

Capítulo II

Teoria Poliédrica

II.1 - Introdução:

Pode-se dizer que os primeiros resultados sobre a teoria de poliedros convexos tiveram início com os tratados de Euclides na época dos gregos . Euclides estudava por exemplo, a fórmula de alguns poliedros em 2 e 3 dimensões. A primeira contribuição considerável após este período é devida provavelmente a Euler, quando estabeleceu a relação entre o número de vértices, faces e arestas de politopos em 3 dimensões (Grünbaum[67]). Alguns destes resultados entretanto, já eram conhecidos 100 anos antes por Descartes . Outras contribuições se seguiram, Schläfli[1901], Minkowski[1911] entre outras, até que em 1934 Steinitz e Rademacher (nova edição em 1976), publicaram o primeiro trabalho “estado-da-arte” sobre o assunto.

Como discutido em Pulleyblank[83], a análise de problemas combinatórios utilizando-se conceitos e resultados da teoria poliédrica pode ser dividida basicamente em 3 períodos, todos eles demarcados pelos grandes avanços na área de teoria e construção de algoritmos.

O primeiro período teve início na década de 50 com o surgimento do método simplex para programação linear (desenvolvido e aprimorado principalmente pelos trabalhos de Dantzig, Hoffman, Kantorovich, Koopmans entre outros). Apesar de tratar-se de um problema contínuo,

muitos problemas combinatórios (em particular, vários problemas de fluxo em redes) possuem uma matriz de restrições totalmente unimodular. Isto permite que diversos problemas “inteiros” possam ser resolvidos de maneira exata utilizando-se apenas o algoritmo simplex.

O segundo período teve início em meados da década de 60 quando Jack Edmonds mostrou que era possível tratar de problemas inteiros um pouco mais gerais. Através da adição, possivelmente exponencial de restrições ao problema original, ele obtinha uma descrição linear completa do problema, de maneira que o problema dual associado fosse resolvido mesmo quando o algoritmo simplex não pudesse ser aplicado diretamente ao problema. Desta forma, algoritmos de complexidade polinomial podiam ser obtidos utilizando-se alguns dos resultados da teoria de dualidade em programação linear. Esta abordagem se mostrou ineficaz para uma grande quantidade de problemas combinatórios (hoje conhecidos como NP-Árduos). Para estes problemas, uma descrição linear completa não pode ser obtida (a menos que $P=NP$). Apesar disso, a utilização da teoria de dualidade juntamente com métodos de enumeração tem demonstrado resultados bastante interessantes.

O terceiro período teve início em 1979 com o desenvolvimento do método dos elipsóides em programação linear (Shor[77] e Kachian [79]). Apesar de tratar-se do primeiro algoritmo polinomial para programação linear, o algoritmo de Kachian não tinha o mesmo desempenho computacional quando comparado ao método simplex (de complexidade exponencial). Além do excelente resultado teórico para programação linear, a estrutura do método dos elipsóides traria também importantes consequências para a combinatória poliédrica. Este algoritmo permite responder eficientemente se um dado ponto, pertence ou não a um conjunto definido por um sistema linear (poliedro). Caso o ponto dado não pertença, o algoritmo permite a determinação de uma desigualdade violada (problema de separação). Sempre que o problema de separação for resolvido de maneira eficiente (em tempo polinomial), o problema de otimização também o será. Da mesma forma, pode-se demonstrar que a recíproca também é verdadeira. Assim, para poliedros associados a problemas de otimização NP-Árduos, não podemos esperar que algoritmos polinomiais sejam encontrados para o problema de separação correspondente (a menos obviamente que $P=NP$). Maiores detalhes sobre este assunto podem ser encontrados em Grötschel, Lovász e Schrijver [88].

Apresentamos agora uma breve descrição de alguns resultados da teoria poliédrica e álgebra linear necessários ao estudo da combinatória poliédrica (em particular ao estudo do Caixeiro Viajante e Roteamento de Veículos).

II.2 - Definições Básicas:

Dizemos que um conjunto $P \subseteq \mathfrak{R}^n$ define um *poliedro* se $P = \{x \in \mathfrak{R}^n / Ax \leq b\}$, onde $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathfrak{R}^m$ (escrevemos também $P=(A,b)$). Note que o poliedro é obtido através da interseção finita de semi-espacos de \mathfrak{R}^n . Diremos que o poliedro P é *limitado* se pudermos inscrevê-lo totalmente em uma bola de raio r . Caso nosso poliedro P seja limitado, teremos então um *politopo*.

Sejam $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{R}^n$ e $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_n \in \mathfrak{R}$. Dizemos que o vetor $x = \mathbf{I}_1 x_1 + \dots + \mathbf{I}_n x_n$ é uma *combinação linear* dos vetores x_1, \dots, x_n . Se, além disso tivermos $\mathbf{I}_1 + \dots + \mathbf{I}_n = 1$, dizemos que \mathbf{x} é uma *combinação linear afim* de x_1, \dots, x_n . Se \mathbf{x} é combinação linear afim e $\mathbf{I}_i \geq 0 \quad p / i = 1, \dots, n$; teremos uma *combinação linear convexa* dos vetores x_1, \dots, x_n .

A *envoltória convexa* de um conjunto discreto $X = \{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \mathfrak{R}^n$ é definida como:

$$\text{conv}(X) = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n / x = \sum_{i=1}^k \mathbf{I}_i x_i; \sum_{i=1}^k \mathbf{I}_i = 1 \text{ e } \mathbf{I}_i \geq 0 \quad p / i = 1, \dots, k \right\}$$

Como veremos posteriormente, nos problemas combinatórios, estaremos sempre interessados na envoltória convexa de um conjunto de vetores de \mathfrak{R}^n com coordenadas inteiras.

Considere agora o seguinte conjunto de índices $M = \{1, 2, \dots, m\}$ representando cada uma das linha de $P=(A,b)$. Considere também $M^= = \{i \in M / a_i x = b_i, \forall x \in P\}$ e $M^{\leq} = \{i \in M / a_i x < b_i, \text{ para algum } x \in P\}$ dois subconjuntos de índices. Temos então um conjunto de igualdades $(A^=, b^=)$ e um conjunto de desigualdades (A^{\leq}, b^{\leq}) onde:]

$$P = \{x \in \Re^n / A^= x = b^=, A^{\leq} x \leq b^{\leq}\}$$

Note que P continua definindo um poliedro já que cada igualdade pode ser desmembrada em duas desigualdades.

A *dimensão* de um poliedro P é igual a dimensão do menor espaço afim que o contém. Assim, temos $\dim(P) = \dim(\text{aff}(P))$, onde $\text{aff}(P) = \{x \in \Re^n / A^= x = b^=\}$. Segue então que $\dim(P) = n - \text{posto}(A^=, b^=)$. Caso $\text{posto}(A^=, b^=) = 0$, dizemos que $P \subseteq \Re^n$ tem *dimensão plena*.

Na figura seguinte representamos 2 poliedros de \Re^3 (de dimensão 2 e 3 respectivamente):

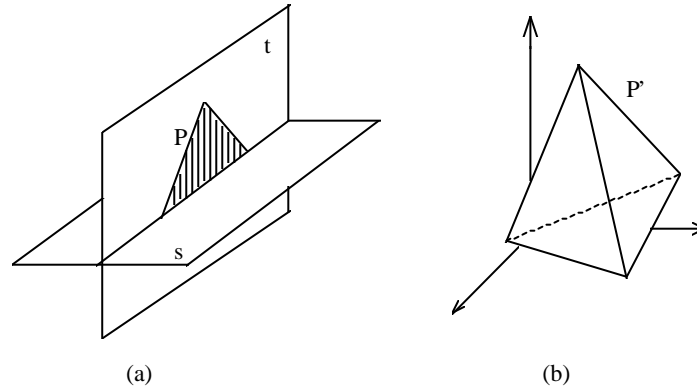


Figura II.1: Políedros de dimensão 2 e 3

Note que o poliedro P é formado por uma restrição de igualdade e 3 desigualdades, enquanto P' é formado por 4 desigualdades (dimensão plena).

Uma desigualdade $a^T x \leq b$ é *válida* com respeito a um conjunto $P \subseteq \Re^n$, se $P \subseteq \{x \in \Re^n / a^T x \leq b\}$, ou seja, P está contido no subespaço definido por $a^T x \leq b$. Além disso, esta desigualdade válida será *suporte* para P , se $P \cap \{x \in \Re^n / a^T x = b\} \neq \emptyset$.

Uma desigualdade válida $a^T x \leq b$ (com respeito a P) será *própria*, se P não estiver contida no hiperplano $\{x \in \mathbb{R}^n / a^T x = b\}$. Na figura II.1(a) acima, a desigualdade associada ao plano s é própria já que P não está contido em s.

Um subconjunto $F \neq \emptyset$ de um poliedro P é uma *face* de P se existir uma desigualdade $a^T x \leq a_0$ válida com respeito a P tal que $F = \{x \in P / a^T x = a_0\}$. Dizemos que a desigualdade $a^T x \leq a_0$ define uma face de P. Como $P = \{x \in P / 0^T x = 0\}$, o poliedro P é uma face de si próprio. Além disso, como $\{x \in P / 0^T x = 1\} = \emptyset$ o conjunto vazio também define uma face de P.

Uma face F será *própria* se $\emptyset \neq F \neq P$. Assim, se $P = \{x \in \mathbb{R}^n / a_i^T x \leq b_i, i = 1, \dots, k\}$ é um poliedro e F uma face de P, então existirá um subconjunto não vazio de índices $I \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $F = \{x \in P / a_i^T x = b_i, i \in I\}$.

Sejam $a^T x \leq a_0$ e $b^T x \leq b_0$ duas desigualdades válidas de um poliedro P. Se $\{x \in P / a^T x = a_0\} = \{x \in P / b^T x = b_0\}$, dizemos que $a^T x \leq a_0$ e $b^T x \leq b_0$ são *equivalentes* com respeito a P. Na figura II.2, representamos um exemplo em \mathbb{R}^3 que ilustra a equivalência de duas desigualdades válidas definidas pelos planos r e s.

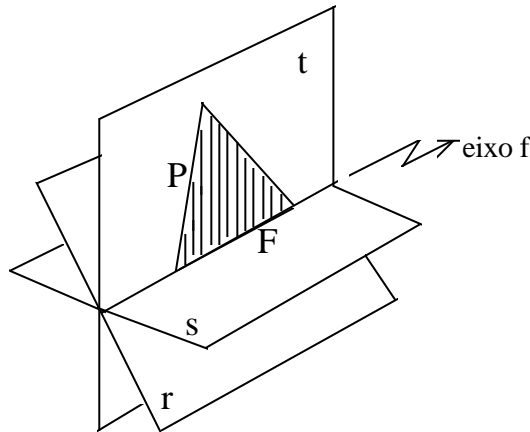


Figura II.2: Os planos r e s definem a mesma face F de P.

Note que r e s se interceptam no eixo f. Ambos definem a mesma face F de P (F é própria já que $F \neq P$).

II.3 - Caracterização de Facetas:

Dizemos que uma face própria F de P , define uma *faceta*, se F for maximal com respeito à inclusão de conjuntos. Neste caso, nenhuma outra face própria de P poderá conter F .

Usualmente, nos problemas de otimização combinatória, o poliedro associado é dado como a envoltória convexa de um número finito de pontos. Para se aplicar técnicas de programação matemática que resolvam estes problemas, é necessário descrever esta envoltória convexa como um sistema de desigualdades lineares. O maior problema neste caso, é definir este sistema com o menor número de desigualdades possível. Portanto, a utilização de desigualdades que definam facetas se torna de suma importância no estudo dos problemas combinatórios.

O teorema seguinte estabelece que condições devem ser obedecidas para que uma desigualdade defina uma faceta:

Teorema II.1: (Facetas de um poliedro)

Seja $P = \{x \in \mathbb{R}^n / A^-x = b^-, A^< x \leq b^<\} \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro qualquer onde $A^- \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b^- \in \mathbb{R}^m$. Considere ainda $\text{aff}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n / A^-x = b^-\}$, o espaço afim que contém P . Uma face F de P será uma *faceta* se:

- i) F for uma face maximal própria de P ;
- ii) $\dim(F) = \dim(P) - 1$;
- iii) existir uma desigualdade $c^T x \leq c_0$, válida com respeito a P com as seguintes propriedades:

a) $F \subseteq \{x \in P / c^T x = c_0\}$;

b) $\exists \bar{x} \in P$ tal que $c^T \bar{x} < c_0$, ou seja, a desigualdade é própria;

c) se qualquer desigualdade $d^T x \leq d_0$, válida com respeito a P satisfizer

$$F \subseteq \{x \in P / d^T x = d_0\}, \text{ então existirá um escalar } \alpha \geq 0 \text{ e um vetor } \mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$$

tal que:

$$d^T = \mathbf{a}^T + \mathbf{I}^T A^-$$

$$d_0 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{I}^T b^-$$

Na figura II.3, a seguir representamos um exemplo que ilustra a condição (iii) do teorema anterior:

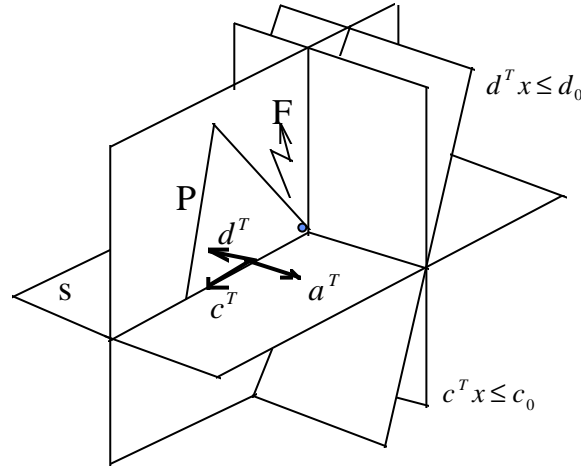


Figura II.3: Verificação da condição (iii).

Suponha que a matriz $A^- x = b^-$, seja representada por uma equação do tipo $a^T x = a_0$ (como na figura acima). Note que o vértice F representado acima não define uma faceta de P já que o vetor d^T (ortogonal a $d^T x \leq d_0$) não pode ser escrito como combinação linear dos vetores a^T e c^T , ortogonais a $a^T x = a_0$ e $c^T x = c_0$ respectivamente!

O mesmo não ocorre se tomamos a face F representada na figura II.2. Note que qualquer que seja a desigualdade válida $d^T x \leq d_0$ que contenha F , a condição (iii) se verifica. Observe também que $c^T x \leq c_0$ e $d^T x \leq d_0$ são desigualdades equivalentes!

A caracterização de facetas é de suma importância na determinação de um conjunto mínimo de desigualdades que descrevam um poliedro $P \subseteq \Re^n$. Um sistema de igualdades $A^- x = b^-$ e $A^\leq x \leq b^\leq$ é dito *completo* com respeito a um poliedro $P \subseteq \Re^n$, se $P = \{x \in \Re^n / A^- x = b^-, A^\leq x \leq b^\leq\}$.

O teorema seguinte apresenta importantes resultados para a caracterização mínima de desigualdades que representam P:

Teorema II.2: (Caracterização de poliedros completos e não redundantes)

Seja $P \subseteq \Re^n$ um poliedro e $A^=x=b^=$ e $A^{\leq}x \leq b^{\leq}$ um sistema completo e não redundante para P, onde $A^= \in \Re^{m \times n}$ e $A^{\leq} \in \Re^{k \times n}$. Então temos as seguintes propriedades:

- i) $\text{aff}(P) = \{x \in \Re^n / A^=x = b^=\}$ e $\text{posto}(A^=) = m$;
- ii) $\dim(\text{aff}(P)) = \dim(P) = n - m$;
- iii) Toda desigualdade $a_i^T x \leq a_0$ do sistema $A^{\leq}x \leq b^{\leq}$ define uma faceta F_i de P, onde

$$F_i = \{x \in P / a_i^T x = b_i\}, \text{ para } i = 1, \dots, k;$$
- iv) Se $\bar{a}_i^T x \leq \bar{b}_i, i = 1, \dots, \bar{k}$ (associado a $\tilde{A}^{\leq}x \leq \tilde{b}^{\leq}$) e $\tilde{a}_i^T x = \tilde{b}_i, i = 1, \dots, \bar{m}$ (associado a $\tilde{A}^=x = \tilde{b}^=$) for outra representação completa e não redundante para P então:
 - d1) $k = \bar{k}$ e $m = \bar{m}$;
 - d2) $\tilde{a}_i^T = (\mathbf{I}^i)^T A^=$ para algum $\mathbf{I}^i \in \Re^m - \{0\}$ onde $i=1, \dots, m$;
 - d3) $\bar{a}_i^T = \mathbf{a}_i a_j^T + (\mathbf{I}^i)^T A^=$ para algum $\mathbf{a}_i > 0, \mathbf{I}^i \in \Re^m, j \in \{1, \dots, k\}$ e $i=1, \dots, \bar{k}$ •

Note em particular que, para um poliedro $P=(A,b)$ de dimensão plena, temos um *único* sistema de desigualdades completo e não redundante que o descreve. Assim, se A^{\leq} é formado por desigualdades $\bar{a}_i^T x \leq \bar{b}_i, \text{ para } i = 1, \dots, \bar{k}$, deverá satisfazer $k = \bar{k}$ e $\bar{a}_i = \mathbf{a}_i a_i$ para algum $\mathbf{a}_i > 0$.

A mesma representação única não ocorre se tivermos um sistema de igualdades e desigualdades na representação de P (P não é de dimensão plena).

Alguns problemas combinatórios permitem que seu poliedro associado $P \subseteq \Re^n$ (de dimensão menor que n), seja expandido para um poliedro \bar{P} de dimensão plena. Neste caso,

será fundamental uma conversão dos resultados obtidos em \bar{P} para P . Note por exemplo, que o problema da equivalência de desigualdades é facilmente resolvido em um poliedro de dimensão plena!

II.4 - Considerações adicionais:

Em algumas situações, estaremos interessados na obtenção de desigualdades válidas mais fortes, ou até mesmo facetas, a partir das faces ou restrições válidas de um poliedro P .

Considere $\mathbf{p}x \leq \mathbf{p}_0$ e $\mathbf{b}x \leq \mathbf{b}_0$ (onde $x \in \mathfrak{R}_+^n$), restrições válidas para um poliedro P . Diremos que $\mathbf{b}x \leq \mathbf{b}_0$ é um *lifting* (melhoramento) da desigualdade $\mathbf{p}x \leq \mathbf{p}_0$ se existir um $\alpha > 0$ tal que $\mathbf{b} \geq \alpha \mathbf{p}$ e $\mathbf{b}_0 \leq \alpha \mathbf{p}_0$.

Note que se uma desigualdade define uma faceta para P então ela não poderá sofrer o processo de *lifting*.

Seja $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ um conjunto de n elementos, e U um subconjunto de S . Dizemos que x^U é o *vetor de incidência* associado a U , se x^U pertencente a \mathfrak{R}^n for tal que, a i -ésima componente de x^U é igual a 1 se $e_i \in U$, e 0 em caso contrário.

Representarmos por 2^S o conjunto de todos os subconjuntos de S . Se Γ é um conjunto de subconjuntos de S , diremos que P_Γ é a envoltória convexa de todos os vetores de incidência de elementos de Γ , ou seja:

$$P_\Gamma = \text{conv}\{x^U \in \mathfrak{R}^n / U \in \Gamma\}$$

É fácil ver que cada vértice de P_Γ corresponde a um conjunto em Γ e vice-versa.

Considere pesos ou distâncias $c_e \in \mathfrak{R}$, associadas a cada um dos elementos de S . Teremos então o seguinte problema de otimização:

$$\min\{c^T x / x \in P_\Gamma\} \quad (1)$$

Note que, cada um dos vértices do P_Γ tem coordenadas inteiras (vetores de incidência de elementos de Γ). Para resolução de (1) utilizando técnicas de programação linear, necessitamos de uma descrição completa e não redundante das restrições que definem o politopo P_Γ . Acredita-se entretanto, que para problemas NP-completos essa descrição completa não seja possível (a menos que $P=NP$). Apesar disso, uma descrição poliédrica parcial de P_Γ pode ser interessante se combinarmos técnicas de programação linear com os métodos de busca em árvore (vide Nemhauser&Wolsey[88]).