

Capítulo III

Relaxação Lagrangeana com Geração de Restrições:

III.1 - Introdução:

Recentemente, um número considerável de problemas de otimização combinatória vem sendo resolvidos com a utilização de resultados provenientes da teoria poliédrica. Neste capítulo, descrevemos uma técnica que combina relaxação lagrangeana com a geração de desigualdades válidas (idealmente facetadas) na geração de limites inferiores para o problema original.

Fazemos inicialmente uma introdução sobre alguns dos conceitos e técnicas utilizadas no decorrer do trabalho e apresentamos em seguida (seções III.3 e III.4) a descrição da técnica que combina relaxação lagrangeana com geração de restrições. Exemplos de aplicações desta técnica podem ser encontrados em Escudero et al. [94], Fisher[94.b], Lucena[96], Miller[95] entre outros.

III.2 - Considerações Iniciais:

Representaremos por $\{0,1\}^n$, o conjunto de todos os vetores de \mathfrak{R}^n com coordenadas inteiras 0 e 1. O problema geral de programação linear inteira 0-1 pode então ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \min c^T x \\ & s. a \begin{cases} Ax \leq b \\ Bx \leq d \end{cases} \quad (P_0) \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

onde $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$; $B \in \mathfrak{R}^{m' \times n}$; $c, x \in \mathfrak{R}^n$; $b \in \mathfrak{R}^m$ e $d \in \mathfrak{R}^{m'}$.

A **região viável** (ou **conjunto viável**) associada a P_0 é definida por $M_0 = \{x \in \{0,1\}^n / Ax \leq b \text{ e } Bx \leq d\}$, enquanto $z = c^T x$ é a **função objetivo** a ser minimizada (ou maximizada) em M_0 .

Como ocorre freqüentemente com os problemas de programação linear inteira, ao invés de minimizarmos a função objetivo diretamente sobre o conjunto viável original, poderá ser mais interessante o particionamento desta região em um número finito de regiões menores. Trabalhamos então na minimização da função objetivo em cada uma destas regiões separadamente. Além disso, este processo deverá ser realizado de maneira que uma solução ótima do problema original pertença a pelo menos uma das regiões particionadas.

Caso os problemas de otimização associados a cada uma das regiões menores, não sejam ainda resolvidos “facilmente” (em tempo polinomial) através das ferramentas disponíveis, particionamos novamente estas regiões até que seja possível resolvê-las.

Na figura III.1, representamos o problema original P_0 e os diversos subproblemas P_k , obtidos após o particionamento sucessivo da região viável M_0 (associada a P_0).

Como o número de subproblemas obtidos pode ser extremamente grande, necessitamos de um esquema de enumeração que permita explicitá-los apenas parcialmente, não descartando obviamente, aqueles subproblemas cuja região viável correspondente contenha uma solução ótima do problema original. Assim, dado um subproblema P_k qualquer, deveremos ser capazes

de decidir por um novo particionamento de P_k , ou então excluí-lo definitivamente por não ter uma região viável associada M_k que contenha uma solução ótima do problema original.

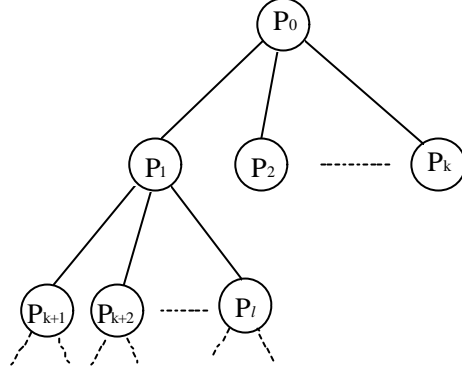


Figura III.1: Árvore de busca

Para que esse esquema de enumeração possa ser implementado na prática, utilizaremos **relaxações** P_k' de cada um dos subproblemas P_k . Mais formalmente:

$$\begin{array}{ll} \min & w(x) \\ \text{s.a} & x \in R_k \end{array} \quad (P_k')$$

onde $M_k \subseteq R_k$ e $w(x) \leq c^T x$, $\forall x \in R_k$. Claramente, uma solução ótima de P_k' nos dará um limite inferior para P_k . Como veremos posteriormente, para que um esquema eficiente de enumeração seja implementado, cada uma das relaxações P_k' deverá ser resolvida “facilmente” (em tempo polinomial).

Para ilustrar essa definição, consideremos novamente o problema original P_0 juntamente com M_0 (seu conjunto viável associado). Caso as restrições de integralidade $x \in \{0,1\}^n$ em M_0 sejam substituídas por $x \in [0,1]^n$ (conjunto de todos os vetores de \Re^n com coordenadas entre 0 e 1) diremos que a nova região $R_0 = \{x \in [0,1]^n / Ax \leq b \text{ e } Bx \leq d\}$ juntamente com a função objetivo $w(x) = c^T x$ define uma relaxação para P_0 . Mais particularmente, teremos uma **relaxação linear** para P_0 .

Outros tipos de relaxação podem obviamente ser utilizadas, como por exemplo, a **relaxação lagrangeana** (Geoffrion[74], Fisher[81]), discutida a seguir.

Considere z^* , o valor da solução ótima do problema original (P_0) . Dualizando-se as restrições $Bx \leq d$ e associando a elas um vetor de multiplicadores $\lambda \geq 0$, teremos o seguinte problema relaxado (ou lagrangeano):

$$\begin{aligned} w_0(x, I) = \min \quad & c^T x + I^T (Bx - d) \\ \text{s. a} \quad & Ax \leq b \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned} \quad (P_0')$$

onde as componentes de $I \in \mathbb{R}_+^r$ são denominadas multiplicadores de Lagrange. Note neste caso que $M_0 \subseteq R_0 = \{x \in \{0,1\}^n / Ax \leq b\}$ e $w_0(x, \lambda) \leq z^*$ qualquer que seja $\lambda \geq 0$ (Geoffrion [74]).

Dizemos que a relaxação lagrangeana (P_0') possui a **propriedade de integralidade**, se a solução de (P_0') (para todos os multiplicadores de Lagrange λ), permanece inalterada após a troca das restrições de integralidade $x \in \{0,1\}^n$ por $x \in [0,1]^n$. Isto significa que o maior limite inferior obtido após a solução de (P_0') é igual ao valor da relaxação linear associada ao problema original. Caso contrário, se a relaxação lagrangeana não tem a propriedade de integralidade, o maior limite inferior obtido para (P_0') é maior ou igual ao valor da relaxação linear associada ao problema original.

Idealmente, desejamos encontrar o melhor limite inferior possível. Para isto, resolvemos o seguinte problema *dual lagrangeano*:

$$L_0^* = \max_{I \geq 0} w_0(x, I) \quad (D_0)$$

É bem conhecido que w_0 é uma função côncava (afim por partes), mas não necessariamente diferenciável em todos os pontos do domínio. Além disso, $L_0^* \leq z^*$. O valor

ótimo em D_0 (obtido para $\mathbf{I} = \mathbf{I}^*$) nos dará o maior limite inferior possível. Esses multiplicadores podem ser gerados utilizando-se, por exemplo, o método subgradiente com convergência demonstrada por Held, Crowder e Wolfe[74]. Dados multiplicadores λ , devemos encontrar uma direção de “subida” buscando a maximização de $w(x, \mathbf{I})$ (Geoffrion[74], Fisher[81]).

Se \bar{x} é uma solução do problema relaxado, pode-se mostrar facilmente que cada uma das componentes $\mathbf{s}_i = b_i \bar{x} - d_i$ ($i=1, \dots, r$) são utilizadas na determinação do vetor subgradiente associado à relaxação lagrangeana corrente (Geoffrion[74]).

Os novos multiplicadores de Lagrange (associados às desigualdades dualizadas) são atualizados da seguinte forma:

$$\mathbf{I}_i := \max\{0, \mathbf{I}_i + q\mathbf{s}_i\}; \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

onde o tamanho do passo q é usualmente determinado através da expressão:

$$q = \frac{\mathbf{p}(z_{UB} - z_{LB})}{\sum_{i=1}^r \mathbf{s}_i^2}$$

sendo $z_{LB} = w(\bar{x}, \mathbf{I})$ e z_{UB} , limites inferior e superior respectivamente de z^* , e π um escalar que assume valores no intervalo (0,2]. Como discutido em Lucena[96], quanto maior for o número de subgradientes obtidos, menor será o tamanho do passo θ e maior o tempo de processamento exigido na solução do problema relaxado.

Assim, para implementarmos eficientemente o esquema de enumeração como descrito anteriormente, devemos trabalhar na solução das relaxações P_k' sempre que uma solução de P_k não puder ser obtida “facilmente” através das ferramentas disponíveis.

Esse esquema de enumeração pode ser ainda incrementado se conhecemos bons limites superiores v^* (associado às soluções viáveis) do problema original P_0 . Desta forma, se um subproblema P_k qualquer tiver um limite inferior maior que v^* , a região viável associada M_k

poderá ser descartada definitivamente de nosso processo de busca por não conter uma solução ótima de P_0 .

Esse processo de busca em árvore é mais usualmente conhecido na literatura como **branch-and-bound** (dividir e limitar), por se tratar de um processo de partições sucessivas do conjunto viável e pela geração de limites (inferiores e superiores) associados a cada um dos subproblemas gerados. Para maiores detalhes sobre este assunto vide Murty[76], Nemhauser & Wolsey[88].

Através da relaxação linear do modelo associado ao problema original (ou do modelo original acrescido de outras desigualdades válidas geradas previamente), podemos buscar a identificação e a inserção de restrições que são violadas pela solução do problema relaxado corrente. Procedendo desta forma, obtemos uma melhor aproximação da envoltória convexa do conjunto viável original. Caso a solução da relaxação corrente não nos dê uma solução viável para o problema original e a identificação de novas restrições violadas não seja mais “possível”, fazemos uma partição (ou *branching*) do conjunto viável original e repetimos o processo para cada um dos subconjuntos gerados. Denominamos **branch-and-cut**, ao processo que combina geração de restrições válidas, a partir de relaxações lineares, com os métodos de busca em árvore (*branch-and-bound*). Alguns exemplos de aplicação desta técnica podem ser encontrados em Padberg e Rinaldi[91] para o problema do caixeiro viajante e Augerat[95] para o problema de roteamento de veículos.

Como discutido no capítulo anterior, a determinação de desigualdades violadas é conhecida como o problema da separação e nem sempre pode ser realizada em tempo polinomial (a menos que $P=NP$). Neste caso, soluções heurísticas podem ser utilizadas. Como demonstrado em Schrijver[86], sempre que o problema de separação for NP-Completo o problema de otimização associado será NP-Árduo.

Uma das dificuldades presentes nos métodos que utilizam relaxação linear é que a estrutura (ou conjunto de restrições) inerente ao modelo original é destruída sempre que uma nova desigualdade válida é adicionada ao problema. Uma alternativa interessante seria resolvermos uma sequência de problemas combinatórios mais simples de mesma estrutura ou

conjunto de restrições para obtenção de limites inferiores. Isto pode ocorrer se utilizamos técnicas baseadas em relaxação lagrangeana ao invés de relaxação linear.

Apresentamos neste trabalho uma técnica que combina geração de desigualdades válidas (idealmente facetadas) e relaxação lagrangeana. Exemplos de aplicações desta técnica podem ser encontradas em Fischer[94.b], Kohl e Madsen[97], Escudero et al.[94], Miller[95], Lucena[96], entre outros.

Neste método, adicionamos e dualizamos restrições válidas que são violadas por uma solução do problema relaxado (problema lagrangeano). Como veremos, esta técnica permite um maior incremento do limite inferior nos problemas de otimização combinatória que utilizam apenas relaxação lagrangeana.

III.3 - Descrição da Técnica:

Consideremos novamente o seguinte problema geral de programação linear inteira 0-1:

$$\begin{aligned} & \min c^T x \\ & s. a \quad \begin{cases} Ax \leq b \\ Bx \leq d \end{cases} \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned} \quad (P_0)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m' \times n}$; $c, x \in \mathbb{R}^n$; $b \in \mathbb{R}^m$ e $d \in \mathbb{R}^{m'}$.

Seja $\Psi = \{x \in \{0,1\}^n / Ax \leq b \text{ e } Bx \leq d\}$ o domínio de nosso problema original (P_0) e $\text{conv}(\Psi)$ sua envoltória convexa.

Como discutido anteriormente o problema dual lagrangeano associado será:

$$L_0^* = \max_{I \geq 0} w_0(x, I) \quad (D_0)$$

Se gerarmos um conjunto de desigualdades válidas $Hx \leq f$ para $\text{conv}(\Psi)$ (diferentes das já utilizadas), teremos o seguinte problema (P_1) equivalente ao problema original (P_0):

$$\begin{aligned}
& \min c^T x \\
& s.a \begin{cases} Ax \leq b \\ Bx \leq d \\ Hx \leq f \end{cases} \quad (P_1) \\
& x \in \{0,1\}^n
\end{aligned}$$

onde A, B, b, c, d são como definidos anteriormente e $H \in \Re^{k \times n}$ e $f \in \Re^k$.

Dualizando também o novo conjunto de restrições teremos o seguinte problema dual lagrangeano associado a (P_1) :

$$L_k^* = \max_{\substack{I \geq 0 \\ m \geq 0}} w_k(x, I, m) \quad (D_1)$$

onde:

$$\begin{aligned}
w_k(x, I, m) &= \min c^T x + I^T (Bx - d) + m^T (Hx - f) \\
& s.a \ Ax \leq b \\
& x \in \{0,1\}^n
\end{aligned} \quad (P_1')$$

A seguinte proposição, apresentada em Aboudi et al.[91], garante que o novo limite inferior obtido é maior ou igual ao anterior:

Teorema III.1 - Sejam L_0^* e L_k^* o valor da solução ótima dos problema duais (D_0) e (D_1) respectivamente. Então $L_0^* \leq L_k^*$.

Demonstração:

Considere λ^* a solução ótima para o problema dual (D_0) e o par \bar{I}, \bar{m} os multiplicadores ótimos para o problema dual (D_1) . É fácil ver que:

$$w_0(x, I) = w_k(x, I, 0) \quad \forall I \geq 0.$$

Segue então que:

$$L_0^* = w_0(x^*, I^*) = w_k(x^*, I^*, 0) \leq w_k(\bar{x}, \bar{I}, \bar{m}) = L_k^*$$

onde x^* é uma solução ótima de w_0 associada a λ^* e \bar{x} é uma solução ótima de w_k associada a \bar{l} e \bar{m} •

Note que a introdução de desigualdades válidas para o problema original na função lagrangeana pode melhorar o limite inferior para o valor da solução ótima z^* . Caso o número de restrições em $Hx \leq f$ seja pequeno, dualizá-los de forma lagrangeana não representa uma dificuldade. No entanto, quando este número é grande (possivelmente uma função exponencial de n) a utilização de todas as restrições se torna difícil. Quando isto ocorre, pode-se utilizar um número pequeno daquele conjunto de restrições ou permitir que todas as restrições do conjunto possam ser candidatas à dualização, utilizando, no entanto, apenas um número pequeno destas. Caso a segunda opção seja escolhida surge a questão de como implementá-la. Uma sugestão natural, seria tentar adaptar o procedimento utilizado em relaxação linear, ou seja, à cada problema lagrangeano resolvido, procura-se identificar desigualdades de $Hx \leq f$ que sejam violadas. Tais desigualdades seriam então dualizadas. Caso este procedimento seja seguido, algumas questões se colocam:

- i) Dada uma solução do problema lagrangeano, como obter desigualdades válidas (idealmente facetas) violadas por esta solução?
- ii) Que valor deve ser associado aos novos multiplicadores?
- iii) Se uma desigualdade válida é obtida, que condições devem ser obedecidas para se garantir um crescimento estrito do limite inferior?

Na primeira questão, a identificação de desigualdades violadas depende fundamentalmente das características presentes em cada problema. No caso de uma relaxação linear por exemplo, a solução obtida satisfaz todas as restrições do problema original, à exceção das restrições de integralidade (ou seja, as coordenadas associadas à relaxação linear assumem valores fracionários). Assim, um problema não-trivial de separação deve ser “resolvido” buscando a determinação de desigualdades violadas. O mesmo ocorre no problema lagrangeano. A única diferença é que a solução obtida é inteira e satisfaz apenas as restrições do tipo $Ax \leq b$.

Como veremos, poderá ser mais “fácil” resolver a identificação de restrições violadas tomando-se uma solução do problema lagrangeano do que o problema de separação quando tomamos uma solução obtida através de relaxação linear. Isto ocorre basicamente por preservamos a estrutura (ou conjunto de restrições) do problema relaxado além de se tratar de soluções com coordenadas inteiras.

Para a segunda pergunta assumimos um valor zero para os multiplicadores de Lagrange e os atualizamos utilizando alguma das fórmulas para atualização de multiplicadores (p. ex. Geoffrion[74]). Nada indica entretanto, ser esta a maneira ideal de proceder, embora, como veremos mais tarde, tem funcionado muito bem para os problemas pesquisados.

Na terceira questão, não são conhecidas ainda condições suficientes que garantam um incremento estrito do limite inferior. O trabalho desenvolvido por Aboudi et al. [91], foi provavelmente o primeiro artigo a tratar esse assunto. Obviamente, nem todas as desigualdades válidas que são violadas pela solução do problema lagrangeano permitem um incremento estrito do limite inferior.

Em Aboudi et al. [91] são apresentadas duas condições necessárias para esse crescimento estrito.

Suponha inicialmente que k restrições já tenham sido dualizadas e que $X = \{x \in \{0,1\}^n / Ax \leq b\}$ seja o conjunto de restrições associadas ao problema lagrangeano. Suponha ainda que $h_{k+1}x \leq f_{k+1}$ seja a próxima restrição a ser dualizada.

Temos então a seguinte proposição (Aboudi et al.[91]):

Teorema III.2: Se $h_{k+1}x \leq f_{k+1}$, $\forall x \in X$ então $L_k^* = L_{k+1}^*$.

Demonstração:

Da proposição anterior temos que $L_k^* \leq L_{k+1}^*$ (demonstração análoga).

Considere agora dois vetores λ e μ tais que $\lambda \in \mathbb{R}^r$ e $\mu \in \mathbb{R}^k$. Como $h_{k+1}x \leq f_{k+1}$, $\forall x \in X$ e $\mu_{k+1} \geq 0$ temos que $\mu_{k+1}(h_{k+1}x - f_{k+1}) \leq 0$.

Assim:

$$w_{k+1}(x, \lambda, \mu_{k+1}) \leq w_{k+1}(x, \lambda, \mu) \quad \forall x \in X, \lambda \geq 0; \mu \geq 0 \text{ e } \mu_{k+1} \geq 0.$$

Logo existirão valores \bar{I} e \bar{m} tais que: $L_{k+1}^* = w_{k+1}(\bar{x}, \bar{I}, \bar{m}, 0)$ sendo \bar{x} a solução associada a \bar{I} , \bar{m} e $m_{k+1} = 0$.

Portanto:

$$L_{k+1}^* = w_{k+1}(\bar{x}, \bar{I}, \bar{m}, 0) = w_k(\bar{x}, \bar{I}, \bar{m}) \leq L_k^*$$

Assim: $L_k^* \geq L_{k+1}^*$. Como $L_k^* \leq L_{k+1}^*$, segue então que $L_k^* = L_{k+1}^*$. •

Note portanto, que uma condição necessária para o incremento estrito do limite inferior é que exista pelo menos um $x \in X$ que viole a restrição $h_{k+1}x \leq f_{k+1}$!

Uma outra condição necessária pode ser apresentada: Considere inicialmente que os sistemas de desigualdades $Bx \leq d$ e $Hx \leq f$ sejam representados respectivamente por $\{b_i x \leq d_i \mid i=1, \dots, r\}$ e $\{h_j x \leq f_j \mid j=1, \dots, k\}$. Assim:

Teorema III.3: Se $h_{k+1}x \leq f_{k+1}$ for obtida através de uma combinação linear com coeficientes não-negativos das desigualdades $b_i x - d_i \leq 0$ para $i=1, 2, \dots, m$ e $h_j x - f_j \leq 0$ para $j=1, \dots, k$ então $L_k^* = L_{k+1}^*$.

Demonstração:

Se $h_{k+1}x - f_{k+1} \leq 0$ puder ser obtida como uma combinação linear de coeficientes não-negativos teremos:

$$h_{k+1}x - f_{k+1} = \sum_{i=1}^r \mathbf{l}_i (b_i x - d_i) + \sum_{j=1}^k \mathbf{m}_j (h_j x - f_j); \quad \forall x \in X$$

Segue diretamente que $h_{k+1}x - f_{k+1} \leq 0 \quad \forall x \in X$. Logo, da proposição anterior teremos

$$L_k^* = L_{k+1}^*. \quad \bullet$$

Assim, se a restrição $h_{k+1}x \leq f_{k+1}$ não for obtida através de uma combinação linear de coeficientes não-negativos das desigualdades $b_i x - d_i \leq 0$ para $i=1,2,\dots,m$ e $h_j x - d_j \leq 0$ para $j=1,\dots,k$; teremos uma condição necessária para o incremento estrito do limite inferior.

Note entretanto que, mesmo que a desigualdade introduzida $h_{k+1}x \leq f_{k+1}$, satisfaça as duas condições necessárias acima (consequência dos teoremas III.2 e III.3 respectivamente) não teremos uma garantia do crescimento estrito do limite inferior!

Sempre que uma desigualdade violada pela solução do problema lagrangeano não puder ser obtida pela rotina de identificação devemos retornar ao *branch-and-bound*.

Vejamos inicialmente um procedimento (apresentado em Aboudi et al.[91]) que combina geração de restrições com relaxação lagrangeana. Como discutido anteriormente, um limite inferior para uma solução ótima z^* é obtido após a resolução do seguinte problema dual lagrangeano:

$$w_k(x, \mathbf{l}, \mathbf{m}) = \min c^T x + \sum_{i=1}^r \mathbf{l}_i (b_i x - d_i) + \sum_{j=1}^k \mathbf{m}_j (h_j x - f_j)$$

$$s. a \quad x \in X$$

onde $X = \{x \in \{0,1\}^n / a_l x \leq b_l, \quad l = 1, \dots, m\}$.

A idéia é adicionarmos restrições $h_j x \leq f_j$, ($j = 1, \dots, k$) à medida que forem sendo violadas pela solução do problema lagrangeano, solução esta obtida pelo método subgradiente (Geoffrion[74]). Temos então o seguinte procedimento:

PROCEDIMENTO III.1: Relax. Lagrang. c/ Geração de Restrições (1ª versão)

Início

$k := 0$;

$\mathbf{l}_i := 0$; (*para* $i = 1, \dots, r$); {inicializa multip. associados a $b_i x - d_i$ }

$\mathbf{m}_0 = 0$;

Repita

- Calcula: $L_k^* = \max_{\substack{I \geq 0 \\ \bar{m} \geq 0}} w_k(x, I, \bar{m})$ {método subgradiente}

- Se ($L_k^* < z^*$) então

- Sejam \bar{I}, \bar{m} variáveis duais ótimas associadas ao prob. dual lagrangeano e \bar{x} a solução do problema relaxado correspondente;

- Obter restrição violada $h_{k+1}x \leq f_{k+1}$; {caso exista, deveremos ter $h_{k+1}\bar{x} > f_{k+1}$ }

- Se (existir restrição violada) então

$\bar{m}_{k+1} := 0$;

$k := k+1$;

senão

- retornar ao *branch-and-bound*;

fim;

Até que (“não existam” restrições violadas) ou ($k > \text{máximo de rest. dualizadas}$);

fim.

Figura III.2: Relaxação Lagrangeana c/ Geração de Restrições

Note que deverão ser definidas 3 condições de parada para o algoritmo acima. Na primeira situação, o procedimento termina quando a solução ótima do problema dual lagrangeano (obtida pelo método subgradiente) for superior ou igual a uma solução ótima do problema original. Neste caso, devemos retornar ao *branch-and-bound*. Como não conhecemos z^* , podemos utilizar um limite superior z_{UB} para o valor da solução ótima do problema original.

Na segunda situação, finalizamos a geração de restrições caso “não existam” restrições violadas pela solução do problema lagrangeano. Observe que em muitos casos, o problema de identificação de restrições pode ser NP-completo. Logo, a utilização de uma heurística particular poderá não responder satisfatoriamente ao problema da existência de restrições violadas.

Finalmente, na terceira situação, como o número de restrições geradas pode ser extremamente grande (exponencial), estipulamos um número máximo de restrições a serem dualizadas.

Observe que, sempre que uma restrição $h_{k+1}x \leq f_{k+1}$ for violada por uma solução do problema dual lagrangeano, adicionamos esta desigualdade ao nosso conjunto de restrições violadas atendendo uma condição necessária para o crescimento estrito do limite inferior (teorema III.2).

Se a relaxação lagrangeana possui a propriedade de integralidade, o valor da solução do problema dual lagrangeano será igual à relaxação linear do problema original (Reeves[95]).

Assim, o algoritmo da figura III.2 gera, a cada iteração, uma solução com mesmo valor que a relaxação linear do problema original. A partir desta solução, geramos uma nova desigualdade violada e repetimos o processo.

Embora o procedimento apresentado por Aboudi et al.[91] permita a geração de novas restrições violadas a cada solução do problema lagrangeano, as condições necessárias para o crescimento estrito do limite inferior não são implementadas de forma satisfatória. Note que algumas das restrições violadas em passos anteriores poderão ser verificadas por todos os pontos de X a medida que inserimos novas restrições!

Devemos portanto, desenvolver mecanismos que permitam uma atualização do conjunto de restrições dualizadas, identificando e eliminando as restrições que não contribuem mais para o incremento estrito do limite inferior.

Na seção seguinte apresentamos outra alternativa que combina, de maneira mais eficiente, o método subgradiente com a geração de restrições.

III.4 - Procedimento Alternativo:

Vamos agora considerar um procedimento alternativo que tem funcionado extremamente bem na prática, embora não exista ainda uma prova de convergência associada. Este procedimento procura adaptar os ingredientes básicos de um algoritmo de planos de cortes faciais para o contexto lagrangeano, aplicando o método subgradiente diretamente ao problema de programação linear inteira considerado. Isto é feito no entanto, considerando-se explicitamente, apenas um número “pequeno” das restrições candidatas à dualização. Para facilitar a notação, representamos por $P = \{ x \in \{0,1\}^n / Bx \leq d \text{ e } Hx \leq f \}$ o conjunto das restrições

candidatas à dualização, e por Q , o conjunto das restrições já dualizadas. Observe inicialmente que temos $Q = \emptyset$.

O procedimento é iniciado, como feito usualmente, associando-se multiplicadores de valor 0 a cada restrição de P . Após a obtenção da solução do problema lagrangeano, identificamos um subconjunto de restrições pertencentes a P , violadas pela solução do problema relaxado corrente. Estas restrições são dualizadas e adicionadas ao conjunto Q . É evidente, ao final desta primeira iteração, que todos os multiplicadores de Lagrange associados às desigualdades não-dualizadas permaneçam nulos, à exceção daqueles associados às restrições dualizadas (conjunto Q), que se tornarão positivos após a atualização dos multiplicadores.

Na atualização dos multiplicadores, utilizamos uma alternativa onde unicamente as componentes do vetor subgradiente associadas às desigualdades de Q são consideradas. Evita-se assim, a tarefa impraticável de se calcular as componentes do subgradiente para cada uma das restrições candidatas à dualização. Vale aqui ressaltar que as demais componentes do subgradiente (não consideradas) afetariam unicamente o tamanho do passo e desta forma o valor dos novos multiplicadores associados às componentes de Q .

Como atualizar entretanto, o conjunto Q das restrições dualizadas? Observe que este conjunto pode se tornar bastante grande se não nos preocuparmos em “eliminar” de Q , aquelas desigualdades que não contribuem mais para o incremento estrito do limite inferior. Para responder a essa pergunta introduz-se o conceito de **desigualdades ativas** como sendo aquelas com multiplicadores não nulos ou que sejam violadas pela solução do problema lagrangeano. Desta forma, o conjunto Q das restrições dualizadas será composto unicamente por aquelas desigualdades que são ativas.

Nas fórmulas de atualização dos multiplicadores, considera-se apenas as restrições ativas. Vale aqui ressaltar mais uma vez que os multiplicadores associados às restrições não-ativas devem permanecer, de qualquer forma, iguais a zero, ao final de cada iteração. Observe ainda que um multiplicador associado a uma restrição ativa pode tornar-se igual a *zero*. Neste caso, tal desigualdade seria “eliminada” e se tornaria novamente ativa caso viesse a ser violada pela solução de um problema lagrangeano futuro. Como pode ser verificado por resultados computacionais (vide Fisher[94], Miller[95], Lucena[96] entre outros), o número de

desigualdades ativas tende a ser pequeno, tornando computacionalmente tratável a atualização de multiplicadores no método subgradiente.

Analogamente ao procedimento III.1, busca-se a inserção no conjunto ativo daquelas restrições que violam a solução \bar{x} do problema relaxado. Neste caso, teremos $\mathbf{s}_i = b_i \bar{x} - d_i > 0$ ou $\mathbf{j}_j = h_j \bar{x} - f_j > 0$ para um subconjunto de índices $i \in \{1, \dots, r\}$ e $j \in \{1, \dots, k\}$ respectivamente. Obviamente se $\mathbf{s}_i \leq 0$ ou $\mathbf{j}_j \leq 0$, as restrições correspondentes não serão violadas por \bar{x} . Retiramos uma restrição \mathbf{s}_i (ou \mathbf{j}_j) do conjunto ativo, caso o respectivo multiplicador \mathbf{l}_i (ou \mathbf{m}_j) seja nulo.

Resumindo todos os passos descritos acima, vejamos outra versão, computacionalmente mais interessante, combinando geração de restrições com relaxação lagrangena. Seja z^* o valor da solução ótima associado ao problema original:

PROCEDIMENTO III.2: Relax. Lagrang. c/ Geração de Restrições (2^a versão);

Início

$k:=0$;

$\mathbf{l} = 0$; {inicializa multip. associados a $Bx \leq d$ }

$\mathbf{m} = 0$; {inicializa multip. associados a $Hx \leq f$ }

Repita

- Calcula: $z_{LB} = w_k(x, \mathbf{l}, \mathbf{m})$; {retorna \bar{x} - sol. do prob. lagrangeano}

- Se ($z_{LB} < z^*$) então

- Adiciona restrições violadas por \bar{x} ao conjunto Q;

- Calcula θ ; {tamanho do passo}

- Atualiza multiplicadores λ, μ associados às desig. de Q;

- Elimina todas as restrições de Q c/ multiplicadores nulos;

- Atualiza custos lagrangeanos;

senão

- retornar ao *branch-and-bound*;

fim; {fim do se-senão}

Até que (condição de parada);

fim.

Figura III.3: Relaxação Lagrangeana c/ Geração de Restrições

Para evitar que o número de restrições presentes no conjunto de ativo Q seja muito grande, podemos estipular um limite para o número máximo de restrições a serem dualizadas.

Em relação à condição de parada utilizada, poderíamos repetir o algoritmo acima até que o tamanho do passo $\pi \in (0,2]$, seja menor ou igual a ϵ (suficientemente pequeno). Este critério entretanto pode resultar em um elevado número de iterações. Outra possibilidade mais plausível, é determinarmos de antemão, o número máximo de iterações presentes no subgradiente.

Obviamente, algumas variações do procedimento III.2 podem ser apresentadas. Miller[95] propõe ainda alterações no tamanho do passo θ , em função da variação e da frequência de atualizações dos limites inferiores. Volgenant e Jonker[82], apresentam uma direção de busca gerada através de uma combinação linear dos subgradientes atuais e os subgradientes obtidos em iterações anteriores. Atribuindo pesos distintos a cada um dos subgradientes gerados nas últimas iterações do subgradiente busca-se uma nova direção de maximização da função dual lagrangeana.