-árvore). Mostraremos que para se obter uma K -árvore de menor custo, bastará calcular uma árvore geradora mínima T adicionando-se em seguida as K menores arestas de $E-T$.

Para resolvermos a relaxação lagrangeana associada ao problema de roteamento de veículos (como descrito anteriormente), precisamos calcular uma K -árvore mínima com $2K$ arestas incidentes ao depósito (vértice 0). Chamaremos este problema de $P(2K)$. Como veremos adiante, este problema pode ser resolvido em tempo polinomial ($O(n^3)$ iterações). Se impomos uma restrição adicional exigindo que cada um dos vértices i de N_0 tenham um grau no máximo g_i , estipulado a priori, teremos o problema da árvore geradora mínima com restrições de grau. Como demonstrado em Garey e Johnson[79], trata-se de um problema NP-Árduo! Em nosso caso entretanto, apenas o depósito tem grau fixo.

Fisher[94.a] faz uma extensão dos trabalhos desenvolvidos por Glover, Klingman [74 e 84], onde buscavam uma árvore geradora mínima (0-árvore) com um número fixo de arestas em um dado vértice.

Se a K -árvore mínima T_K obtida inicialmente não possuir grau $2K$ no depósito (número de arestas incidentes), fazemos trocas sucessivas entre as arestas de T_K , obtendo uma nova árvore T_K' incrementando ou decrementando o número de arestas incidentes ao depósito conforme o caso. Supondo por exemplo, que o grau do depósito seja superior a $2K$,

adicionamos uma aresta não-incidente ao depósito e não pertencente a T_K e retiramos uma das arestas de T_K incidentes ao depósito. Repetimos o processo até que se tenha o grau desejado. Analogamente, se o grau do depósito for inferior a $2K$ adicionamos uma aresta não pertencente a T_K e incidente ao depósito e retiramos uma aresta de T_K não incidente ao depósito. Da mesma forma, o processo é repetido até que se tenha o grau desejado.

Resumindo, teremos o seguinte procedimento. O valor $\text{GRAU}(0)$ abaixo representa o número de arestas incidentes ao depósito.

PROCEDIMENTO: K-árvore mínima com depósito de grau $2K$;

Início

- Calcula Árvore Geradora Mínima {árvore T }
- Adiciona as K menores arestas de $E-T$; {obtem T_K inicial}
- Calcula $\text{GRAU}(0)$;
- **Se** $\text{GRAU}(0) > 2K$ **então**
 - decrementa $\text{GRAU}(0)$ até que $\text{GRAU}(0)=2K$
- senão**
 - **se** $\text{GRAU}(0) \neq 2K$ **então**
 - incrementa $\text{GRAU}(0)$ até que $\text{GRAU}(0)=2K$;
- fim;** {se}
- Calcula custo de T_K ;

fim.

Figura IV.5: K-árvore mínima c/ $2K$ arestas incidentes ao depósito

Para mostrar a consistência do procedimento acima vejamos alguns resultados demonstrados em Fisher [94.a] que estabelecem as condições de otimalidade e resultados que permitirão incrementar ou decrementar o grau do depósito sempre partindo de uma K-árvore mínima T_K para outra K-árvore mínima T_K' fazendo apenas trocas entre as arestas do grafo.

Vejamos primeiramente a seguinte definição e lema apresentados em Glover e Klingman [84]:

Definição IV.1 - Dada uma árvore geradora T e duas arestas $e \in T$ e $e' \notin T$. O par de arestas (e, e') define uma *troca admissível* em T se e somente se $T - e \cup \{e'\}$ for uma árvore geradora.

•

Lema IV.1: Dados duas árvores geradoras distintas T e T' , existirá uma função biunívoca $h: T - T' \rightarrow T' - T$ gerando pares (p, q) de trocas admissíveis em T (onde $p \in T - T'$ e $q \in T' - T$).

Prova: Glover e Klingman[84]

•

A definição de trocas admissíveis para K -árvores pode ser generalizada da seguinte forma:

Definição IV.2- Considere uma K -árvore T_K , uma aresta $e \in T_K$ e $e' \notin T_K$. O par (e, e') definirá uma *troca admissível* em T_K se $T_K - e \cup \{e'\}$ for uma K -árvore.

•

O lema IV.2 a seguir é uma generalização do lema IV.1 para K -árvores:

Lema IV.2: Dados duas K -árvores distintas T_K e T_K' , existirá uma função biunívoca $h: T_K - T_K' \rightarrow T_K' - T_K$ gerando pares (p, q) de trocas admissíveis em T_K (onde $p \in T_K - T_K'$ e $q \in T_K' - T_K$).

Prova:

Seja \bar{T} um conjunto maximal em $T_K \cap T_K'$ que não contenha ciclos. Aumentamos \bar{T} quando necessário com arestas de T_K para obter uma árvore geradora $T \subseteq T_K$ e com arestas de T_K' para obter uma árvore $T' \subseteq T_K'$. Do lema IV.1, existe uma função biunívoca $h: T - T' \rightarrow T' - T$ de maneira que cada par de arestas (de $T - T'$ e $T' - T$ respectivamente) define uma troca admissível em T . Esta função também define um emparelhamento de arestas de $T_K - T_K'$ com arestas de $T_K' - T_K$, já que $T - T' \subseteq T_K - T_K'$ e $T' - T \subseteq T_K' - T_K$, caso contrário, teríamos um

elemento de $T_K \cap T_K'$ que poderia ser adicionado a \bar{T} sem a criação de um ciclo, contradizendo portanto o fato de que \bar{T} é maximal em $T_K \cap T_K'$.

Seja $S = T_K - T$ e $S' = T_K' - T$. Qualquer função biunívoca de arestas de S - S' para $S'-S$ define trocas admissíveis, completando a prova. •

O teorema seguinte (apresentado em Fisher[94.b]) garante a existência de uma K-árvore de custo mínimo:

Teorema IV.3: (K-árvore mínima inicial)

Seja $T \subseteq E$ uma árvore geradora mínima e $E' = E - T$ o complemento das arestas de E em relação a T . Seja $S \subseteq E'$ o conjunto das K menores arestas pertencentes a E' . Então $T_K = T \cup S$ será uma K-árvore mínima de $G(N_0, E)$.

Prova:

Suponha por contradição que exista uma K-árvore T_K' com custo $c(T_K') < c(T_K)$. Do lema IV.2, existe uma função biunívoca $h: T_K - T_K' \rightarrow T_K' - T_K$ de maneira que cada par define trocas admissíveis em T_K . Como temos $c(T_K') < c(T_K)$, existirá pelo menos um par (e, e') (sendo $e \in T_K - T_K'$ e $e' \in T_K' - T_K$) com $c(e') < c(e)$. Note que não podemos ter $e \in S$, pois $c(e') < c(e)$ contradiz a definição de S . Se $e \in T$ e $T - \{e\} \cup \{e'\}$ é uma árvore, chegaríamos a uma contradição pois T é uma árvore geradora mínima.

A única possibilidade então é considerarmos $e \in T$ e $T - \{e\} \cup \{e'\}$ não definindo uma árvore. Assim, como $T - \{e\} \cup \{e'\}$ é conexo, deverá existir um elemento $a \in S$ tal que $T - \{e\} \cup \{a\}$ é uma árvore. Logo, teremos $c(a) \geq c(e) > c(e')$, onde a primeira desigualdade se verifica já que T é uma árvore geradora de custo mínimo. Note então que poderíamos reduzir o custo substituindo e' por a em S , contradizendo a definição de S (conjunto das K menores arestas de E'). •

O lema IV.3 e os teoremas IV.4 - IV.6 seguintes generalizam para K-árvores alguns dos resultados obtidos por Glover e Klingman[84] para árvores geradoras (0-árvores). Estes

resultados servirão de base para construção dos procedimentos responsáveis pelo incremento ou decremento do grau do depósito quando necessário.

Antes de demonstrar o próximo lema apresentamos a seguinte notação:

Notação: Considere uma K-árvore T_K e uma aresta $e' \notin T_K$. Representaremos por $T_K(e')$ o sub-conjunto de arestas de T_K que definem troca admissíveis com e' . •

Lema IV.3: Consideremos $e, f \in T_K$; $e', f' \notin T_K$ arestas adjacentes ou não ao depósito. Se pelo menos um dos pares (e, e') ou (f, f') não dá uma troca admissível em T_K então (e, f') e (f, e') darão (cada um) uma troca admissível em T_K se e somente se $T_K' = T_K - e - f \cup \{e', f'\}$ é uma K-árvore.

Prova:

(\rightarrow) Se T_K' é uma K-árvore, do lema IV.2 teremos uma função biunívoca relacionando as arestas e, f com e', f' de maneira que ambos os pares, definem trocas admissíveis. Existirá somente dois emparelhamentos possíveis. Caso (e, e') e (f, f') não definam trocas admissíveis em T_K , as trocas (e, f') e (f, e') serão ambas admissíveis em T_K .

(\otimes) Agora mostraremos que T_K' é uma K-árvore se (e, f') e (f, e') são ambas admissíveis em T_K . Sem perda de generalidade assumiremos que (e, e') não define uma troca admissível em T_K , assim $e \notin T_K(e')$. Seja $e = (i, j)$. Como (f, e') define uma troca admissível em T_K , $T_K' \cup \{e\}$ é conexa. Assim, para mostrar que T_K' é uma K-árvore é suficiente mostrar que T_K' contém um caminho de i para j .

Note que $e \in T_K(f')$, implica na existência de um caminho em $T_K \cup \{f'\}$ de i para j . Se este caminho não contém f , ele será também um caminho em T_K' e a prova está completa. Se este caminho contém f , considere $f = (p, q)$ e, sem perda de generalidade, assumamos que o caminho em $T_K \cup \{f'\}$ de i até j passando por (p, q) inclui um caminho P_1 de i até p e um caminho P_2 de q até j . Como $f \in T_K(e')$ e $e \notin T_K(e')$, segue que $T_K \cup \{e'\}$ contém um caminho P_3 de p até q que não contém e (se P_3 contém e , o conjunto de arestas $P_3 \cup \{f'\} - \{e\}$ define um caminho em

$T_K \cup \{e'\}$ de i até j e assim teremos $e \in T_K(e')$. Portanto, P_1, P_2 e P_3 definem o caminho em T_K de i até j . •

O resultado seguinte, demonstrado em Fisher[94.a] garante a obtenção de uma K-árvore mínima com um número fixo de arestas incidentes ao depósito.

Seja $P(q)$ o problema de encontrar uma K-árvore com grau q no depósito. Considere (e, f) uma troca admissível (onde $e \in T_K$ e $f \notin T_K$). Esta troca será *satisfatória* se $c(e) > c(f)$, onde $c(e)$ e $c(f)$ são os custos das arestas e e f respectivamente.

Vejamos agora as condições de otimalidade apresentadas em Fisher[94.a]. Nos teoremas que se seguem o superescrito 0 indica uma aresta incidente ao nó 0.

Teorema IV.4: (Condições de Otimalidade)

Uma K-árvore T_K com grau $2K$ no depósito será ótima para o problema $P(2K)$ se e somente se satisfazer as seguintes condições de otimalidade:

- i) Sejam e e f duas arestas não incidentes ao depósito. Não existem trocas admissíveis satisfatórias (e, f) (onde $e \in T_K$ e $f \notin T_K$).
- ii) Não haverá trocas admissíveis satisfatórias (e^0, f^0) onde $e^0 \in T_K$ e $f^0 \notin T_K$ sendo e^0 e f^0 incidentes ao depósito.
- iii) Não haverá duas trocas admissíveis satisfatórias (e_1^0, f_1^0) e (e_2^0, f_2^0) com $e_1^0, e_2^0 \in T_K$, $f_1^0, f_2^0 \notin T_K$, sendo e_1^0, f_2^0 incidentes no depósito e f_1^0, e_2^0 não incidentes ao depósito.

Prova:

(®) Consideremos inicialmente T_K , uma K-árvore ótima para o problema $P(2K)$. Assim $c(T_K) < c(T_K')$, qualquer que seja a K-árvore T_K' com $2K$ arestas incidentes ao depósito. É fácil ver neste caso que, se (i), (ii) ou (iii) forem violadas, obtemos uma nova K-árvore T_K' com custo inferior a T_K (K-árvore ótima). Logo (i), (ii) e (iii) se verificam.

(¬) Suponha agora que T_K , satisfazendo (i), (ii) e (iii) não seja ótima. Teremos neste caso, a existência de uma K-árvore \bar{T}_K com custo $c(\bar{T}_K)$ inferior a $c(T_K)$. Do lema IV.2, temos

uma função biunívoca $h: T_K - \bar{T}_K \rightarrow \bar{T}_K - T_K$, de maneira que cada um dos pares obtidos gerem trocas admissíveis em T_K . Essa seqüência de trocas pode ser dividida em 2 tipos distintos: (a) trocas que não atualizam o grau do depósito ou (b), trocas que atualizam o grau do depósito (nó 0). É fácil ver que \bar{T}_K não pode ser obtida apenas através de trocas do tipo (a), pois teríamos (i) ou (ii) violadas chegando portanto a um absurdo. Logo, devemos ter também trocas do tipo (b). Considere (sem perda de generalidade) um conjunto de p trocas que incrementam o grau do depósito gerando uma nova K-árvore T_K' com custo $c(T_K')$ superior a $c(T_K)$. Suponha ainda que \bar{T}_K seja gerada através de p trocas que decrementam o grau do nó 0 (a partir de T_K'), e de maneira que $c(\bar{T}_K) < c(T_K)$. Deveremos ter neste caso, pelo menos um par de trocas que incrementa e decrementa respectivamente o grau do depósito em T_K gerando uma nova K-árvore T_K'' e com custo $c(T_K'') < c(T_K)$, contrariando portanto a condição (iii).

•

Note que nas 3 condições de otimalidade apresentadas acima, foram expressas todas as possíveis trocas entre as arestas de T_K sempre mantendo $2K$ arestas incidentes ao depósito. Em nenhuma delas poderemos ter uma troca admissível satisfatória, ou seja, não poderemos ter uma diminuição no custo da K-árvore.

Para ilustrar a condição (iii), vejamos o exemplo da figura IV.6, onde temos uma 2-árvore com 4 arestas incidentes ao depósito. As arestas f_1 e f_2^0 não pertencem a T_K .

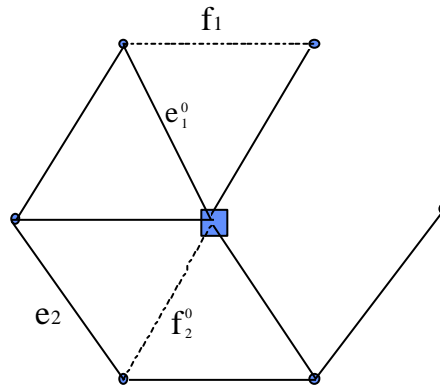


Figura IV.6: Condição (iii)

Para que as trocas admissíveis não sejam satisfatórias devemos ter $c(e_1^0) + c(e_2) \leq c(f_1) + c(f_2^0)$. Se as trocas forem efetuadas teremos uma nova 2-árvore de grau 4 no depósito e com custo superior à anterior.

Considere uma K-árvore mínima T_K onde q (grau do depósito) é menor que $2K$. O teorema seguinte (demonstrado em Fisher[94.a]) estabelece como obter uma troca admissível de maneira que a nova K-árvore T_K' obtida seja a menor K-árvore com $q+1$ arestas incidentes ao depósito.

Teorema IV.5: (Incremento do número de arestas incidentes ao depósito)

Suponha que T_K seja ótima para o problema $P(q)$ e $T_K' = T_K - e \hat{E}\{f^0\}$ onde (e, f^0) é uma troca admissível com $e \in T_K$ não incidente ao depósito, $f^0 \notin T_K$ incidente ao depósito e $c(f^0) - c(e)$ seja mínimo entre todas as trocas admissíveis que aumentam o grau do depósito. Então T_K' será ótima para $P(q+1)$.

Prova:

A prova consiste basicamente em mostrar que T_K' satisfaz as condições de otimalidade no teorema IV.4, sabendo-se de antemão, que T_K satisfaz as condições de otimalidade e $c(f^0) - c(e)$ é mínimo entre todas as possíveis trocas admissíveis que incrementam o grau do depósito.

Suponha inicialmente que a condição (i) seja violada por uma troca admissível satisfatória (e_1, f_1) em T_K' onde e_1 e f_1 são não incidentes ao depósito (sendo $e_1 \in T_K'$ e $f_1 \notin T_K'$). Seja $T_K'' = T_K' - e_1 \hat{E}\{f_1\} = T_K - e_1 - e \hat{E}\{f^0, f_1\}$.

Note que, se $f_1 = e$, teremos $T_K'' = T_K - e_1 \hat{E}\{f^0\}$ e $c(T_K'') \geq c(T_K')$ (já que $c(f^0) - c(e_1) \geq c(f^0) - c(e)$ em razão da troca (f^0, e)). Portanto, (e_1, f_1) não seria uma troca admissível satisfatória em T_K' .

Considere agora que $e_1 \neq f_1$. Do lema IV.2, existirá um emparelhamento de e_1, e com f_1, f^0 gerando trocas admissíveis em T_K . A troca admissível satisfatória (e_1, f_1) não poderá ser admissível em T_K já que T_K satisfaz as condições de otimalidade (i). Assim, (e_1, f^0) e (e, f_1) são ambas admissíveis em T_K . Deveremos ter portanto, $c(f_1) \geq c(e)$ pois T_K satisfaz as

condições de otimalidade expressas em (i). Note que, $c(f^0) - c(e_1) \geq c(f^0) - c(e)$ já que (e, f^0) define uma troca de custo mínimo. Assim $c(T_K'') \geq c(T_K')$, o que é absurdo pois (e_1, f_1) é uma troca admissível satisfatória em T_K' .

Considere agora que a condição (ii) seja violada por uma troca admissível satisfatória (e_1^0, f_1^0) , sendo e_1^0 e f_1^0 incidentes ao depósito. A prova de (ii) é análoga ao caso anterior. Seja $T_K'' = T_K' - e_1^0 \tilde{E}\{f_1^0\} = T_K - e - e_1^0 \tilde{E}\{f^0, f_1^0\}$. Se temos $e_1^0 = f^0$, basta observar que $c(T_K'') \geq c(T_K')$ pois (e, f^0) é uma troca admissível mínima. Se $e_1^0 \neq f^0$, do lema IV.2, existirá um emparelhamento de (e, e_1^0) com (f^0, f_1^0) definindo trocas admissíveis. A troca admissível satisfatória (e_1^0, f_1^0) não pode ser admissível em T_K já que T_K satisfaz a segunda condição de otimalidade. Portanto, (e_1^0, f_1^0) e (e, f_1^0) são ambas admissíveis em T_K . A primeira não pode ser admissível satisfatória em T_K (pois T_K satisfaz a condição (ii)), e a segunda não pode ser melhor que (e, f^0) . Portanto, $c(T_K'') \geq c(T_K')$, o que é absurdo pois (e_1^0, f_1^0) é admissível satisfatória em T_K' .

Finalmente, se a terceira condição de otimalidade é violada, teremos um par de trocas (e_1, f_1^0) e (e_2^0, f_2) que juntas serão satisfatórias. Como as condições de otimalidade (i) e (ii) para T_K' já foram comprovadas, teremos (do lema IV.3) que estas duas trocas poderão ser feitas sequencialmente para gerar uma K-árvore $T_K'' = T_K' - e_1 - e_2^0 \tilde{E}\{f_1^0, f_2\} = T_K - e - e_1 - e_2^0 \tilde{E}\{f^0, f_1^0, f_2\}$. Os casos onde $e = f_2$ ou $e_2^0 = f^0$ podem ser desconsiderados com base nos mesmos argumentos utilizados para as condições de otimalidade (i) e (ii). Assim, do lema IV.2, existirá um emparelhamento de e, e_1 e e_2^0 com f^0, f_1^0 e f_2 , definindo trocas admissíveis em T_K . As seis possibilidades de emparelhamentos são:

$$(e_1, f_1^0); (e_2^0, f_2); (e, f^0) \quad (1)$$

$$(e_2^0, f_1^0); (e_1, f_2); (e, f^0) \quad (2)$$

$$(e, f_1^0); (e_2^0, f_2); (e_1, f^0) \quad (3)$$

$$(e_2^0, f_1^0); (e, f_2); (e_1, f^0) \quad (4)$$

$$(e_1, f_2); (e_2^0, f_2^0); (e, f_1^0) \quad (5)$$

$$(e_1, f_2); (e_2^0, f^0); (e_1, f_1^0) \quad (6)$$

Note, em cada um dos seis casos apresentados, que as duas primeiras trocas não podem ser admissíveis satisfatórias, já que T_K satisfaz as condições de otimalidade (i), (ii) e (iii) respectivamente. A terceira troca por sua vez, será igual a (e, f^0) , ou a uma troca que não pode ser melhor que (e, f^0) . Assim $c(T_K'') \geq c(T_K')$. Segue que a condição (iii) acima não poderá ser violada. •

Suponha agora que o grau do depósito seja igual a $q > 2K$ na K-árvore T_K . O teorema seguinte estabelece como obter uma troca admissível de maneira que a nova K-árvore T_K' obtida seja a menor K-árvore de grau $q-1$.

Teorema IV.6: (Decremento do número de arestas incidentes ao depósito)

Suponha que T_K seja ótima para o problema $P(q)$ e $T_K' = T_K - e^0 \tilde{E}\{f\}$ onde (e^0, f) é uma troca admissível com $e^0 \in T_K$ incidente ao depósito, $f \notin T_K$ não incidente ao depósito e $c(f) - c(e^0)$ seja mínimo entre todas as trocas admissíveis que reduzem o grau do depósito. Então T_K' será ótima para $P(q-1)$.

Prova:

Demonstração análoga ao teorema IV.5. •

Vejamos agora, baseado nos resultados teóricos apresentados acima como incrementar ou decrementar o grau do depósito a partir de uma K-árvore mínima de grau q no depósito onde $q < 2K$ ou $q > 2K$ respectivamente. Caso a K-árvore mínima inicial tenha grau $q=2K$ no depósito o problema já estará resolvido.

Vejamos primeiramente como decrementar o grau do depósito:

IV.3.1 - Decremento do Grau do Depósito:

Seja T_K uma K-árvore mínima com $q > 2K$ arestas incidentes ao depósito. Eliminando todas as arestas incidentes ao depósito teremos **m** componentes conexas. Para cada nó **i** pertencente a uma componente atribuímos um mesmo rótulo $l(i)$. Caso uma componente seja conectada ao depósito por duas ou mais arestas (adjacentes ao depósito), qualquer uma destas arestas poderá ser eliminada sem desconectar a componente do depósito. Seja C o maior custo entre todas estas arestas.

Considere também C_i o maior custo entre todas as arestas de T_K que unem a componente **i** ao depósito.

Vejamos o seguinte exemplo (figura IV.7), onde ilustramos a obtenção de uma 2-árvore com grau 4 no depósito a partir de uma 2-árvore de grau 5 no depósito. Os respectivos valores de C e C_i para cada componente e os rótulos $l(i)$ estão também representados:

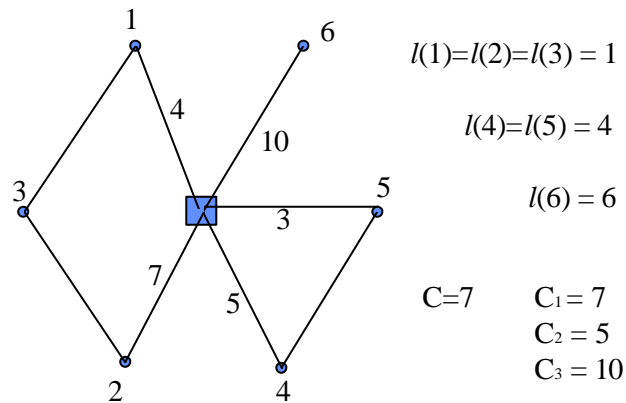


Figura IV.7: Determinação de C e C_i .

Note que $C = 7$ é o valor da maior aresta que une uma componente qualquer conectada ao depósito por 2 ou mais arestas (neste caso as componentes 1 e 2).

Desejamos eliminar de T_K uma aresta incidente ao depósito e substituí-la por uma aresta não pertencente a T_K e não incidente ao depósito (teorema IV.6).

Para determinar a melhor troca definimos:

$$w_{ij} = \begin{cases} c_{ij} - C & l(i) = l(j) \\ c_{ij} - \max\{C, C_{l(i)}, C_{l(j)}\} & l(i) \neq l(j) \end{cases}$$

onde $i \neq 0; j \neq 0$ e $(i, j) \notin T_K$.

Para obtermos a melhor substituição bastará encontrar a aresta (i, j) (não pertencente a T_K) tal que w_{ij} seja mínimo entre todas as possíveis escolhas de (i, j) . Logo, do teorema IV.6, adicionamos (i, j) e retiramos a aresta associada a C (caso $l(i)=l(j)$) ou uma das arestas associadas a $C, C_{l(i)}$ ou $C_{l(j)}$ respectivamente (se $l(i) \neq l(j)$). Note que as arestas a serem retiradas são adjacentes ao depósito.

No exemplo representado na figura IV.7, teremos $w_{56} = c_{56} - \max\{7, 5, 10\}$. Assim, se w_{56} for o mínimo entre todas as possíveis escolhas de w_{ij} , adicionamos a aresta $(5, 6)$ e retiramos a aresta $(0, 6)$ (associada a $C_{l(6)} = 10$) obtendo uma nova 2-árvore mínima com 4 arestas incidentes ao depósito.

Caso a substituição tenha sido feita entre vértices com rótulos distintos (como no exemplo acima) deveremos atualizar todos os rótulos na componente j por $l(i)$.

Resumindo, teremos o seguinte procedimento (onde q (grau do depósito) é maior que $2K$).

PROCEDIMENTO: Decrementa-grau;

Início

- Determinar m componentes conexas $l(i)$ (onde $i=1, \dots, m$);

Repita

- Calcula C e C_i $p/$ $i = 1, \dots, m$

- Calcula w_{ij} , $\forall (i, j) \notin T_K$ e $i \neq 0, j \neq 0$;

- Seja (p, q) tal que w_{pq} é o mínimo de w_{ij} entre todas as possíveis escolhas de (i, j) ;

- Obter aresta $(0, s)$ associada a C (se $l(p) = l(q)$) ou $\max\{C, C_{l(p)}, C_{l(q)}\}$ se $l(p) \neq l(q)$;

- Adicionar (p, q) e retirar $(0, s)$ de T_K ;
- Atualizar rótulos se $l(p) \neq l(q)$;
- $q := q-1$;

Até que $q = 2K$;

fim. {procedimento}

Figura IV.8: Procedimento decrementa grau

Na seção IV.3.3, discutiremos algumas questões relativas à implementação e estruturas de dados utilizada. Como veremos, este procedimento poderá ser executado em no máximo $O(n^3)$ passos.

IV.3.2 - Incremento do Grau do Depósito:

Tratemos agora da situação onde temos o número de arestas incidentes ao depósito menor que $2K$ na K -árvore mínima inicial.

Esta situação é um pouco mais delicada que a anterior. Note que devemos ter um cuidado maior na retirada de alguma das arestas não incidentes ao depósito. A eliminação de algumas dessas ligações pode tornar o grafo desconexo.

Seja $T_K = T \cup S_0 \cup S_1$, onde T é uma árvore geradora mínima contida em T_K e $S_0 \cup S_1 = T_K - T$. Todas as arestas de S_0 são adjacentes ao depósito e todas as arestas de S_1 são não-adjacentes ao depósito.

Considere T uma árvore com raiz no vértice 0 (depósito) e seja $j(i)$ o predecessor do nó i nesta árvore. Utilizando as idéias apresentadas em Glover & Klingman [74], Fisher[94.a] considera:

$$w_i = \begin{cases} -\infty & i = 0 \text{ ou } j(i) = 0 \\ \max\{w_{j(i)}, c_{ij(i)}\} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Note que para $i \neq 0$ e $j(i) \neq 0$, w_i representa o custo da maior aresta não incidente ao depósito no único caminho em T de i até 0 .

Para ilustrar a notação acima vejamos o seguinte exemplo onde temos uma $T_K = T \cup S_0 \cup S_1$ (2-árvore). A árvore geradora T está representada em linhas contínuas. As arestas e e f pertencem a S_0 e S_1 respectivamente:

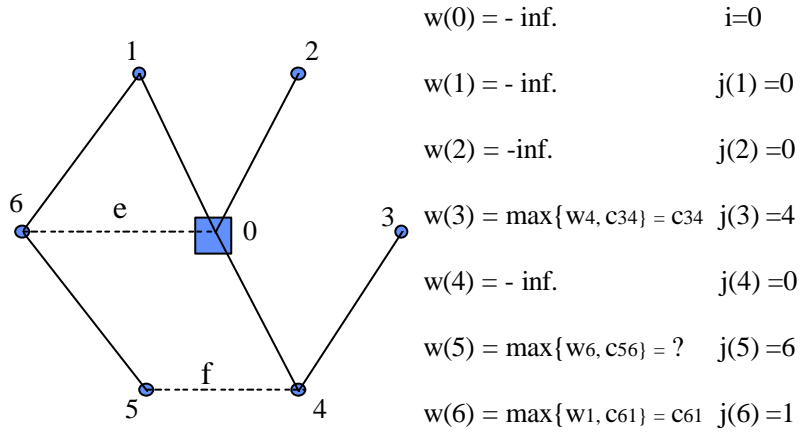


Figura IV.9: Incremento do grau do depósito

O vetor w deverá ser obtido em 3 etapas. Primeiro inicializamos w_i com $-\infty$ para os vértices i que tenham o depósito como predecessor. Em seguida calculamos w_i para todos os vértices onde $w_{j(i)} \neq -\infty$, e finalmente calculamos w_i para $w_{j(i)} \neq -\infty$. Procedendo dessa maneira descobrimos o valor de $w(5)$ na figura IV.9 acima. Como discutido adiante (na próxima seção), utilizamos uma lista de arestas na armazenagem dos dados. Neste caso, o vetor w poderá ser construído a medida que percorremos as arestas de T utilizando uma estratégia do tipo *backtracking* (Horowitz e Sahni[78]).

Considere agora $a(i)$ uma aresta de T no caminho de i até 0 onde $c(a(i)) = w_i$, ou seja, $a(i)$ é a aresta de maior custo neste caminho. Considere também:

$$C_1 = \max \{c(f) / f \in S_1\}$$

$$C_2 = \max \{w_i / (0, i) \in S_0\}$$

Seja $a_1 \in S_1$ onde $c(a_1) = C_1$, ou seja, a_1 é a maior aresta de S_1 não incidente ao depósito. Considere também $(0, i^*) \in S_0$ onde $C_2 = w_{i^*}$ e $a_2 = a(i^*)$, ou seja, a_2 é a maior aresta de T não-incidente ao depósito no caminho de i^* até 0. Finalmente, para toda aresta $(0, i) \notin T_K$, seja $\bar{c}_i = c_{0i} - \max\{C_1, C_2, w_i\}$.

Vejamos agora, como identificar a troca admissível de custo mínimo incrementando paralelamente o grau do depósito (teorema IV.5).

Como observado anteriormente, dado uma K -árvore T_K e uma aresta $e' \notin T_K$, representamos por $T_K(e')$, o conjunto de arestas de T_K que definem uma troca admissível com e' . Note que $T_K(e')$, contém precisamente aquelas arestas de T_K que podem ser eliminadas de $T_K \cup \{e'\}$ sem destruir sua conectividade. Analogamente, para uma árvore T e $e' \notin T$, seja $T(e') \subseteq T$, o conjunto de arestas que podem ser eliminadas de $T \cup \{e'\}$ sem destruir sua conectividade.

Dado um conjunto S satisfazendo a $S \cap T = \emptyset$ e $S \cap T_K = \emptyset$, podemos estender as definições acima e representar por $T(S)$ e $T_K(S)$, o conjunto de arestas em T ou T_K que podem ser eliminadas de $T \cup S$ ou $T_K \cup S$ sem perda da conectividade.

Temos então o seguinte lema:

Lema IV.4: $T(S) = \bigcup_{e' \in S} T(e')$.

Prova:

Claramente temos $\bigcup_{e' \in S} T(e') \subseteq T(S)$. Assim, é suficiente mostrar que qualquer $e \in T(S)$ pertence também a $T(e')$ para algum $e' \in S$. Note que $T \cup S - e$ é conexa, e portanto deve conter uma árvore T' . Do lema IV.1, as arestas de $T' - T$ podem ser emparelhadas com as arestas de $T - T'$ de maneira que cada par defina uma troca admissível em T . Então $e \in T(e')$, onde e' é a aresta associada a e .

•

O teorema seguinte (demonstrado em Fisher [94.a]), nos dá uma troca admissível para T_K incrementando o grau do depósito de maneira que a próxima K-árvore obtida seja mínima.

Teorema IV.7: (Melhor troca admissível)

A troca de menor custo exigida no teorema IV.5 corresponde a adicionarmos a aresta $(0, i)$ que minimiza \bar{c}_i , e eliminarmos a_1, a_2 ou $a(i)$ conforme C_1, C_2 ou w_i seja o máximo respectivamente na expressão definindo \bar{c}_i .

Prova:

Devemos mostrar que $\max\{C_1, C_2, w_i\}$ é o custo da maior aresta em $T_K^1(\{0, i\})$ (arestas de $T_K(\{0, i\})$ não incidentes ao nó 0). Note que as arestas de $T_K^0(\{0, i\})$ contém S_1 e as arestas de T não incidentes ao nó 0, que podem ser eliminadas sem a perda da conectividade. Seja $T_1(e)$, as arestas de T não incidentes ao nó 0 que podem definir uma troca admissível com e . Do lema IV.4, temos:

$$T_K^1(\{0, i\}) = S_1 \cup \left(\bigcup_{e \in S_1} T_1(e) \right) \cup \left(\bigcup_{e \in S_0} T_1(e) \right) \cup T_1(\{0, i\})$$

Aqui, C_1 é o custo máximo associado a uma aresta de S_1 . Nenhuma aresta de $\bigcup_{e \in S_1} T_1(e)$ poderá ter um custo superior a C_1 ou chegaríamos a uma contradição já que T é árvore geradora mínima (contida em T_K). Finalmente, C_2 e w_i são os custos máximos, associados a alguma aresta de $\bigcup_{e \in S_0} T_1(e)$ e $T_1(\{0, i\})$ respectivamente. •

Para ilustrar esse resultado vejamos o seguinte exemplo onde temos uma 4-árvore com grau 6 no depósito:

Supondo $c_{05} = 9$ e $c_{03} = 11$ teremos:

$$\bar{c}_3 = c_{03} - \max(5, 8, 3) = 11 - 8 = 3$$

$$\bar{c}_5 = c_{05} - \max(5, 8, 7) = 9 - 8 = 1$$

Segue, do teorema IV.3.5 que a melhor substituição será colocarmos $(0,5)$ e retirarmos $a_2 = (4,5)$ associado a $C_2 = 8$.

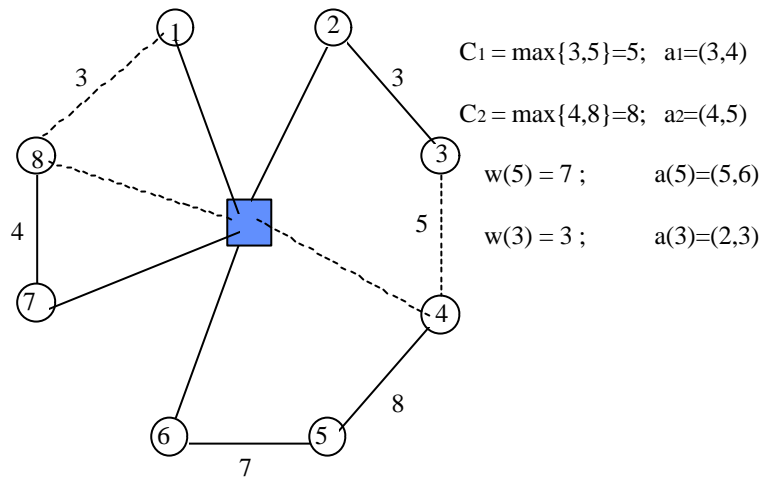


Figura IV.10: Incremento do Grau do Depósito

Note que se adicionamos $(0,i) \notin T_k$ e retiramos a_1 por exemplo, não tornaremos o grafo desconexo já que $a_1 \notin T$. Da mesma forma, se a_2 for retirado não teremos um grafo desconexo pois $a_2 = a(i^*)$ pertence ao caminho de i^* até 0 em T (note que i^* já está conectado ao depósito por $(0,i^*) \in S_0$). Assim, com a presença das arestas $(0,i^*)$ e a_2 teremos a formação de um ciclo e a_2 poderá ser eliminada sem destruir a conexidade de T_K . Finalmente, se eliminamos $a(i) \in T$, ao acrescentarmos $(0,i)$ continuamos com um grafo conexo com mais uma aresta incidente ao depósito. A inserção de $(0,i)$ forma um ciclo e $a(i)$ poderá ser retirada sem nenhum problema.

Resumindo todos os passos descritos acima teremos o seguinte algoritmo:

PROCEDIMENTO: Incrementa-Grau;

Início

Repita

- Utilizando T calcular $j(i)$ p/ $i=1, \dots, n$;
- Utilizando j e T calcular w_i p/ $i=1, \dots, n$;
- Calcular : C_1 e C_2 ;
- Calcular: $\bar{c}_i = c_{0i} - \max(C_1, C_2, w_i)$ p/ $(0,i) \notin T_K$;
- Adiciona em T_K a aresta $(0,i)$ associada ao mínimo de \bar{c}_i p/ $(0,i) \notin T_K$;
- Retira a_1, a_2 ou $a(i)$ associado ao máximo de C_1, C_2 e $w(i)$ respectivamente.
- Recalcular as arestas pertencentes a T , S_0 e S_1 ;
- $q:=q+1$;

Até que $q=2K$;

fim. {procedimento}

Figura IV.11: Procedimento increnta grau

Observe que após a troca das arestas, necessitamos reorganizar nossa K -árvore determinando quais arestas pertencem a T , S_0 e S_1 respectivamente.

Como veremos na seção seguinte, o procedimento incrementa-grau poderá ser implementado em $O(n^3)$ passos.

IV.3.3 - Complexidade e Estruturas de Dados (K-árvore):

Todas as arestas do grafo são armazenadas em uma lista L de m arestas formada por 3 campos (dois campos ENDV1 e ENDV2 representando os extremos de uma aresta e outro campo WEIGHT representando o custo desta aresta). Note que, no máximo teremos $m=n(n+1)/2$ arestas nesta lista (grafo completo).

Como discutido anteriormente, devemos calcular uma K -árvore mínima inicial onde $T_K = T \cup S_0 \cup S_1$. O procedimento utilizado é uma variação do algoritmo de Kruskal[56] onde se faz uma ordenação parcial das arestas do grafo. Através de trocas sucessivas, todas as arestas

de L serão armazenadas satisfazendo a estrutura de *heap*, de maneira que a raiz contenha sempre a aresta de menor custo do grafo.

Definimos uma nova lista TK com $n+K$ componentes que irá armazenar nossa K -árvore mínima inicial. Teremos então n arestas em T (já que nosso grafo é composto por $n+1$ vértices) e K arestas pertencentes a S_0 e S_1 respectivamente. Apresentamos na figura IV.12, a estrutura utilizada.

Cada aresta retirada desse *heap* (lista L) deverá ser transportada (se possível) para TK até que $n+K$ arestas tenham sido inseridas. A idéia é armazenar nossa árvore T nas n posições iniciais de TK e as arestas pertencentes a S_0 e S_1 nas posições que variam entre $n+1$ e $n+K$. Este procedimento será importante principalmente no incremento do grau do depósito onde o vetor W (discutido na seção anterior), e o vetor de predecessores J é calculado apenas utilizando-se as arestas de T , situado nas n primeiras posições de TK.

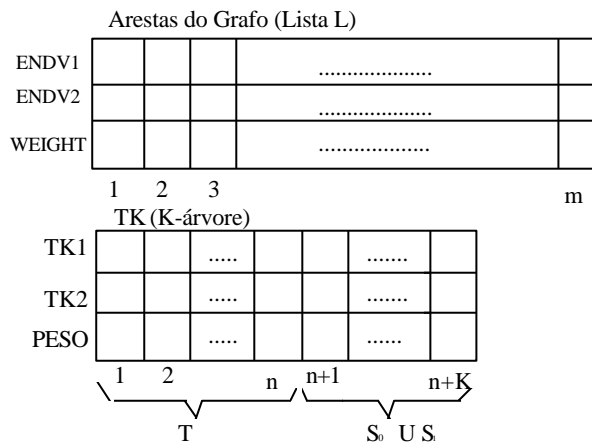


Figura IV.12 : Lista de Arestas

Toda aresta retirada do *heap*, será adicionada à árvore geradora mínima caso sua inclusão não forme um ciclo com as arestas de T já selecionadas. Caso contrário, esta aresta deve ser inserida nas posições correspondentes a S_0 e S_1 . Este procedimento é repetido até que a árvore T esteja completa.

Necessitamos $O(m)$ passos para construção do *heap* inicial e $O(\log m)$ passos para sua reconstrução após a retirada de cada aresta presente na raiz (Syslo et al.[83]). Se p arestas forem pesquisadas até a obtenção de TK, teremos uma complexidade total de $O(m+p \log m)$ passos para a determinação da K-árvore mínima inicial. Podemos expressar essa complexidade em função do número de vértices fazendo $p=O(m)=O(n^2)$ (pior caso). Neste caso teremos $O(n^2 + 2n^2 \log n)$, ou ainda $O(n^2 \log n)$ passos para construção da K-árvore mínima inicial.

Note que, após a construção de TK, temos $n_a = m - (n+K) = O(n^2)$ arestas na lista L resultante (já que $m = O(n^2)$). Nos procedimentos decrementa-grau e incrementa-grau, fazemos trocas entre as arestas de L (arestas não pertencentes a TK) e TK, atualizando o grau do depósito. Serão necessários portanto, $O(n^2)$ passos (no pior caso) para executarmos cada uma das trocas que atualizam o grau do depósito. Assim, nos procedimentos decrementa-grau e incrementa-grau, teremos $O(n)$ trocas (no pior caso) até que se tenha grau $2K$ no depósito. Segue então que a complexidade total será de $O(n^3)$ iterações em ambos os casos.

Analisando-se os procedimentos calcula K-árvore mínima inicial, decrementa-grau e incrementa-grau separadamente, obtemos uma complexidade total de $O(n^3)$ passos na obtenção da K-árvore mínima com $2K$ arestas incidentes ao depósito. Como discutido anteriormente, o custo associado à K-árvore mínima irá contribuir na determinação de um limite inferior para o valor da solução ótima do problema original (roteamento).

Feitas as devidas considerações para a resolução da relaxação lagrangeana (obtenção da K-árvore mínima), vejamos como identificar algumas das restrições violadas por esta solução:

IV.4 - Geração de Restrições:

Trataremos agora da abordagem utilizada por Fisher[94.b] na solução do problema lagrangeano. Seja $X = \left\{ x / x \in \{0,1\}^{|E|} \text{ define uma K - arvore e } \sum_{i=1}^n x_{oi} = 2K \right\}$. Como discutido anteriormente (seção IV.2), um limite inferior para z^* (solução ótima do problema original) é obtido resolvendo-se o seguinte problema lagrangeano:

$$z_D(u, \mathbf{n}) = \min \sum_{ij \in E(N_0)} \bar{c}_{ij} x_{ij} + 2 \sum_{i=1}^n u_i + 2 \sum_{S \subseteq N} v_S r(S) \quad (9)$$

s. a. $x \in X$

onde:

$$u_i \in \Re, \quad \mathbf{n}_S \geq 0, \quad u_0 = 0 \quad e \quad \bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - u_j - \sum_{\substack{i \in S, j \in \bar{S} \\ \text{ou} \\ i \in \bar{S}, j \in S}} v_S$$

Os valores $u_i \in \Re$ (para $i=1, \dots, n$) e $\mathbf{n}_S \geq 0$ podem ser arbitrados (usualmente inicializados em zero) e ajustados com a utilização do método subgradiente. Como temos um número muito grande de restrições de capacidade, devemos nos restringir apenas a um subconjunto destas. Assim, restrições de capacidade serão dualizadas apenas quando violadas pela solução do problema lagrangeano corrente. Da mesma forma, restrições de capacidade podem ser descartadas quando seus multiplicadores associados se tornarem iguais a zero. Fisher[94.b] entretanto, mantém explicitamente dualizadas, restrições com multiplicadores nulos durante um número pré-determinado de iterações do subgradiente.

Antes de tratarmos diretamente da geração do conjunto de restrições inicial, vejamos um exemplo particular onde são atribuídos valores aos multiplicadores $u_i \in \Re$ e $\mathbf{n}_S \geq 0$, obtendo $z_D(u^*, \mathbf{n}^*) = z^*$ na resolução do problema lagrangeano.

O seguinte exemplo apresentado por Fisher[94.b], serve como motivação para sua estratégia na determinação de um número inicial de restrições de eliminação de sub-rotas candidatas à dualização.

Considere um problema de roteamento onde cada cliente i está a uma distância d_i do depósito, $c_{ij} = |d_i - d_j|$, $\forall i, j \in N$; $K = \lceil n/b \rceil = n/b$ e finalmente, $\bar{d}_j = 1$ para todo cliente j em N (excepcionalmente nesta seção representaremos por \bar{d}_j a demanda do cliente j). Para simplificar a notação, assumimos n/b inteiro e $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. É fácil ver que uma solução viável para este problema pode ser obtida atribuindo o veículo 1 aos clientes 1,2,...,b; o veículo 2 aos clientes $b+1, b+2, \dots, 2b$ e assim sucessivamente até que o veículo K seja atribuído aos clientes $n-b+1, \dots, n$. O valor da função objetivo associado a esta solução será

$Z = 2(d_b + d_{2b} + \dots + d_{n-b} + d_n)$. Para ilustrar essa situação vejamos o seguinte exemplo onde temos $n=12$, $b=4$ e consequentemente $K=3$ veículos:

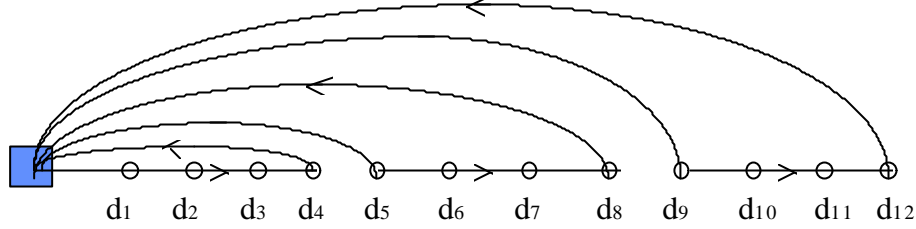


Figura IV.13: Determinação do multiplicadores de Lagrange (exemplo particular)

Note que, se temos apenas distâncias euclidianas entre os clientes, todos esses clientes deverão estar em uma mesma reta, já que $c_{ij} = |d_i - d_j| \quad \forall i, j \in N$!

Considere agora a seguinte atribuição dada aos multiplicadores de Lagrange $u_i \in \Re$ e $\mathbf{n}_S \geq 0$:

$$\begin{aligned} u_i^* &= 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-1 \\ u_n^* &= d_n - d_{n-1}; \\ \mathbf{n}_{S_k}^* &= d_k - d_{k-1}; \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{onde } S_k = \{k, \dots, n\} \\ \mathbf{n}_S^* &= 0, \quad \forall S \subseteq N \text{ e } S \neq S_k \quad (\text{sendo } |S| \geq 2) \end{aligned}$$

Mostraremos que, com a atribuição dada aos multiplicadores acima obtemos $z_D(u^*, \mathbf{n}^*) = z^*$. De fato, fazendo a substituição dos valores u^* e \mathbf{n}^* na função lagrangeana obtemos:

$$\begin{aligned} z_D(u^*, \mathbf{n}^*) &= \min \sum_{(i,j) \in E(N_0)} \bar{c}_{ij} x_{ij} + 2(d_n - d_{n-1}) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{n}_{S_k}^* \left\lceil \frac{\bar{d}(S_k)}{b} \right\rceil \\ \text{s. a. } & x \in X \end{aligned} \quad (10)$$

Note entretanto que:

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - u_j - \sum_{\substack{i \in S_k, j \in \bar{S}_k \\ \text{ou} \\ i \in \bar{S}_k, j \in S_k}} v_{S_k} = 0, \quad \forall (i, j) \in N. \quad (11)$$

Para ilustrar esse fato, vejamos o seguinte exemplo onde temos $i=3, j=6, n=6$:

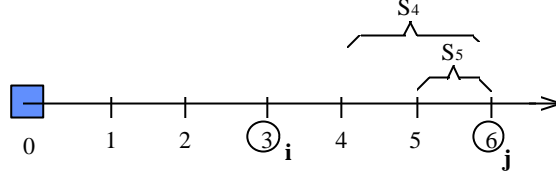


Figura IV.14: Cálculo de \bar{c}_{ij}

Como definido acima, S_k é um conjunto onde $i \in S_k$ e $j \in \bar{S}_k$. Assim, teremos $S_k = \{k, \dots, 6\}$ para $k=4,5$. Calculando \bar{c}_{63} e desenvolvendo (11) para o exemplo da figura IV.13 temos:

$$\bar{c}_{63} = d_6 - d_3 - u_3 - u_6 - (d_4 - d_3 + d_5 - d_4)$$

Fazendo $u_3 = 0$ e $u_6 = d_6 - d_5$ obtemos $\bar{c}_{63} = 0$ após as devidas simplificações. Este caso é facilmente extensível ao caso geral onde temos i e j pertencentes a N .

Generalizando o processo temos $\bar{c}_{ij} = 0, \forall i, j \in N$, segue que o custo associado à K-árvore mínima também será nulo. Voltando à expressão (10) obtemos:

$$\begin{aligned} z_D(u^*, \mathbf{m}^*) &= 2(d_n - d_{n-1}) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (d_k - d_{k-1}) \left\lceil \frac{n+k-1}{b} \right\rceil \\ &= 2(d_n - d_{n-1}) + 2 \left((d_1 - d_0) \left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil + (d_2 - d_1) \left\lceil \frac{n-1}{b} \right\rceil + \dots + (d_{n-1} - d_{n-2}) \left\lceil \frac{n+1-(n-1)}{b} \right\rceil \right) \end{aligned}$$

Efetuada o produto e reagrupando as parcelas obtemos:

$$z_D(u^*, \mathbf{m}^*) = 2 \sum_{k=1}^n \left(\left\lceil \frac{n+1-k}{b} \right\rceil - \left\lceil \frac{n-k}{b} \right\rceil \right) d_k = 2(d_b + d_{2b} + \dots + d_{n-b} + d_n) = z^*$$

O exemplo da figura IV.13, irá sugerir a construção de uma heurística particular na determinação de um conjunto de restrições inicial. Observe no exemplo apresentado, que os subconjuntos S_k eram “aninhados” em torno do cliente mais afastado do depósito. Para reproduzir essa situação, Fisher[94.b] define um conjunto de m clientes semente s_1, s_2, \dots, s_m e constrói um “aninhamento” de clientes em torno de cada uma destas sementes.

Em seu trabalho, Fisher[94.b] utiliza $m=K+3$, de maneira que os clientes semente s_1, s_2, \dots, s_K representem os clientes mais distantes do depósito em cada uma das K rotas geradas por uma solução heurística inicial. Os 3 clientes restantes são escolhidos um a um de tal forma que, a distância entre os outros clientes e o depósito seja a maior possível. Assim, se S_D representa o conjunto de clientes semente escolhidos até o momento, o próximo cliente s_i é selecionado da seguinte forma:

$$\max_{s_i \notin S_D} \left\{ \min \left\{ c_{os_i}, \min_{j \in S_D} c_{js_i} \right\} \right\}$$

Sejam i_1, i_2, \dots, i_{n-1} os índices associados aos clientes (em ordem crescente de proximidade) da semente s_i . Assim, o conjunto de restrições inicial associado a s_i corresponde aos conjuntos:

$$\begin{aligned} &\{s_i, i_1\} \\ &\{s_i, i_2\} \\ &\{s_i, i_1, i_2\} \\ &\{s_i, i_1, i_2, i_3\} \\ &\{s_i, i_1, i_2, i_4\} \\ &\{s_i, i_1, i_2, i_3, i_4\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

No trabalho desenvolvido por Fisher[94.b] o número máximo de conjuntos utilizados para cada semente s_i é igual a 60. Além disso, as restrições associadas às partições acima, são

adicionadas à função lagrangeana a medida que forem sendo violadas pela solução do problema relaxado (K -árvore mínima $c/2K$ arestas incidentes ao depósito).

Isto ocorre após as primeiras 50 iterações do método subgradiente. Como discutido anteriormente, as restrições de eliminação de sub-rotas são eliminadas do conjunto ativo caso se tenha 3 iterações consecutivas do subgradiente com multiplicadores nulos.

Note que Fisher utiliza um procedimento heurístico na identificação de restrições violadas! No capítulo VI, resolvemos de maneira exata o problema da identificação de sub-rotas violadas. Como veremos, assim como em Fisher[94.b], trabalhamos com um “pequeno” número de restrições dualizadas a cada iteração do subgradiente. Em nosso caso entretanto, permitimos que um número bem maior de restrições candidatas à dualização seja utilizado (2^n restrições). Isto irá permitir a geração de limites inferiores melhores que os obtidos por Fisher[94.b] para o problema de roteamento. Resultados computacionais comparando essas duas abordagens serão apresentados no capítulo IX.

IV.5 - Heurísticas Lagrangeanas:

Façamos agora uma breve discussão acerca de algumas das heurísticas lagrangeanas utilizadas por Fisher[94.b].

Nas heurísticas lagrangeanas, soluções viáveis são obtidas a cada iteração do método subgradiente e podem ser implementadas utilizando-se, por exemplo, a solução do problema lagrangeano \bar{x}_{ij} ou os custos reduzidos \bar{c}_{ij} . Fisher[94.b] propõe a utilização de 3 heurísticas lagrangeanas distintas. Testes computacionais entretanto, indicam que não há predominância de nenhuma destas heurísticas em relação as outras.

Ao final de cada heurística faz-se uma busca local na intenção de se obter uma melhor solução viável (menor custo). A busca local pode ser realizada em cada uma das K rotas geradas através de uma das heurísticas lagrangeanas. Ao final da heurística lagrangeana, Fisher utiliza o algoritmo 3-optimal para busca local (vide Lin & Kernigham[73]).

Apresentamos a seguir, uma das heurísticas apresentada em Fisher[94.b]. O procedimento é iniciado selecionando-se o cliente mais próximo ao depósito. As distâncias neste

caso são obtidas computando-se os custos lagrangeanos \bar{c}_{ij} a cada iteração do subgradiente. Em seguida, selecionamos um cliente que esteja mais próximo do último cliente já selecionado. O processo é repetido até que a inclusão de um novo cliente supere a capacidade do veículo ou se o depósito for selecionado como próximo vértice.

Note que para evitar a presença de soluções inviáveis, não permitimos a ligação do último cliente com o depósito se a demanda atendida na rota (sendo construída) for inferior a $\sum_{i \in N} d_i - (K-1)b$ (onde d_i é a demanda do cliente i e b a capacidade de cada veículo). Caso isto ocorra, os $K-1$ veículos restantes não serão suficientes para atender os clientes ainda não percorridos. Repetimos este procedimento gerando outras rotas até que todos os clientes tenham sido pesquisados.

Chamaremos de S , o conjunto de nós abertos ou ainda não percorridos. Um nó será fechado quando for atendido por algum veículo. O conjunto de nós fechados será representado por \bar{S} .

Rescrevendo os passos descritos acima temos o seguinte algoritmo:

PROCEDIMENTO: Heurística Lagrangeana;

Início

- $\text{custototal} = 0$;
- $\text{demrota} := 0$; {demanda parcial da rota pesquisada}
- Inicialmente temos $i \in S, \forall i \in N_0$; { S é o conjunto de nós abertos}
- $\text{base} := 0$;
- **Repita**
 - Seleciona nó i de S mais próximo da base s/ exceder a capac. b e s/ permitir soluções inviáveis;
 - **Se** $i \neq 0$ **então**
 - $\text{demrota} := \text{demrota} + \text{dem}[i]$;
 - Colocamos i em \bar{S} {vértices já percorridos}

```

-  $S := S - \{i\};$                                 {decrementamos abertos}

senão

-  $demrota := 0;$ 

- fim se-senão;

-  $base := i;$ 

-  $custototal := custototal + distância[base, i];$ 

- Até que  $S = \emptyset;$ 

fim.

```

Figura IV.15: Heurística Lagrangeana

Note no algoritmo que definimos 2 conjuntos de nós abertos e fechados (S e \bar{S} respectivamente). Inicialmente todos os nós (clientes) pertencem a S . Sempre que um novo cliente for percorrido, este nó será fechado. Nunca colocamos o depósito em \bar{S} já que devemos percorrê-lo sempre que uma nova rota for fechada.

Note que nem sempre é possível a determinação exata das K rotas (como desejado). Podemos eventualmente obter soluções viáveis com um número maior de veículos. A determinação de uma solução viável para o problema de roteamento de veículos com exatamente K rotas, definidas a priori, é um problema NP-completo. Trata-se na verdade, de uma variação do problema de *bin packing* (Garey & Johnson [79]). Desta forma, a solução produzida pela heurística, em uma dada iteração do subgradiente, deverá ser descartada caso não se tenha exatamente as K rotas desejadas.

Na outra heurística apresentada por Fisher[94.b], ele considera apenas aquelas iterações cuja relaxação lagrangeana correspondente contenha exatamente K componentes conexas após a eliminação das arestas incidentes ao depósito. Se C_1, C_2, \dots, C_K é o conjunto de clientes em cada uma destas componentes, a obtenção de K rotas viáveis parciais, é realizada tomando-se cada k com $d(C_k) > b$. Elimina-se em seguida, os clientes por ordem de proximidade do depósito até que $d(C_k) \leq b$.

Em uma terceira heurística, apresentada por Fisher, tenta-se utilizar o maior número possível de arestas da solução lagrangeana. Seja \bar{x}_{ij} , as arestas presentes na solução lagrangeana em uma dada iteração. Escolhe-se o cliente i_1 mais distante do depósito e seleciona-se a menor aresta (i_1, i_2) tal que $\bar{x}_{i_1 i_2} = 1$ e $d_{i_1} + d_{i_2} \leq b$. Note que em um dado momento do algoritmo teremos uma rota parcial i_1, i_2, \dots, i_k para um veículo e de maneira que $\bar{x}_{i_1 i_2} = \bar{x}_{i_2 i_3} = \dots = \bar{x}_{i_{k-1} i_k} = 1$. Neste momento, escolhe-se a menor aresta ligando algum cliente j ao cliente i_1 ou i_k e tal que $\bar{x}_{i_1 j} = 1$ ou $\bar{x}_{i_k j} = 1$ e $d(\{i_1, i_2, \dots, i_k\}) \leq b$. Quando nenhuma aresta puder ser encontrada e que satisfaça as condições exigidas, selecionamos um cliente ainda não pesquisado e que esteja mais distante do depósito. Repetimos o processo gerando rotas parciais até que K rotas tenham sido obtidas.