

Capítulo V

Roteamento de Veículos e Combinatória Poliédrica

V.1 - Introdução:

A utilização de combinatória poliédrica tem se tornado cada vez mais freqüente na resolução de problemas de otimização combinatória. Alguns dos resultados mais expressivos desta utilização são, sem dúvida, aqueles obtidos para o problema do caixeiro viajante (equivalente ao problema de roteamento de veículos com um único veículo de capacidade infinita). Um maior conhecimento da estrutura poliédrica deste problema tem possibilitado a resolução exata de instâncias com milhares de clientes (vide Padberg e Rinaldi[87], [89], [91]; Jünger et al. [92]).

Atualmente, os códigos exatos mais sofisticados para a resolução do problema do caixeiro viajante incorporam um número grande de famílias de desigualdades válidas fortes para o problema (desigualdades de eliminação de sub-rotas, *2-matchings*, *combs*, *path*, *clique-trees*, entre outras). Isto é feito partindo-se de uma relaxação linear e utilizando-se algoritmos de separação exatos ou aproximados para a obtenção de desigualdades válidas violadas pela

relaxação corrente. Os cortes são inseridos, e o processo é repetido até que não se “consiga” determinar novas restrições violadas.

Apesar dos resultados expressivos obtidos para o problema do caixeiro viajante, ainda pouco se conhece sobre a estrutura poliédrica do problema clássico de roteamento de veículos (PRVRC). Isto se aplica mesmo para o caso particular envolvendo demandas idênticas. Trata-se na verdade, de um problema onde a determinação de uma solução exata parece ser bastante difícil. Pode-se constatar na literatura existente, soluções exatas para problemas contendo cerca de 50 a 60 clientes e algumas instâncias contendo cerca de 100 a 150 clientes (p. ex. Araque[90], Fisher[94.b]). Isto pode parecer pouco quando comparado ao problema do caixeiro viajante! Na verdade, mesmo a determinação da dimensão do poliedro associado ao problema de roteamento é um problema NP-completo (Campos et al.[91], Cornuejols e Harche[93]), fato que não ocorre com o problema do caixeiro viajante.

Faremos primeiramente algumas considerações iniciais sobre a complexidade do problema e a notação utilizada. Em seguida, apresentamos alguns resultados existentes na literatura sobre a estrutura poliédrica do problema de roteamento com demandas distintas e apresentamos algumas desigualdades conhecidas para o problema (restrições de eliminação de sub-rotas, *combs* e *multistars*).

A identificação de restrições violadas a partir da solução do problema dual lagrangeano (K-árvore mínima) será discutida com mais detalhes no capítulo seguinte.

V.2 - Notação e Considerações Iniciais:

Considere que nosso problema de roteamento com K veículos esteja definido em um grafo $G=(N_0, E)$ onde $N_0 = N \cup \{0\}$ é o conjunto de vértices (como descrito no capítulo IV), $|N_0|=n+1$ e E é o conjunto de todas as arestas de G. Note que, se $G=(N_0, E)$ é um grafo qualquer, a determinação de uma solução viável para o problema do K-caixeiro viajante (isto é, um problema de roteamento de veículos sem as restrições de capacidade) já é NP-completo! Na verdade, isto ocorre mesmo para $K=1$, quando temos o problema do ciclo hamiltoniano (vide

Garey e Johnson[79]). Assume-se geralmente na literatura que $G=(N_0, E)$ é um grafo completo (já que custos bastante altos podem ser associados às arestas inexistentes).

No problema de roteamento, temos que o somatório da demanda dos clientes em cada uma das K rotas não deve ultrapassar a capacidade de cada veículo. Note que, responder se existe ou não uma partição dos n clientes tal que a demanda em cada rota seja atendida é o mesmo que resolver o problema *bin-packing* (decisão), reconhecidamente NP-completo (Garey e Johnson [79]). Assim, a determinação de K rotas viáveis para o problema de roteamento define um problema NP-completo mesmo se $G=(N_0, E)$ é um grafo completo!

Dado um grafo não direcionado $G=(N_0, E)$ e $W \subseteq N_0$, denotamos $E(W)$ o conjunto de todas as arestas com ambos os extremos em W , e por $\delta(W)$, o conjunto de todas as arestas com apenas uma extremidade em W . Dizemos que $G(W)=(W, E(W))$ é o grafo induzido por W (conjunto de vértices). De maneira análoga, se F é um conjunto de arestas de E , $G(F)=(V(F), F)$ é um subgrafo induzido por F (conjunto de arestas) onde $V(F)$ é um conjunto de vértices incidentes em pelo menos uma das arestas de F .

Dizemos que um subconjunto F de arestas em nosso problema de roteamento define uma *rota*, se o subgrafo induzido $G(F)$ é um ciclo elementar contendo o depósito 0 (cada vértice de $G(F)$ tem grau 2). Uma k -rota, é definida como um subconjunto R de arestas (rotas) de E de forma que R_1, \dots, R_k determine uma partição de R e cada um dos clientes de N apareça em apenas um dos subconjuntos $V(R_i)$, para $i=1, \dots, k$. Note, em nosso caso, que estamos interessados na determinação de uma k -rota de comprimento mínimo.

Para simplificar a notação (quando necessário), faremos a associação de uma variável x_e a cada uma das arestas de E . Estas variáveis representam o número de vezes que utilizamos uma aresta em uma k -rota (solução viável). Note que se permitimos a existência de rotas simples (com apenas um cliente), uma mesma aresta será utilizada 2 vezes. De maneira análoga, c_e representa o custo associado a cada uma das arestas e de E .

Para cada subconjunto U de arestas, definimos $x(U)$ como a soma de todas as variáveis x_e associadas às arestas pertencentes a U .

Feita as devidas considerações, e assumindo a existência de rotas simples, podemos rescrever a seguinte formulação para o problema de roteamento de veículos (PRVRC). Todos os K veículos tem capacidade b e $d(S)$ representa a demanda total de todos os clientes na partição S (como definido no capítulo anterior).

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\mathbf{d}(\{0\})) = 2K \end{array} \right. \quad (2)$$

$$x(\mathbf{d}(\{i\})) = 2; \quad \forall i \in N \quad (3)$$

$$s. a. \left\{ \begin{array}{l} x(\mathbf{d}(\{S\})) \geq 2 \left\lceil \frac{d(S)}{b} \right\rceil; \quad \forall S \subseteq N \text{ e } S \neq \emptyset \end{array} \right. \quad (4)$$

$$0 \leq x_e \leq 1; \quad \forall e \in E(N) \quad (5)$$

$$0 \leq x_e \leq 2; \quad \forall e \in \mathbf{d}(\{0\}) \quad (6)$$

$$x_e \in \mathbb{Z}; \quad (7)$$

Seja P_{PRV} o conjunto viável definido pelas restrições (2)-(7) acima. Representamos por $\text{conv}(P_{PRV})$, a envoltória convexa dos pontos de P_{PRV} . Assim,

$$\text{conv}(P_{PRV}) = \text{conv} \left\{ x \in \Re^m / x \text{ satisfaz } (2) - (7) \right\}$$

onde $m = n(n+1)/2$ representa o número de variáveis presentes na formulação.

Esta formulação foi utilizada por Laporte et al.[85],[87]; Cornuejols e Harche[93]; Harche e Rinaldi[91]; Augerat [95].

Como discutido no capítulo anterior, as restrições de capacidade (4), também chamadas de restrições de sub-rotas generalizadas não definem facetas em geral. Campos et al. [91], fazem uma análise da estrutura poliédrica do problema de roteamento supondo que todos os clientes tenham mesma demanda. Neste trabalho, é demonstrado que as restrições de eliminação de sub-rotas definem facetas para $\text{conv}(P_{PRV})$ desde que algumas condições sobre as partições S e a capacidade de cada veículo sejam atendidas.

Veremos na seção seguinte duas versões mais fortes das restrições de eliminação de sub-rotas apresentadas em Cornuejos e Harche[93]:

V.3 - Restrições de Eliminação de Sub-rotas:

Seja $S \subseteq N$ um subconjunto de clientes. Como discutido no capítulo anterior, definimos $r(S) = \lceil d(S) / b \rceil$, como sendo um limite inferior para o número mínimo de veículos que atendem os clientes de S . Considere agora, $r'(S)$, o menor número de veículos necessários para atender a demanda de todos esses clientes. Em outras palavras, $r'(S)$ é a solução de um problema *bin packing* com itens de capacidade b .

Note que as restrições de capacidade (4), podem ser substituídas pelas restrições:

$$x(d(S)) \geq 2r'(S); \quad \forall S \subseteq N \text{ e } S \neq \emptyset \quad (8)$$

Apesar de mais forte (já que $r'(S) \geq \lceil d(S) / b \rceil$), a utilização de $r'(S)$ não é interessante do ponto de vista prático. Como discutido em Augerat[95], quando o número de clientes de S é pequeno, $r'(S)$ pode ser calculado de maneira exata (Martello e Toth[90a]). Para conjuntos maiores um limite inferior não trivial (substituindo $r'(S)$), pode ser calculado em tempo razoável (Martello e Toth[90b]).

Se o cálculo de $r'(S)$ ou de outro limite inferior exigir um alto custo será mais conveniente a utilização de $r(S) = \lceil d(S) / b \rceil$.

Note que o conjunto de restrições (4) e (8) definem, de certo modo, “restrições locais” para o PRV. Elas não levam em consideração a demanda dos clientes que não estão na partição S . Assim, se nos preocupamos apenas em atender os clientes de S com um número mínimo de veículos, poderemos gerar soluções inviáveis para o problema de roteamento de veículos.

Chamaremos $\mathbf{p} = (P_1, \dots, P_K)$ uma *partição* dos vértices de N (conjunto de clientes) se cada um dos subconjuntos satisfizerem $d(P_j) \leq b$; para $1 \leq j \leq K$.

Seja Π o conjunto de todas as K partições (como definidas acima). Para cada partição $\mathbf{p} \in \Pi$ e $S \subseteq N$, seja $\mathbf{b}_{\mathbf{p}}(S)$ o número de subconjuntos desta partição contendo pelo menos um vértice de S . Ou seja:

$$\mathbf{b}_{\mathbf{p}}(S) = \left| \{j \in \{1, \dots, K\} / P_j \cap S \neq \emptyset\} \right|; \quad \forall S \subseteq N \text{ e } \mathbf{p} = (P_1, \dots, P_k) \in \Pi.$$

Fazendo $R(S) = \min_{\mathbf{p} \in \Pi} (\mathbf{b}_{\mathbf{p}}(S))$, obtemos o seguinte conjunto de restrições de capacidade:

$$x(\mathbf{d}(S)) \geq 2R(S), \quad \forall S \subseteq N \text{ e } S \neq \emptyset \quad (9)$$

É fácil ver que: $\lceil d(S) / b \rceil \leq r'(S) \leq R(S), \quad \forall S \subseteq N. \quad (10)$

Uma partição $\mathbf{p} \in \Pi$, será *ideal*, relativa a um conjunto $S \subseteq N$ se $R(S) = \mathbf{b}_{\mathbf{p}}(S)$.

O exemplo da figura V.1 (apresentado em Cornuejols e Harche[93]), mostra uma situação onde temos 4 veículos de capacidade $b=7$. As demandas de cada cliente estão representadas ao lado de cada nó.

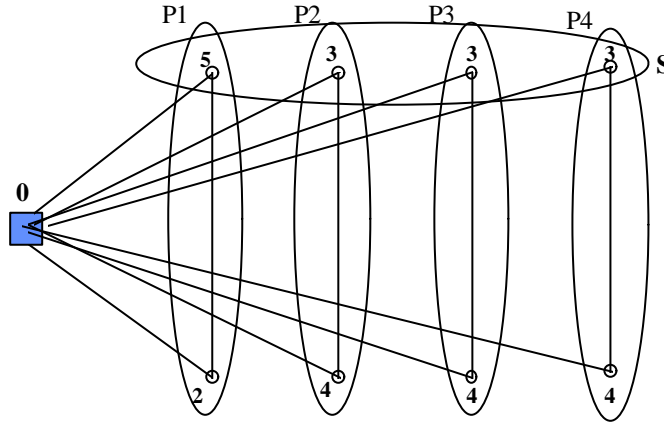


Figura V.1 : $\lceil d(S) / b \rceil < r'(S) < R(S), \quad \forall S \subseteq N.$

Observe no exemplo que $\lceil d(S) / b \rceil < r'(S) < R(S)$, para a partição S considerada (temos respectivamente $2 < 3 < 4$).

As restrições (9), podem ser consideradas “globais”, já que levam em consideração todas as partições viáveis do conjunto de clientes. Entretanto, como ocorre com $r'(S)$, a determinação de $R(S)$ é bastante difícil (problema NP-completo).

O seguinte teorema (demonstrado em Cornuejols e Harche[93]), apresenta algumas condições necessárias para que o conjunto de restrições (9) definam facetas para o problema de roteamento de veículos (PRVRC).

Teorema V.1: Considere $S \subseteq N$, onde $2 \leq |S| \leq |N| - 1$ tal que, para cada tripla de clientes i, j e $l \in N$, exista uma K -partição ideal $\mathbf{p} = (P_1, \dots, P_K)$ relativa a S (sendo i, j e $l \in P_1$). Então $x(\mathbf{d}(S)) \geq 2R(S)$ define uma faceta para o problema de roteamento. •

Como discutido em Cornuejols e Harche[93], condições necessárias e suficientes para que as restrições (9) definam facetas, ainda não são conhecidas.

Dizer se nosso problema de roteamento admite ou não uma solução viável é um problema NP-completo, mesmo se trabalhamos em um grafo completo. Segue-se que a determinação da dimensão de nosso poliedro $\text{conv}(P_{PRV})$ também é NP-completo! Outra dificuldade surge em decorrência das igualdades (2) e (3) introduzidas na formulação do problema. A determinação de facetas do politopo associado se torna mais difícil já que não temos uma envoltória convexa $\text{conv}(P_{PRV})$ de dimensão plena.

Cornuejols e Harche[93], tratam de situações como esta fazendo uma inclusão de nosso poliedro em outro poliedro de dimensão plena que o contenha como uma face. Este outro poliedro é associado ao problema gráfico de roteamento de veículos (para maiores detalhes vide Cornuejols e Harche[93]). Esta abordagem foi utilizada com sucesso para o problema do caixeiro viajante. Cornuejols, Fonlupt e Naddef[85], definiram inicialmente a relaxação gráfica do problema do caixeiro viajante (*graphical tsp*), e descobriram novas famílias de desigualdades válidas para o problema do caixeiro viajante (como por exemplo as desigualdades *path*, *path-tree*).

V.5 - Desigualdades *Comb* (Pente):

As desigualdades *comb* foram introduzidas por Chvátal[73] para o problema do caixeiro viajante, sendo generalizadas posteriormente por Grötschel e Padberg[79]. Laporte e Nobert[84.a], foram os primeiros a adotar as desigualdades *comb* para uma formulação do problema de roteamento de veículos. Estas desigualdades, consideram a demanda associada a cada um dos clientes, embora excluam o vértice 0 (depósito) da expressão que as define. Ao contrário, Cornuejols e Harche[93], apesar de não trabalharem com as demandas associadas aos clientes, utilizam variantes daquelas propostas por Laporte e Nobert[84.a] permitindo a inclusão do depósito.

Vejamos primeiramente a formulação apresentada por Cornuejols e Harche[93]:

Considere $K \geq 2$ o número de veículos utilizados. Seja $G = (N_0, E)$ um grafo completo e H, T_1, T_2, \dots, T_s , subconjuntos de N_0 satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $|T_i \setminus H| \geq 1$, para $i = 1, \dots, s$;
- (ii) $|T_i \cap H| \geq 1$, para $i = 1, \dots, s$;
- (iii) $|T_i \cap T_j| = 0$, para $1 \leq i < j \leq s$;
- (iv) s é ímpar e $s \geq 3$.

Segue então que:

$$x(E(H)) + \sum_{i=1}^s x(E(T_i)) \leq |H| + \sum_{i=1}^s |T_i| - \frac{3s+1}{2} + \mathbf{a}(K-1) \quad (11)$$

onde:

$$\mathbf{a} = \begin{cases} 0; & \text{se } 0 \notin H \cup \left(\bigcup_{i=1}^s T_i \right) \\ 1; & \text{se } 0 \in H \setminus \left(\bigcup_{i=1}^s T_i \right) \\ 2; & \text{se } 0 \in H \cap T_j; \text{ para algum } j = 1, \dots, s \end{cases}$$

define uma desigualdade válida para o problema de roteamento de veículos (PRVRC). O conjunto H será chamado *handle* e T_1, \dots, T_s os dentes de H . Cornuejols e Harche[93], definem

ainda outras expressões para as desigualdades *comb*, envolvendo, por exemplo, a interseção de vários dentes.

Na figura V.2, exibimos um suporte (conjunto $H \cup T_1 \cup \dots \cup T_s$) a partir de uma relaxação linear para o problema de roteamento. Note neste caso, que podemos ter obviamente a presença de variáveis fracionárias:

Observe na expressão (11) que, se o depósito não pertence ao suporte $H \cup T_1 \cup \dots \cup T_s$ teremos $\mathbf{a} = 0$, assim $\frac{3}{2} + 3 > 3 + 6 - 5 \Rightarrow \frac{9}{2} > 4$ (restrição violada).

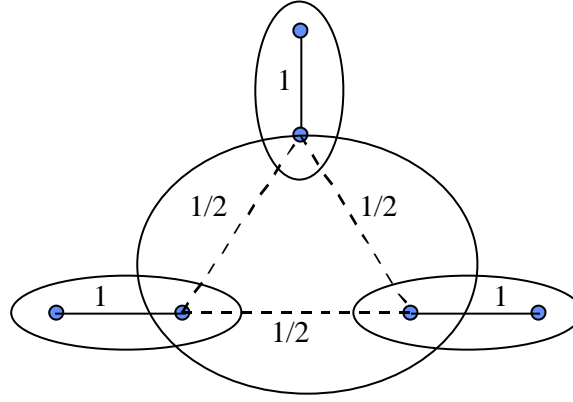


Figura V.2: Suporte clássico de uma *comb* c/ 3 dentes (relax. linear)

Laporte e Nobert[84.a] e Araque[90] apresentaram formulações para as desigualdades *comb* envolvendo a demanda de cada cliente. Na formulação apresentada por Laporte e Nobert[84.a], o depósito não pertence ao suporte da *comb*. Como discutido em Augerat[95], a descrição proposta por Laporte e Nobert[84.a] pode ser escrita equivalentemente da seguinte forma:

$$x(\mathbf{d}(H)) \geq (s+1) - \sum_{j=1}^s [x(\mathbf{d}(T_j)) - 2r(T_j)] \quad (12)$$

onde todos os dentes T_j (para $j=1, \dots, s$) devem satisfazer a $r(T_j / H) + r(T_j \cap H) > r(T_j)$.

Estudamos a identificação de *combs* violadas com mais detalhes no capítulo seguinte. Como veremos posteriormente, trabalharemos com a formulação utilizada por Cornuejols e Harche[93]. A idéia é utilizar uma expressão que permita uma “fácil” identificação das

desigualdades *comb* a partir da solução do problema lagrangeano. Obviamente, a expressão (12) pode também ser utilizada.

Em nosso caso, ao contrário da relaxação linear, a determinação de *combs* violadas será mais simples já que trabalhamos apenas com soluções de coordenadas inteiras (K-árvores mínimas).

V.6 - Desigualdades *Multistars* (Estrelas):

Em Araque et al.[90], são apresentadas diversas restrições válidas para o problema de roteamento (PRVRC) quando todos os clientes possuem demanda unitária. Estas restrições entretanto, continuam válidas na maioria dos casos, mesmo quando os clientes possuem demandas distintas (Augerat[95]). O mesmo ocorre para as restrições *multistars*, apresentadas a seguir:

Seja v um vértice de N , e $\Omega = \{S_i / i = 1, \dots, s\}$ um conjunto de sub-conjuntos de N satisfazendo a seguinte condição:

- i) $S_i \cap S_j = \{v\}$, $\forall i, j \in \{1, \dots, s\} \text{ e } i \neq j$
- ii) $d(S_i) \leq b$; $\forall i \in \{1, \dots, s\}$
- iii) $d(S_i \cup S_j) > b$; $\forall i, j \in \{1, \dots, s\} \text{ e } i \neq j$

Se as condições acima forem satisfeitas então:

$$\sum_{i=1}^s x(d(S_i)) \geq 4s - 2 \quad (13)$$

será válida para o problema de roteamento (PRVRC).

Para ilustrar essa classe de restrições vejamos o exemplo da figura V.3, onde temos uma solução viável para o problema de roteamento com 2 veículos de capacidade 11. Os valores associados a cada nó representam as demandas de cada cliente.

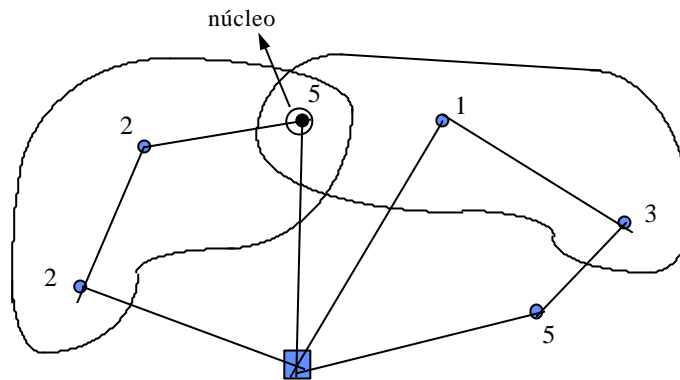


Figura V.3: Desigualdade válida para o PRVRC

É fácil ver que as condições (i), (ii), (iii) e a restrição (12) se verificam, ou seja: $6 \geq 8 - 2$.

Como veremos adiante (capítulo VI), estaremos interessados em situações onde *multistars* violadas sejam obtidas através de uma relaxação lagrangeana. Em nosso caso, K -árvore mínima com $2K$ arestas incidentes ao depósito (solução inteira). Araque et al.[94] e Augerat[95] trabalham na identificação de *multistars* violadas a partir de uma relaxação linear para o problema de roteamento de veículos.

Outros tipos de *multistars* são apresentadas em Araque et al.[90] e [94], Gouveia[95] e Letchford e Eglese[96].