

Capítulo VII

Fixação de Variáveis

VII.1 - Introdução:

Neste capítulo, estudaremos a utilização de critérios que permitam fixar variáveis x_{ij} em *zero* ou *um*, conforme a aresta (i,j) apareça ou não na solução ótima do problema original. Como veremos, este procedimento poderá ser realizado interiormente ao método subgradiente.

Todas as variáveis presentes na solução ótima e fixadas em *um* (em uma iteração qualquer do subgradiente), devem aparecer em cada uma das K -árvores mínimas e soluções heurísticas geradas posteriormente. Da mesma forma, as variáveis fixadas em *zero*, devem ser descartadas definitivamente e não figurar mais nas soluções parciais posteriores do subgradiente. Como veremos, a fixação de variáveis poderá permitir uma diminuição no tempo de processamento bem como uma melhoria na qualidade dos limites inferiores e superiores gerados.

Apresentamos primeiramente algumas considerações e definições iniciais e, em seguida, veremos como fixar variáveis (arestas) em *zero* e *um* respectivamente. Na última seção discutimos como “manipular” a estrutura de dados para a armazenagem das variáveis já fixadas.

VII.2 - Considerações Iniciais

Vejamos que condições devem ser observadas para que uma variável seja fixada em *zero* e *um* respectivamente. Apresentamos inicialmente a notação utilizada:

Notação (a): Analogamente ao capítulo IV (seção IV.3), representaremos por $P(k)$, o problema de se encontrar uma K-árvore mínima com depósito de grau k . •

Notação (b): Representaremos por $P(k, f)$, o problema de se encontrar uma K-árvore mínima \bar{T}_k com um depósito de grau k e f pertencente a \bar{T}_k . •

Notação (c): Representaremos por $Q(k, e)$, ao problema de se encontrar uma K-árvore mínima \bar{T}_k com depósito de grau k e e não pertencente a \bar{T}_k . •

Considere uma K-árvore T_k solução de $P(2K)$ e z_{UB} o valor da menor solução heurística gerada em uma iteração qualquer do subgradiente.

Uma variável (ou aresta) f não pertencente a T_k poderá ser fixada em *zero*, se o valor da solução associada a $P(2K, f)$ for superior a z_{UB} . Note que, se uma K-árvore T_k é solução do problema $P(2K)$ e f pertence a T_k , então $P(2K)$ e $P(2K, f)$ possuem a mesma solução. Estaremos interessados entretanto, nos casos onde f não pertence a T_k . Assim, para determinarmos uma solução de $P(2K, f)$ a partir de $P(2K)$, devemos pesquisar todas as arestas ainda não fixadas em *zero* e não pertencentes a T_k .

Analogamente, uma variável (ou aresta) e pertencente a T_k , poderá ser fixada em *um*, se o valor da solução associada a $Q(2K, e)$ for superior a z_{UB} . Assim, se uma K-árvore T_k é solução do problema $P(2K)$ e e não pertence a T_k então $P(2K)$ e $Q(2K, e)$ possuem mesma solução. Estaremos interessados entretanto, nos casos onde e pertence a T_k . Da mesma forma, para determinarmos uma solução de $Q(2K, e)$ a partir de $P(2K)$, devemos pesquisar todas as arestas ainda não fixadas em *um* e pertencentes a T_k .

Considere uma K-árvore T_K , uma aresta $e \in T_K$ e $e' \notin T_K$. Como já discutido na seção IV.3, o par de arestas (e, e') define uma *troca admissível* em T_K , se $T_K - e + e'$ for uma K-árvore. Esta troca será *admissível satisfatória* se $c(e) > c(e')$.

Rescrevemos a seguir 2 lemas de Fisher[94.b] (demonstrados no capítulo IV), que nos ajudarão como ferramentas na determinação de alguns dos critérios utilizados na fixação de variáveis.

Lema VII.1: Dados duas K-árvores distintas T_K e T_K' , existirá uma função biunívoca $h: T_K - T_K' \rightarrow T_K' - T_K$ gerando pares (p, q) de trocas admissíveis em T_K (onde $p \in T_K - T_K'$ e $q \in T_K' - T_K$).

•

Lema VII.2: Consideremos $e, f \in T_K$; $e', f' \notin T_K$ arestas adjacentes ou não ao depósito. Se pelo menos um dos pares (e, e') ou (f, f') não define uma troca admissível em T_K então (e, f') e (f, e') darão (cada um) uma troca admissível em T_K se e somente se $T_K' = T_K - e - f + e' + f'$ é uma K-árvore.

•

Vejamos primeiramente como fixar em *zero* uma variável (ou aresta) não pertencente a T_K :

VII.3 - Fixando variáveis em *zero*:

Nesta seção, faremos distinção entre as arestas não pertencentes a uma K-árvore T_K (solução de $P(2K)$). Se estas arestas forem não-incidentes ao depósito, elas serão representadas por \bar{f} , caso contrário, serão representadas por \bar{f}_0 . Assim, denotaremos por $P(k, \bar{f})$, ao problema de se encontrar uma K-árvore mínima \bar{T}_K com depósito de grau k e \bar{f} (não adjacente ao depósito) pertencente a \bar{T}_K . Da mesma forma, representaremos por $P(k, \bar{f}_0)$, ao problema de se encontrar uma K-árvore mínima \bar{T}_K com depósito de grau k e \bar{f}_0 (incidente ao depósito) pertencente a \bar{T}_K .

Apresentamos a seguir as condições de otimalidade que devem ser satisfeitas por uma solução de $P(k, \bar{f})$. Sem perda de generalidade, consideramos $k=2K$. Como veremos, estas condições são muito semelhantes às condições de otimalidade apresentadas para $P(2K)$ no teorema IV.4.

Teorema VII.1: (Condições de Otimalidade)

Uma K -árvore \bar{T}_K com grau $2K$ no depósito será ótima para o problema $P(2K, \bar{f})$ se e somente se satisfizer as seguintes condições de otimalidade:

- i) Sejam e_1 e f_1 duas arestas não incidentes ao depósito. Não existem trocas admissíveis satisfatórias (e_1, f_1) (onde $e_1 \in \bar{T}_K$, $e_1 \neq \bar{f}$ e $f_1 \notin \bar{T}_K$).
- ii) Não haverá trocas admissíveis satisfatórias (e_1^0, f_1^0) onde $e_1^0 \in \bar{T}_K$ e $f_1^0 \notin \bar{T}_K$ sendo e_1^0 e f_1^0 incidentes ao depósito.
- iii) Não haverá duas trocas admissíveis satisfatórias (e_1^0, f_1^0) e (e_2^0, f_2^0) com $e_1^0, e_2^0 \in \bar{T}_K$, $f_1^0, f_2^0 \notin \bar{T}_K$, sendo e_1^0, f_2^0 incidentes no depósito; f_1^0, e_2^0 não incidentes ao depósito e $e_2^0 \neq \bar{f}$.

Demonstração:

(\Rightarrow) Consideremos inicialmente \bar{T}_K , uma K -árvore ótima para o problema $P(2K, \bar{f})$. Assim $c(\bar{T}_K) < c(T_K')$, qualquer que seja a K -árvore T_K' com $2K$ arestas incidentes ao depósito e \bar{f} pertencente a T_K' . É fácil ver neste caso que, se (i), (ii) ou (iii) forem violadas, obtemos uma nova K -árvore T_K' com custo inferior a \bar{T}_K (K -árvore ótima). Logo (i), (ii) e (iii) se verificam.

(\Leftarrow) Suponha agora que \bar{T}_K , satisfazendo (i), (ii) e (iii) não seja ótima. Teremos neste caso, a existência de uma K -árvore \tilde{T}_K com custo $c(\tilde{T}_K)$ inferior a $c(\bar{T}_K)$. Do lema VII.1, temos uma função biunívoca $h: \bar{T}_K - \tilde{T}_K \rightarrow \tilde{T}_K - \bar{T}_K$, de maneira que cada um dos pares obtidos gerem trocas admissíveis em \bar{T}_K . Essa sequência de trocas pode ser dividida em 2 tipos distintos: (a) trocas que não atualizam o grau do depósito ou (b), trocas que atualizam o grau do depósito (no

0). É fácil ver que \tilde{T}_K não pode ser obtida apenas através de trocas do tipo (a), pois teríamos (i) ou (ii) violadas chegando portanto a um absurdo. Logo, devemos ter também trocas do tipo (b). Considere (sem perda de generalidade) um conjunto de p trocas que incrementam o grau do depósito gerando uma nova K-árvore T_K' com custo $c(T_K')$ superior a $c(\bar{T}_K)$. Suponha ainda que \tilde{T}_K seja gerada através de p trocas que decrementam o grau do nó 0 (a partir de T_K'), e de maneira que $c(\tilde{T}_K) < c(\bar{T}_K)$. Deveremos ter neste caso, pelo menos um par de trocas (entre as $2p$ trocas) que incrementa e decrementa respectivamente o grau do depósito em \bar{T}_K gerando uma nova K-árvore T_K'' e com custo $c(T_K'') < c(\bar{T}_K)$, contrariando portanto a condição (iii). •

Como discutido anteriormente, um “novo” limite inferior é calculado após forçarmos a presença da aresta \bar{f} (não pertencente a T_K), na solução do problema lagrangeano. Este limite inferior deverá ser comparado com o menor limite superior z_{UB} obtido até o momento. Caso esse limite inferior seja maior que a solução heurística corrente podemos eliminar \bar{f} definitivamente de nosso grafo. Isto significa que, se uma solução contendo \bar{f} está associada a um limite inferior maior que z_{UB} então \bar{f} não poderá estar presente na solução ótima do problema original.

O algoritmo seguinte calcula o valor do “novo” limite inferior $c(\bar{T}_K)$ obtido após a resolução do problema $P(2K, \bar{f})$ a partir de $P(2K)$. O valor C_{LB} abaixo, representa o termo constante presente na função lagrangeana (associado aos multiplicadores de Lagrange). Obviamente, no processo de redução de nosso grafo, este procedimento deverá ser executado para cada uma das arestas \bar{f} não pertencentes a T_K (solução de $P(2K)$) e não adjacentes ao depósito. Adiante, estudaremos um procedimento análogo para as arestas \bar{f}_0 adjacentes ao depósito (e não pertencentes a T_K).

PROCEDIMENTO VII.1 : (Fixa em zero aresta $\bar{f} \notin T_K$ e não adjacente ao depósito)

Início

- $c(\bar{T}_K) \leftarrow +\infty$;

{inicializa custo de \bar{T}_K }

- **Para** (cada $e \in T_K$) **faça** {pesquisa arestas não adjacentes ao depósito}

- **Se** (troca (e, \bar{f}) é admissível em T_K) **então**

- $T_K' = T_K - e \cup \{\bar{f}\};$

- calcula menor troca admissível (e_0, f_0) em T_K' ;

- **Se** ($c(f_0) - c(e_0) < 0$) **então**

- $T_K'' = T_K' - e_0 \cup \{f_0\};$

senão

- $T_K'' = T_K';$

fim;

- **Se** ($c(T_K'') < c(\bar{T}_K)$) **então**

- $c(\bar{T}_K) \leftarrow c(T_K'');$

fim se;

fim para;

- **Para** (cada aresta $e_0 \in T_K$) **faça** {pesquisa arestas adjacentes ao depósito}

- **Se** (troca (e_0, \bar{f}) é admissível em T_K) **então**

- $T_K' = T_K - e_0 \cup \{\bar{f}\};$ {decrementa grau }

- calcula menor troca admissível (e, f_0) em T_K' (sendo $e \neq \bar{f}$);

- $T_K'' = T_K' - e \cup \{f_0\};$ {incrementa grau }

- **Se** ($c(T_K'') < c(\bar{T}_K)$) **então**

- $c(\bar{T}_K) \leftarrow c(T_K'');$

fim;

fim;

- **Se** ($(c(\bar{T}_K) + C_{LB}) > z_{UB}$) **então**

- retiramos aresta \bar{f} de $G(N_0, E);$

fim. {procedimento}

Figura VII.1: Fixa em zero a variável \bar{f} não adj. ao depósito

O teorema seguinte garante a otimalidade da K-árvore \bar{T}_K gerada pelo procedimento VII.1:

Teorema VII.2: Seja $G(N_0, E)$ um grafo e $T_K \subset E$ uma K-árvore mínima (com grau $2K$ no depósito). Se \bar{f} é uma aresta de E não pertencente a T_K , o algoritmo VII.1 sempre determina uma K-árvore mínima \bar{T}_K com $2K$ arestas incidentes ao depósito e \bar{f} pertencente a \bar{T}_K .

Demonstração:

Nossa prova consiste em mostrar que a K-árvore mínima \bar{T}_K (gerada ao final do algoritmo VII.1) satisfaz as condições de otimalidade expressas no teorema VII.1.

As arestas representadas por e pertencem a T_K , e aquelas representadas por f não pertencem a T_K . Além disso, as arestas com índice 0 são adjacentes ao depósito. Ao final do procedimento VII.1, teremos apenas uma das 3 possibilidades abaixo:

- i) $\bar{T}_K = T_K' = T_K - e_r \cup \{\bar{f}\}$, para algum $e_r \in T_K$ tal que $c(\bar{f}) - c(e_r)$ seja mínimo e (e_r, \bar{f}) seja troca admissível em T_K . Além disso, $c(f_0) - c(e_0) \geq 0$, $\forall (e_0, f_0)$ admissível em T_K' .
- ii) $\bar{T}_K = T_K - e_s - e_s^0 \cup \{\bar{f}, f_s^0\}$ para alguma tripla e_s, e_s^0 e f_s^0 tais que (e_s, \bar{f}) e (e_s^0, f_s^0) sejam admissíveis em T_K e T_K' respectivamente. Além disso, $c(f_s^0) - c(e_s^0) < 0$ é mínimo entre todas as possíveis trocas admissíveis satisfatórias (e_0, f_0) em T_K' .
- iii) $\bar{T}_K = T_K - e_t - e_t^0 \cup \{\bar{f}, f_t^0\}$ para alguma tripla de arestas e_t, e_t^0 e f_t^0 tais que (e_t^0, \bar{f}) e (e_t, f_t^0) são admissíveis em T_K e T_K' respectivamente (sendo $e_t \neq \bar{f}$) e $c(\bar{f}) - c(e_t^0) + c(f_t^0) - c(e_t)$ mínimo entre todos os pares de trocas que atualizam o grau do depósito.

Sem perda de generalidade, consideremos a situação onde \bar{T}_K gerada pelo algoritmo é descrita conforme o item (II.) acima.

Suponha inicialmente que a 1ª condição de otimalidade seja violada (teorema VII.1). Neste caso, teremos a existência de uma troca admissível satisfatória (e_1, f_1) em \bar{T}_K onde $e_1 \in \bar{T}_K$ e $f_1 \notin \bar{T}_K$. Seja $\tilde{T}_K = \bar{T}_K - e_1 \cup \{f_1\}$ a nova K-árvore obtida (note que $c(\tilde{T}_K) < c(\bar{T}_K)$). Segue então que: $\tilde{T}_K = T_K - e_s - e_s^0 - e_1 \cup \{\bar{f}, f_s^0, f_1\}$ (sendo $e_1 \neq \bar{f}$).

Do lema VII.1 temos garantida a existência de uma função biunívoca $h: \{e_s, e_s^0, e_1\} \rightarrow \{\bar{f}, f_s^0, f_1\}$ gerando 6 possíveis emparelhamentos em T_K :

- | | |
|---|---|
| 1) $(e_s^0, \bar{f}); (e_s, f_s^0); \underline{(e_1, f_1)}$ | 4) $(e_s^0, \bar{f}); (e_s, f_1); \underline{(e_1, f_s^0)}$ |
| 2) $(e_s^0, f_s^0); (e_s, \bar{f}); \underline{(e_1, f_1)}$ | 5) $(e_s^0, f_s^0); (e_s, f_1); \underline{(e_1, \bar{f})}$ |
| 3) $\underline{(e_s^0, f_1)}; (e_s, \bar{f}); \underline{(e_1, f_s^0)}$ | 6) $\underline{(e_s^0, f_1)}; (e_1, \bar{f}); \underline{(e_s, f_s^0)}$ |

Note que pelo menos um dos itens acima determina uma seqüência de trocas admissíveis em T_K . Para ilustrar a demonstração dos 6 casos faremos apenas uma análise dos itens (1) e (3). As demais situações ocorrem de maneira análoga.

Vejamos inicialmente a situação expressa no item (1). Como T_K é solução ótima para p(2K) temos $c(f_1) - c(e_1) \geq 0$ (1ª condição de otimalidade do teorema IV.4). Note que (e_s, \bar{f}) e (e_s^0, f_s^0) são admissíveis em T_K e T_K' respectivamente (pois \bar{T}_K é gerada como no item (ii)). Assim, desprezando a troca (e_1, f_1) temos:

$$c(\tilde{T}_K) \geq c(T_K) - c(e_s^0) - c(e_s) + c(\bar{f}) + c(f_s^0) = c(\bar{T}_K).$$

Chegamos portanto a uma situação absurda já que tínhamos $c(\tilde{T}_K) < c(\bar{T}_K)$.

No item (3) temos (e_s^0, f_1) e (e_1, f_s^0) não resultam em uma troca admissível satisfatória para T_K (3ª condição de otimalidade/ teorema IV.4). Como \bar{T}_K , gerada pelo algoritmo VII.1 é expressa no item (ii), temos a existência de arestas f_s^0 e e_s^0 tais que $c(f_s^0) - c(e_s^0) < 0$. Segue então que:

$$c(\tilde{T}_K) \geq c(T_K) - c(e_s) + c(\bar{f}) \geq c(T_K) - c(e_s^0) - c(e_s) + c(\bar{f}) + c(f_s^0) = c(\bar{T}_K).$$

Chegamos novamente a uma situação absurda. Note que as trocas sublinhadas podem ser desprezadas por satisfazerem a 1ª ou 3ª condições de otimalidade.

Suponha agora que a 2ª condição de otimalidade (teorema VII.1) seja violada por um par de trocas admissíveis (e_1^0, f_1^0) (ambas adjacentes ao depósito). Do lema VII.1 temos garantida a existência de uma função biunívoca $h: \{e_s, e_s^0, e_1^0\} \rightarrow \{\bar{f}, f_s^0, f_1^0\}$ gerando 6 possíveis emparelhamentos em T_K :

- | | |
|---|---|
| 1) $(e_s^0, \bar{f}); (e_s, f_s^0); \underline{(e_1^0, f_1^0)}$ | 4) $(e_s^0, \bar{f}); (e_s, f_1^0); \underline{(e_1^0, f_s^0)}$ |
| 2) $(e_s^0, f_s^0); (e_s, \bar{f}); \underline{(e_1^0, f_1^0)}$ | 5) $\underline{(e_s^0, f_s^0)}; (e_s, f_1^0); (e_1^0, \bar{f})$ |
| 3) $(e_s^0, f_1^0); (e_s, \bar{f}); \underline{(e_1^0, f_s^0)}$ | 6) $\underline{(e_s^0, f_1^0)}; (e_1^0, \bar{f}); (e_s, f_s^0)$ |

No item (3) temos que (e_1^0, f_s^0) não resulta em uma troca admissível satisfatória para T_K (2ª condição de otimalidade / teorema VII.1). Assim, $c(f_s^0) - c(e_1^0) \geq 0$. Segue então que:

$$c(\tilde{T}_K) \geq c(T_K) - c(e_s^0) - c(e_s) + c(\bar{f}) + c(f_1^0) \geq c(T_K) - c(e_s^0) - c(e_s) + c(\bar{f}) + c(f_s^0) = c(\bar{T}_K)$$

Logo, $c(\tilde{T}_K) \geq c(\bar{T}_K)$ o que leva a um absurdo pois tínhamos $c(\tilde{T}_K) < c(\bar{T}_K)$. Nos demais itens procedemos de maneira análoga. As trocas sublinhadas podem ser desprezadas por satisfazerem a 2ª condição de otimalidade.

Suponha agora que a 3ª condição de otimalidade seja violada por um par de trocas admissíveis $(e_1, f_1^0); (e_2^0, f_2)$ em \bar{T}_K (sendo $e_1 \neq \bar{f}$). Do lema VII.2, temos a existência de uma nova K-árvore $\tilde{T}_K = \bar{T}_K - e_1 - e_2^0 \cup \{f_1^0, f_2\}$.

Segue então que $\tilde{T}_K = T_K - e_s - e_s^0 - e_1 - e_2^0 \cup \{\bar{f}, f_s^0, f_1^0, f_2\}$. Do lema VII.1, temos a existência de uma função biunívoca $h: \{e_s, e_s^0, e_1, e_2^0\} \rightarrow \{\bar{f}, f_s^0, f_1^0, f_2\}$ de maneira que cada um dos pares obtidos gerem trocas admissíveis em T_K . As 24 possibilidades de emparelhamento são listadas abaixo. Destacamos (trocas sublinhadas), os pares que podem ser desprezados por satisfazerem a 1^a, 2^a ou 3^a condição de otimalidade respectivamente. Isto sempre pode ser feito já que T_K é K-árvore ótima (teorema IV.4).

- | | |
|---|--|
| 1) $(e_s \bar{f}); (e_s^0, f_s^0); \underline{(e_1, f_1^0); (e_2^0, f_2)}$ | 12) $\underline{(e_s f_s^0); (e_s^0, f_2)}; (e_2^0, \bar{f}); (e_1, f_1^0)$ |
| 2) $(e_s \bar{f}); (e_s^0, f_s^0); \underline{(e_1, f_2); (e_2^0, f_1^0)}$ | 13) $(e_s f_1^0); (e_s^0, \bar{f}); \underline{(e_1, f_s^0); (e_2^0, f_2)}$ |
| 3) $(e_s \bar{f}); (e_s^0, f_1^0); \underline{(e_1, f_s^0); (e_2^0, f_2)}$ | 14) $(e_s f_1^0); (e_s^0, \bar{f}); \underline{(e_1, f_2); (e_2^0, f_s^0)}$ |
| 4) $(e_s \bar{f}); (e_s^0, f_1^0); \underline{(e_1, f_2); (e_2^0, f_s^0)}$ | 15) $\underline{(e_s f_1^0)}; (e_s^0, f_s^0); (e_1, \bar{f}); \underline{(e_2^0, f_2)}$ |
| 5) $(e_s \bar{f}); \underline{(e_s^0, f_2)}; \underline{(e_1, f_s^0)}; (e_2^0, f_1^0)$ | 16) $(e_s f_1^0); \underline{(e_s^0, f_s^0)}; \underline{(e_1, f_2)}; (e_2^0, \bar{f})$ |
| 6) $(e_s \bar{f}); \underline{(e_s^0, f_2)}; \underline{(e_1, f_1^0)}; (e_2^0, f_s^0)$ | 17) $\underline{(e_s f_1^0)}; \underline{(e_s^0, f_2)}; (e_1, \bar{f}); (e_2^0, f_s^0)$ |
| 7) $(e_s f_s^0); (e_s^0, \bar{f}); \underline{(e_1, f_1^0)}; (e_2^0, f_2)$ | 18) $\underline{(e_s f_1^0)}; \underline{(e_s^0, f_2)}; (e_1, f_s^0); (e_2^0, \bar{f})$ |
| 8) $(e_s f_s^0); (e_s^0, \bar{f}); \underline{(e_1, f_2)}; (e_2^0, f_1^0)$ | 19) $\underline{(e_s, f_2)}; (e_s^0, \bar{f}); (e_1, f_s^0); \underline{(e_2^0, f_1^0)}$ |
| 9) $\underline{(e_s f_s^0)}; (e_s^0, f_1^0); (e_1, \bar{f}); \underline{(e_2^0, f_2)}$ | 20) $\underline{(e_s, f_2)}; (e_s^0, \bar{f}); (e_1, f_1^0); \underline{(e_2^0, f_s^0)}$ |
| 10) $(e_s f_s^0); \underline{(e_s^0, f_1^0)}; \underline{(e_1, f_2)}; (e_2^0, \bar{f})$ | 22) $\underline{(e_s, f_2)}; \underline{(e_s^0, f_s^0)}; (e_1, f_1^0); (e_2^0, \bar{f})$ |
| 11) $\underline{(e_s f_s^0)}; \underline{(e_s^0, f_2)}; (e_1, \bar{f}); (e_2^0, f_1^0)$ | 23) $\underline{(e_s, f_2)}; \underline{(e_s^0, f_1^0)}; (e_1, \bar{f}); (e_2^0, f_s^0)$ |
| 12) $\underline{(e_s f_s^0)}; \underline{(e_s^0, f_2)}; (e_2^0, \bar{f}); (e_1, f_1^0)$ | 24) $\underline{(e_s, f_2)}; \underline{(e_s^0, f_1^0)}; (e_2^0, \bar{f}); (e_1, f_s^0)$ |

Para exemplificar as operações realizadas consideremos (por exemplo) a situação expressa na linha (16). As outras situações são análogas. Assim:

$$(e_s, f_1^0); (e_2^0, \bar{f}); (e_s^0, f_s^0); (e_1, f_2) \quad (16)$$

Note que:

$$c(\tilde{T}_K) = c(T_K) - c(e_s) - c(e_s^0) - c(e_1) - c(e_2^0) + c(\bar{f}) + c(f_s^0) + c(f_1^0) + c(f_2).$$

Temos que (e_s^0, f_s^0) e (e_1, f_2) são trocas admissíveis não satisfatórias em T_K (pois T_K é K-árvore ótima). Assim, $c(f_s^0) - c(e_s^0) \geq 0$ e $c(f_2) - c(e_1) \geq 0$ respectivamente. Segue então que:

$$c(\tilde{T}_K) \geq c(T_K) - c(e_s) - c(e_2^0) + c(\bar{f}) + c(f_1^0) \geq c(T_K) + c(\bar{f}) - c(e_s) + c(f_s^0) - c(e_s^0) = c(\bar{T}_K)$$

Chegamos portanto a um absurdo já que, ao violarmos a 3ª condição de otimalidade, obtemos uma nova K-árvore \tilde{T}_K com custo inferior a \bar{T}_K . Esta contradição ocorre de maneira análoga nas demais possibilidades expressas acima. •

No procedimento VII.1, determinamos um critério para fixar em *zero* as arestas (variáveis) não pertencentes a T_K e não adjacentes ao depósito. Vejamos agora como fixar em *zero* as variáveis não pertencentes a T_K e adjacentes ao depósito. Analogamente ao caso anterior, denotaremos por $P'(2K, \bar{f}_0)$, ao problema de se encontrar uma K-árvore mínima \bar{T}_K com depósito de grau 2K e tal que a aresta \bar{f}_0 (adjacente ao depósito) pertença a \bar{T}_K .

Apresentamos a seguir, as condições de otimalidade que devem ser satisfeitas por uma solução de $P'(2K, \bar{f}_0)$. A demonstração é análoga ao teorema VII.1.

Teorema VII.3: (Condições de Otimalidade)

Uma K-árvore \bar{T}_K com grau 2K no depósito será ótima para o problema $P'(2K, \bar{f}_0)$, se e somente se satisfazer as seguintes condições de otimalidade:

- i) Sejam e_1 e f_1 duas arestas não incidentes ao depósito. Não existem trocas admissíveis satisfatórias (e_1, f_1) (onde $e_1 \in \bar{T}_K$ e $f_1 \notin \bar{T}_K$).
- ii) Não haverá trocas admissíveis satisfatórias (e_1^0, f_1^0) onde $e_1^0 \in \bar{T}_K$ e $f_1^0 \notin \bar{T}_K$ sendo e_1^0 e f_1^0 incidentes ao depósito e $\bar{f}_0 \neq e_1^0$.

- iii) Não haverá duas trocas admissíveis satisfatórias (e_1^0, f_1) e (e_2, f_2^0) com $e_1^0, e_2 \in \bar{T}_K$, $f_1, f_2^0 \notin \bar{T}_K$, sendo e_1^0, f_2^0 incidentes no depósito e f_1, e_2 não incidentes ao depósito e $e_1^0 \neq \bar{f}_0$.

Prova: Demonstração análoga ao teorema VII.1. •

Apresentamos a seguir, um procedimento semelhante ao procedimento VII.1, para solução do problema $P'(2K, \bar{f}_0)$ a partir da solução de $P(2K)$. Este algoritmo é executado para cada uma das arestas \bar{f}_0 não pertencentes a T_K e adjacentes ao depósito. Analogamente ao caso anterior, C_{LB} representa o somatório das parcelas associadas aos multiplicadores da função lagrangeana.

PROCEDIMENTO VII.2 (Fixa em *zero* aresta $\bar{f}_0 \notin T_K$ adjacente ao depósito)

Início

- $c(\bar{T}_K) \leftarrow \infty$;
- **Para** (cada $e \in T_K$) **faça** {pesquisa arestas não adjacentes ao depósito}
 - **Se** (troca (e, \bar{f}_0) é admissível em T_K) **então**
 - $T_K' = T_K - e \cup \{\bar{f}_0\}$; {incrementa grau }
 - calcula menor troca admissível (e_0, f) em T_K' (sendo $e_0 \neq \bar{f}_0$);
 - $T_K'' = T_K' - e_0 \cup \{f\}$; {decrementa grau }
 - **Se** $(c(T_K'') < c(\bar{T}_K))$ **então**
 - $c(\bar{T}_K) \leftarrow c(T_K'')$;
- fim**;
- fim**;
- **Para** (cada $e_0 \in T_K$) **faça** {pesquisa arestas adjacentes ao depósito}
 - **Se** (troca (e_0, \bar{f}_0) é admissível em T_K) **então**
 - $T_K' = T_K - e_0 \cup \{\bar{f}_0\}$;

```

- calcula menor troca admissível  $(e, f)$  em  $T_K'$ ;
- Se  $(c(f) - c(e) < 0)$  então
    -  $T_K'' = T_K' - e \cup \{f\}$ ;
    então
    -  $T_K'' = T_K'$ ;
    fim;
- Se  $(c(T_K'') < c(\bar{T}_K))$  então
    -  $c(\bar{T}_K) \leftarrow c(T_K'')$ ;
    fim se;
fim para;
- Se  $(c(\bar{T}_K) + C_{LB} > z_{UB})$  então
    - retiramos aresta  $\bar{f}_0$  de  $G(N_0, E)$ ;
    fim;
fim.      {procedimento}

```

Figura VII.2: Fixa em zero a variável \bar{f}_0 adj. ao depósito

O teorema seguinte garante a otimalidade da K-árvore \bar{T}_K gerada pelo algoritmo VII.2. A demonstração é análoga ao teorema VII.2.

Teorema VII.4: Seja $G(N_0, E)$ um grafo e $T_K \subset E$ uma K-árvore mínima (com grau $2K$ no depósito). Se \bar{f}_0 é uma aresta de E adjacente ao depósito e não pertencente a T_K , o algoritmo VII.2 acima sempre determina uma K-árvore mínima \bar{T}_K com $2K$ arestas incidentes ao depósito e $\bar{f}_0 \in \bar{T}_K$.

Prova:

Demonstração análoga ao teorema VII.2.

•

Apesar de resolvermos $P(2K, \bar{f})$ e $P'(2K, \bar{f}_0)$ para cada uma das arestas \bar{f} e \bar{f}_0 não pertencentes a T_K (solução de $P(2K)$), necessitamos de um grande esforço computacional na resolução destes 2 problemas. Como temos $m = O(n^2)$ arestas em nosso grafo, podemos constatar nestes 2 procedimentos, que serão necessários pelos menos $O(n^2)$ passos, para determinação da menor troca admissível em T_K' . Note ainda que $n+K$ arestas de T_K devem ser pesquisadas para cada aresta \bar{f} (ou \bar{f}_0) $\notin T_K$. Necessitaremos portanto, de pelo menos $O(n^3)$ passos na solução de $P(2K, \bar{f})$ (ou $P(2K, \bar{f}_0)$) respectivamente. Assim, ao resolvermos $P(2K, \bar{f})$ (ou $P(2K, \bar{f}_0)$) para cada uma das arestas não pertencentes a T_K , teremos uma complexidade total de $O(n^5)$ iterações.

Esta complexidade é bastante elevada, já que, se utilizamos o procedimento que calcula a K -árvore mínima (de complexidade $O(n^3)$), para cada uma das arestas \bar{f} (ou \bar{f}_0) não pertencentes a T_K teremos também $O(n^5)$ iterações!

Uma alternativa interessante, embora não tão eficiente em termos da qualidade do resultado, é determinarmos limites inferiores para uma solução de $P(2K, \bar{f})$ ou $P'(2K, \bar{f}_0)$ respectivamente. Caso esses limites sejam superiores ao custo da solução heurística, eliminamos definitivamente \bar{f} ou \bar{f}_0 de nosso grafo.

VII.3.1 - Determinação de limites inferiores para $P(2K, \bar{f})$ e $P'(2K, \bar{f}_0)$:

Para pesquisarmos a determinação de limites inferiores para os problemas $P(2K, \bar{f})$ e $P'(2K, \bar{f}_0)$, faremos apenas a análise de $P(2K, \bar{f})$, no outro caso procedemos de maneira análoga.

Nos preocuparemos apenas em determinar (no procedimento VII.1), se uma dada troca, é ou não admissível em T_K . No grafo T_K' resultante, calculamos a menor troca possível, sendo ela admissível ou não. Isto irá permitir uma pequena redução no esforço computacional realizado.

Assim, no procedimento VII.1, devemos determinar se (e, \bar{f}) e (e_0, \bar{f}) são ou não admissíveis em T_K .

Para sabermos se cada uma das trocas (e, \bar{f}) são admissíveis em T_K , fazemos uma “contração” da nova K-árvore obtida após a inserção de \bar{f} (aresta pesquisada). Percorremos as arestas da nova K-árvore e “eliminamos” todas as arestas não adjacentes ao depósito com um extremo de grau um . O processo deverá ser repetido se existirem novas arestas com um extremo de grau um . É fácil ver que, todas aquelas arestas eliminadas não formam trocas admissíveis com \bar{f} . As arestas resultantes da “contração” determinam, em sua grande maioria, trocas admissíveis com \bar{f} . Para ilustrar essa situação, vejamos o seguinte exemplo:

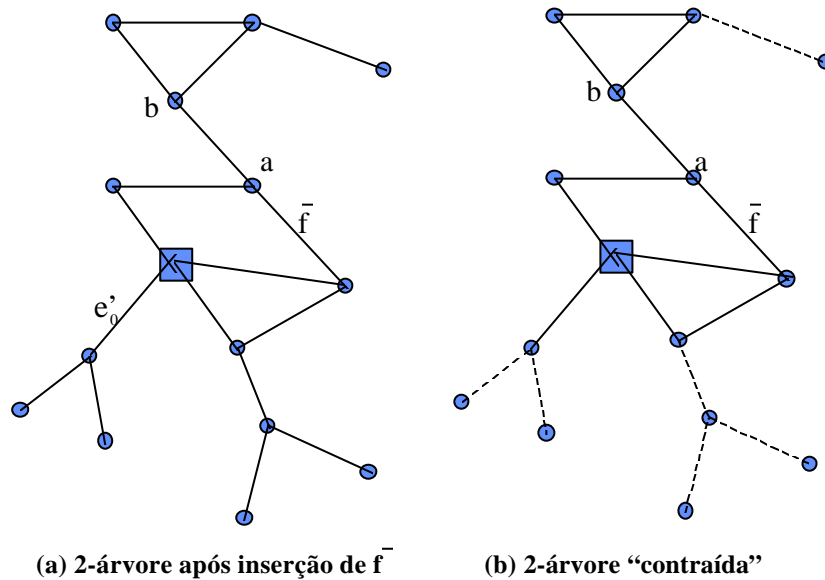


Figura VII.3: Determinação de trocas admissíveis

Cada uma das arestas representadas em linha pontilhada, não definem trocas admissíveis com \bar{f} . As demais arestas não adjacentes ao depósito, à exceção da aresta (a,b), definem trocas admissíveis com \bar{f} . Como buscamos um limite inferior $p/P(2K, \bar{f})$ a um baixo custo computacional não nos preocupamos com a determinação daquelas arestas que desconectam o grafo resultante após sua exclusão (p.ex., a aresta (a,b)).

Para sabermos se (e_0, \bar{f}) define uma troca admissível em T_K , bastará fazer uma atualização do número de arestas que ligam cada uma das componentes conexas obtidas após a inserção de \bar{f} . Dessa maneira, uma aresta e_0 não irá determinar uma troca (e_0, \bar{f}) admissível se e_0 for a única aresta que une a componente conexa correspondente ao depósito. Note, em nosso exemplo que \bar{f} e e_0 não definem uma troca admissível com \bar{f} . Ao contrário, as demais arestas adjacentes, definem, obviamente, trocas admissíveis com \bar{f} .

VII.4 - Fixando variáveis em *um*:

Como observado na seção VII.2, representamos por $Q(k, e)$ o problema de se encontrar uma K-árvore mínima \bar{T}_k com depósito de grau k de maneira que e , não pertença a \bar{T}_k . Em nosso caso, a solução de $Q(2K, e)$ deverá ser obtida a partir de T_K (solução de $P(2K)$). Ou seja, estaremos interessados na resolução de $Q(2K, e)$ tomando-se as arestas e pertencentes a T_K .

Nesta seção, faremos uma distinção entre as arestas de \bar{T}_K adjacentes e não adjacentes ao depósito. Assim, representaremos por $Q(2K, \bar{e})$, ao problema de se encontrar uma K-árvore mínima \bar{T}_K com depósito de grau 2K e \bar{e} (não adjacente ao depósito) não pertencente a \bar{T}_K .

Apresentamos a seguir as condições de otimalidade que devem ser satisfeitas por uma solução de $Q(2K, \bar{e})$. A demonstração é análoga ao teorema VII.1:

Teorema VII.5: (Condições de Otimalidade)

Uma K-árvore \bar{T}_K com grau 2K no depósito será ótima para o problema $Q(2K, \bar{e})$ se e somente se satisfizer as seguintes condições de otimalidade:

- i) Sejam e_1 e f_1 duas arestas não incidentes ao depósito. Não existem trocas admissíveis satisfatórias (e_1, f_1) (onde $e_1 \in \bar{T}_K$, $f_1 \notin \bar{T}_K$ e $f_1 \neq \bar{e}$).
- ii) Não haverá trocas admissíveis satisfatórias (e_1^0, f_1^0) onde $e_1^0 \in \bar{T}_K$ e $f_1^0 \notin \bar{T}_K$ sendo e_1^0 e f_1^0 incidentes ao depósito.

- iii) Não haverá duas trocas admissíveis satisfatórias (e_1^0, f_1) e (e_2, f_2^0) com $e_1^0, e_2 \in \bar{T}_K$, $f_1, f_2^0 \notin \bar{T}_K$, sendo e_1^0, f_2^0 incidentes no depósito; f_1, e_2 não incidentes ao depósito e $f_1 \neq \bar{e}$.

Prova: Demonstração análoga ao teorema VII.1. •

O algoritmo seguinte calcula o valor do “novo” limite inferior $c(\bar{T}_K)$, obtido após a resolução do problema $Q(2K, \bar{e})$ a partir de $P(2K)$. O valor C_{LB} abaixo, representa o termo constante presente na função lagrangeana (associado aos multiplicadores de Lagrange). Obviamente, no processo de redução de nosso grafo, este procedimento deverá ser executado para cada uma das arestas \bar{e} pertencentes a T_K (solução de $P(2K)$) não adjacentes ao depósito. Teremos um procedimento análogo para as arestas \bar{e}_0 adjacentes ao depósito e pertencentes a T_K .

PROCEDIMENTO VII.3 : (Fixa em *um* aresta $\bar{e} \in T_K$ não adjacente ao depósito)

Início

- $c(\bar{T}_K) \leftarrow +\infty$; {inicializa custo de \bar{T}_K }
- **Para** (cada $f \notin T_K$) **faça** {pesquisa arestas não adjacentes ao depósito}
 - **Se** (troca (\bar{e}, f) é admissível em T_K) **então**
 - $T_K' = T_K - \bar{e} \cup \{f\}$;
 - calcula menor troca admissível (e_0, f_0) em T_K' ;
 - **Se** ($c(f_0) - c(e_0) < 0$) **então**
 - $T_K'' = T_K' - e_0 \cup \{f_0\}$;
 - senão**
 - $T_K'' = T_K'$;
- fim**;
- **Se** ($c(T_K'') < c(\bar{T}_K)$) **então**
 - $c(\bar{T}_K) \leftarrow c(T_K'')$;

```

fim se;
fim para;
- Para (cada aresta  $f_0 \notin T_K$ ) faça      {pesquisa arestas adjacentes ao depósito}
    - Se (troca  $(\bar{e}, f_0)$  é admissível em  $T_K$ ) então
        -  $T_K' = T_K - \bar{e} \cup \{f_0\};$       {incrementa grau }
        - calcula menor troca admissível  $(e_0, f)$  em  $T_K'$  (sendo  $f \neq \bar{e}$ );
        -  $T_K'' = T_K' - e_0 \cup \{f\};$       {decrementa grau }
        - Se ( $c(T_K'') < c(\bar{T}_K)$ ) então
            -  $c(\bar{T}_K) \leftarrow c(T_K'');$ 
    fim;
fim;
- Se ( $(c(\bar{T}_K) + C_{LB}) > z_{UB}$ ) então
    - fixamos  $\bar{e}$  em  $G(N_0, E)$ ;
fim.      {procedimento}

```

Figura VII.4: Fixa em *um* a variável \bar{e} não adj. ao depósito

O teorema seguinte garante a otimalidade de \bar{T}_K (solução de $Q(2K, \bar{e})$) a partir de T_K (solução de $p(2K)$).

Teorema VII.6: Seja $G(N_0, E)$ um grafo e $T_K \subset E$ uma K -árvore mínima (com grau $2K$ no depósito). Se \bar{e} é uma aresta de E não adjacente ao depósito e pertencente a T_K , o algoritmo VII.3 sempre determina uma K -árvore mínima \bar{T}_K com $2K$ arestas incidentes ao depósito e \bar{e} não pertencente a \bar{T}_K .

Prova:

Demonstração análoga ao teorema VII.2.

•

No procedimento VII.3, determinamos um critério para fixar em um , as arestas (variáveis) pertencentes a T_K e não adjacentes ao depósito. Vejamos agora como fixar em um as variáveis pertencentes a T_K e adjacentes ao depósito. Analogamente ao caso anterior, denotaremos por $Q'(2K, \bar{e}_0)$, o problema de se encontrar uma K -árvore mínima \bar{T}_K com depósito de grau $2K$ e tal que, a aresta \bar{e}_0 (adjacente ao depósito) não pertença a \bar{T}_K .

Apresentamos a seguir, as condições de otimalidade que devem ser satisfeitas por uma solução de $Q'(2K, \bar{e}_0)$. Novamente, a demonstração é análoga ao teorema VII.1.

Teorema VII.7: (Condições de Otimalidade)

Uma K -árvore \bar{T}_K com grau $2K$ no depósito será ótima para o problema $Q'(2K, \bar{e}_0)$, se e somente se satisfazer as seguintes condições de otimalidade:

- i) Sejam e_1 e f_1 duas arestas não incidentes ao depósito. Não existem trocas admissíveis satisfatórias (e_1, f_1) (onde $e_1 \in \bar{T}_K$ e $f_1 \notin \bar{T}_K$).
- ii) Não haverá trocas admissíveis satisfatórias (e_1^0, f_1^0) onde $e_1^0 \in \bar{T}_K$ e $f_1^0 \notin \bar{T}_K$ sendo e_1^0 e f_1^0 incidentes ao depósito e $f_1^0 \neq \bar{e}_0$.
- iii) Não haverá duas trocas admissíveis satisfatórias (e_1^0, f_1) e (e_2, f_2^0) com $e_1^0, e_2 \in \bar{T}_K$, $f_1, f_2^0 \notin \bar{T}_K$, sendo e_1^0, f_2^0 incidentes no depósito e f_1, e_2 não incidentes ao depósito e $f_2^0 \neq \bar{e}_0$.

Prova: Demonstração análoga ao teorema VII.1. •

Apresentamos a seguir um procedimento, semelhante ao procedimento VII.3, para solução do problema $Q'(2K, \bar{e}_0)$, a partir da solução de $P(2K)$. Este algoritmo é executado para cada uma das arestas \bar{e}_0 pertencentes a T_K e adjacentes ao depósito. Analogamente ao caso anterior, C_{LB} representa o somatório das parcelas associadas aos multiplicadores da função lagrangeana.

PROCEDIMENTO VII.4 : (Fixa em um a aresta $\bar{e}_0 \in T_K$ adjacente ao depósito)

Início

- $c(\bar{T}_K) \leftarrow +\infty$; {inicializa custo de \bar{T}_K }
- **Para** (cada $f \notin T_K$) **faça** {pesquisa arestas não adjacentes ao depósito}
 - **Se** (troca (\bar{e}_0, f) é admissível em T_K) **então**
 - $T_K' = T_K - \bar{e}_0 \cup \{f\}$; {decrementa grau do depósito}
 - calcula menor troca admissível (e, f_0) em T_K' ; ($p/ f_0 \neq \bar{e}_0$)
 - $T_K'' = T_K' - e \cup \{f_0\}$; {incrementa grau do depósito}
 - **Se** ($c(T_K'') < c(\bar{T}_K)$) **então**
 - $c(\bar{T}_K) \leftarrow c(T_K'')$;
 - fim se**;
- fim para**;
- **Para** (cada aresta $f_0 \notin T_K$) **faça** {pesquisa arestas adjacentes ao depósito}
 - **Se** (troca (\bar{e}_0, f_0) é admissível em T_K) **então**
 - $T_K' = T_K - \bar{e}_0 \cup \{f_0\}$;
 - calcula menor troca admissível (e, f) em T_K' ;
 - **Se** ($c(f) - c(e) < 0$) **então**
 - $T_K'' = T_K' - e \cup \{f\}$;
 - senão**
 - $T_K'' = T_K'$;
 - fim**;
 - **Se** ($c(T_K'') < c(\bar{T}_K)$) **então**
 - $c(\bar{T}_K) \leftarrow c(T_K'')$;
 - fim**;
- fim**;
- **Se** ($(c(\bar{T}_K) + C_{LB}) > z_{UB}$) **então**

- fixamos aresta \bar{e}_0 em $G(N_0, E)$;

fim. { procedimento }

Figura VII.5: Fixa em *um* a variável \bar{e}_0 adj. ao depósito

O teorema seguinte garante a otimalidade de \bar{T}_K (solução de $Q'(2K, \bar{e}_0)$) a partir de T_K (solução de $p(2K)$).

Teorema VII.6: Seja $G(N_0, E)$ um grafo e $T_K \subset E$ uma K-árvore mínima (com grau $2K$ no depósito). Se \bar{e}_0 é uma aresta de E adjacente ao depósito e pertencente a T_K , o algoritmo VII.3 sempre determina uma K-árvore mínima \bar{T}_K com $2K$ arestas incidentes ao depósito e \bar{e}_0 não pertencente a \bar{T}_K .

Prova:

Demonstração análoga ao teorema VII.2.

Da mesma forma que nos procedimentos que fixavam variáveis em *zero*, teremos também, neste caso, um grande esforço computacional para gerarmos uma solução de $Q(2K, \bar{e})$ e $Q'(2K, \bar{e}_0)$ respectivamente. Para facilitar um pouco essa tarefa, calculamos limites inferiores para para a solução destes 2 problemas.

VII.4.1 - Determinação de limites inferiores para $Q(2K, \bar{e})$ e $Q'(2K, \bar{e}_0)$:

Para pesquisarmos a determinação de limites inferiores para os problemas $Q(2K, \bar{e})$ e $Q'(2K, \bar{e}_0)$, faremos apenas a análise de $Q(2K, \bar{e})$, no outro caso procedemos de maneira análoga.

De maneira análoga à seção VII.3.1, nos preocupamos apenas em determinar se uma dada troca, é ou não admissível em T_K . Assim, no novo grafo T_K' obtido, calculamos a menor troca possível, sendo ela admissível ou não. Isto irá permitir uma pequena redução no esforço computacional realizado.

Para determinarmos limites inferiores para uma solução de $Q(2K, \bar{e})$, verificamos apenas se as trocas (\bar{e}, f) e (\bar{e}, f_0) no procedimento VII.3 são ou não admissíveis em T_K (vide figura VII.6). Em seguida, analisando-se T_K' , calculamos as menores trocas (e_0, f_0) e (e_0, f) (para $f \neq \bar{e}$) admissíveis ou não em T_K' .

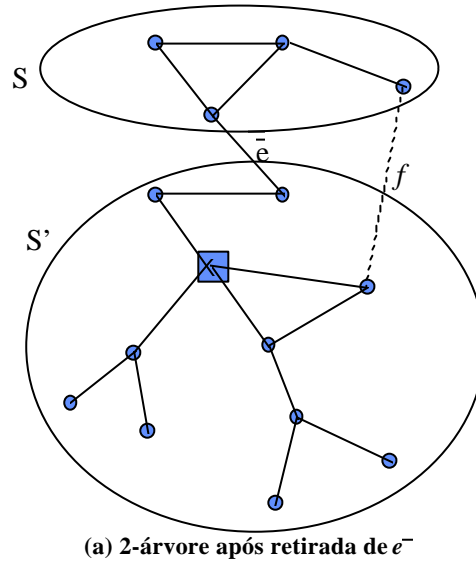


Figura VII.6: Determinação de trocas admissíveis

Para sabermos se as trocas (\bar{e}, f) e (\bar{e}, f_0) são ou não admissíveis em T_K , “eliminamos” \bar{e} e checamos se o grafo resultante é ou não conexo. Caso o novo grafo seja desconexo, teremos 2 componentes conexas com rótulos distintos (vide figura VII.6). Qualquer aresta $f \notin T_K$ (onde $f \neq \bar{e}$) ou $f_0 \notin T_K$ conectando estas duas componentes define uma troca admissível com \bar{e} .

VII.5 - Estrutura de dados utilizada na fixação de variáveis:

Para melhor usufruir das vantagens oferecidas pelos procedimentos que fixam variáveis, devemos nos preocupar com um armazenamento adequado das variáveis livres (ainda não fixadas) e as já fixadas em *um*.

Como discutido anteriormente, a idéia será mantermos as variáveis fixadas em *um* sempre presentes nas K-árvores mínimas e soluções heurísticas geradas posteriormente. Isto poderá contribuir para uma melhor qualidade na determinação dos limites inferiores e superiores respectivamente. Além disso, o tempo de processamento pode ser reduzido se desprezamos definitivamente as variáveis fixadas em *zero*.

A ilustração seguinte (figura VII.7) mostra como armazenamos as variáveis livres e as variáveis já fixadas em *zero* ou *um*. Como apresentado na capítulo IV (seção IV.3.3), uma lista L contendo 3 campos, armazena as extremidades e o custo de cada aresta. Chamaremos esta lista de CLAG, vetor de custos lagrangeanos.

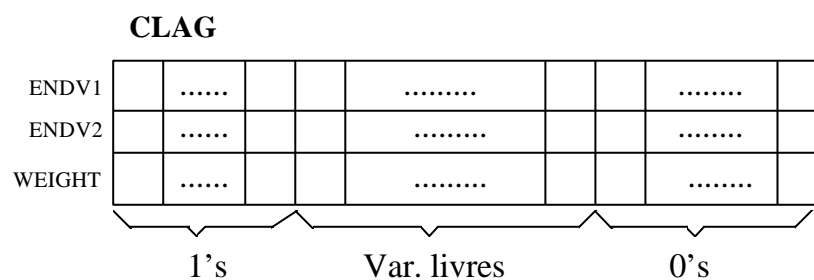


Figura VII.7: Representação das var. fixas e livres no vetor de custos lagrangeanos

Todas as variáveis fixadas em *zero* associadas às arestas não incidentes ao depósito são representadas no final do vetor de custos lagrangeanos. Para fixarmos em *zero* as arestas (variáveis) incidentes ao depósito fazemos o custo lagrangeano correspondente igual a *infinito*. Como veremos posteriormente (capítulo seguinte), isto irá facilitar a determinação das K-árvores mínimas e soluções heurísticas geradas nas demais iterações do subgradiente. Observe que, ao

percorreremos CLAG, somente as posições correspondentes às variáveis livres e iguais a *um* sejam pesquisadas. Teremos conseqüentemente, uma grande economia no tempo de processamento.

Esta representação permite ainda que identifiquemos facilmente as arestas presentes na solução ótima (iguais a *um*). Estas arestas deverão figurar constantemente nas soluções heurísticas e K-árvores mínimas geradas nas iterações futuras do subgradiente.

Note entretanto que, antes de iniciarmos a fixação de variáveis, utilizamos uma função POSIÇÃO que mapeia todas as arestas do grafo para uma lista de arestas. Ao fixarmos uma variável em *zero* ou *um* fazemos trocas entre as arestas de CLAG alterando a função POSIÇÃO preestabelecida. Para resolvermos este problema, criamos um vetor adicional que indica a nova posição de um par de arestas em CLAG sempre que alguma troca for efetuada.