Uma introdução à complexidade parametrizada

Vinicius Fernandes dos Santos - CEFET-MG

Uéverton dos Santos Souza - UFF/CEFET-RJ

34º JAI - Jornadas de Atualização em Informática

XXXV Congresso da Sociedade Brasileira de Computação

Recife, Julho 20–23, 2015

Sempre é possível obter um algoritmo FPT?

Sempre é possível obter um algoritmo FPT?

- Além da classe *FPT*, Downey e Fellows definiram classes apropriadas de problemas parametrizados, de acordo com seu nível de intratabilidade parametrizada.

Sempre é possível obter um algoritmo FPT?

- Além da classe FPT, Downey e Fellows definiram classes apropriadas de problemas parametrizados, de acordo com seu nível de intratabilidade parametrizada.
- Essas classes são organizadas em uma *W-hierarquia* ($FPT \subseteq W[1] \subseteq W[2] \subseteq \ldots \subseteq W[P] \subseteq XP$),

  e baseadas intuitivamente na complexidade dos circuitos necessários para se verificar a validade de uma solução, ou, alternativamente, na profundidade lógica natural do problema.

Sempre é possível obter um algoritmo FPT?

- Além da classe FPT, Downey e Fellows definiram classes apropriadas de problemas parametrizados, de acordo com seu nível de intratabilidade parametrizada.

- Essas classes são organizadas em uma *W-hierarquia*
  ($FPT \subseteq W[1] \subseteq W[2] \subseteq \ldots \subseteq W[P] \subseteq XP$),

  e baseadas intuitivamente na complexidade dos circuitos necessários para se verificar a validade de uma solução, ou, alternativamente, na profundidade lógica natural do problema.

- É conjecturado que cada uma dessas classes são próprias. E se $P = NP$ então $FPT = W[P]$.

Sempre é possível obter um algoritmo FPT?

Para estabelecer que um problema parametrizado é *intratável por parâmetro fixo*, necessitamos das seguintes definições adicionais:

FPT-redução

FPT-redução

Seja $\Pi(k)$ e $\Pi'(k')$ dois problemas parametrizados, onde $k' \leq g(k)$.

Uma FPT-redução (ou transformação paramétrica) de $\Pi(k)$ para $\Pi(k')$ é uma transformação R tal que:

1. Para todo x, temos que $x \in \Pi(k)$ se e somente se $R(x) \in \Pi'(k')$;
2. R é computável por um *FPT*-algoritmo (com relação a k);

Se uma *FPT*-redução existe entre Π e Π' então Π é transformado (ou se reduz) parametricamente a Π'.

FPT-redução

Lema

(transitividade) *Dado dois problemas parametrizados Π, Π' and Π'', se Π se reduz parametricamente a Π' e Π' se reduz parametricamente a Π'' então Π se reduz parametricamente a Π''.*

FPT-redução

Lema

(preservação da tratabilidade por parâmetro fixo) *Dado dois problemas Π e Π', se Π se reduz parametricamente a Π' e Π' é tratável por parâmetro fixo então Π é tratável por parâmetro fixo.*

Intratabilidade

As seguintes definições fornecem o análogo parametrizado da classe NP na teoria de NP-completude.

Estas classes são, na maior parte, baseadas numa série de circuitos sucessivamente mais poderosos para verificação de uma solução, onde soluções são codificadas como vetores de entrada para estes circuitos e os parâmetros são codificados em pesos destes vetores de entrada.

Circuitos de decisão

Um circuito booleano de decisão consiste de variáveis booleanas de entrada, portas lógicas de negação, portas lógica E, portas lógicas Ou, e uma única porta lógica de saída.

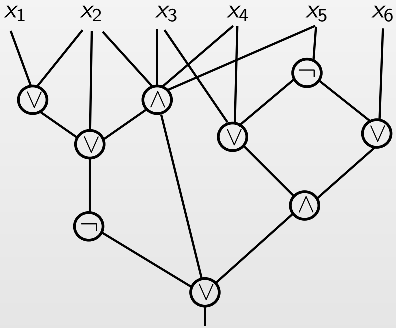


Figure: Exemplo de circuito booleano de decisão, onde ($\wedge$), ($\vee$) e ($\neg$) denotam portas lógicas E, Ou e de negação, respectivamente.

Satisfabilidade de Circuito

O problema *Satisfabilidade de Circuito* consiste em dado um circuito booleano de decisão C, decidir se existe uma atribuição de valores às variáveis de entrada de C de tal forma que sua saída seja “verdadeiro”.

Satisfabilidade de Circuito

Definição

Seja C um circuito booleano de decisão com variáveis de entrada $x_1, \ldots, x_n$.

- *O **entrelaçamento** de C é definido como o número máximo de portas lógicas largas em qualquer caminho da variável de entrada até a linha de saída (Uma porta é denominada **larga** se suas entradas excedem algum limite constante, em geral dois).*
- *A **profundidade** de C é definida como o comprimento do maior caminho de uma variável de entrada até a linha de saída em C.*
- *O **peso** de uma atribuição às variáveis de um circuito booleano C (uma atribuição para C) é o número de $1's$ nesta atribuição.*

Satisfabilidade de Circuito

Satisfabilidade Ponderada em Circuitos de Entrelaçamento t e Profundidade h WCS(t,h)

Instância: Um circuito de decisão C com entrelaçamento t e profundidade h.
Parâmetro: Um inteiro positivo k.
Questão: C possui uma atribuição satisfatível com peso k?

Satisfabilidade de Circuito

Satisfabilidade Ponderada em Circuitos de Entrelaçamento t e Profundidade h WCS(t,h)

Instância: Um circuito de decisão C com entrelaçamento t e profundidade h.
Parâmetro: Um inteiro positivo k.
Questão: C possui uma atribuição satisfatível com peso k?

Definição

Um problema parametrizado Π pertence à classe W[t] se e somente se Π se reduz parametricamente a WCS(t,h), para alguma constante h.

W-hierarquia

Definição

(A W-hierarquia) A união destas classes $W[t]$ juntamente com as classes $W[P]$ e XP, denota-se W-hierarquia. $W[P]$ denota a classe obtida por considerar nenhuma restrição sobre profundidade. Portanto, a W-hierarquia é:

$$FPT \subseteq W[1] \subseteq W[2] \subseteq \ldots \subseteq W[P] \subseteq XP.$$

W-hierarquia

Definição

(A W-hierarquia) A união destas classes $W[t]$ juntamente com as classes $W[P]$ e XP, denota-se W-hierarquia. $W[P]$ denota a classe obtida por considerar nenhuma restrição sobre profundidade. Portanto, a W-hierarquia é:

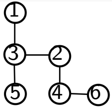
$$FPT \subseteq W[1] \subseteq W[2] \subseteq \ldots \subseteq W[P] \subseteq XP.$$

Downey e Fellows conjecturaram que cada uma dessas relações de inclusão na W-hierarquia é própria.

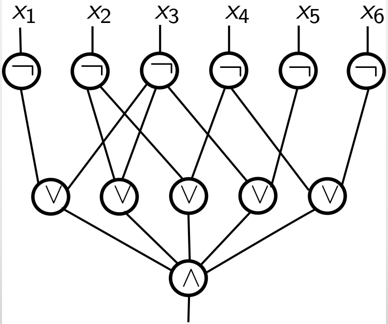
Exemplos

Conjunto Independente(c)
Instância: Um grafo $G = (V, E)$.
Parâmetro: Um inteiro positivo c.
Questão: G possui um conjunto de vértices I, tal que $|I| \geq c$ e I não contém nenhum par de vértices adjacentes?

Exemplos



(a)

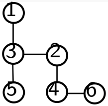


(b)

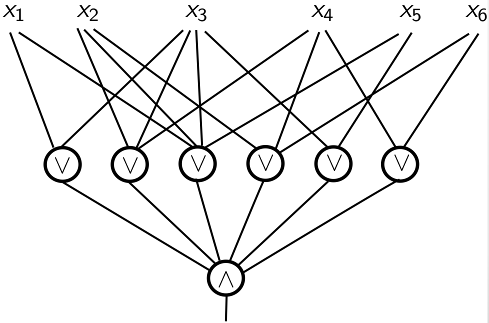
Exemplos

Conjunto Dominante(k)
Instância: Um grafo $G = (V, E)$.
Parâmetro: Um inteiro positivo k.
Questão: G possui um conjunto de vértices D, tal que $|D| \leq k$ e todo vértice $v \in V \setminus D$ é adjacente a pelo menos um vértice em D?

Exemplos



(a)



(b)

W-hierarquia

Observação

Uma alternativa para mostrar que um problema parametrizado Π *pertence à classe* $W[t]$, $t \geq 1$, *é apresentar uma FPT-redução para algum problema parametrizado pertencente a* $W[t]$.

W-hierarquia

Observação

Na complexidade parametrizada, definimos ***$W[t]$-dificuldade*** *e* ***$W[t]$-completude*** *de um problema parametrizado $\Pi(k)$ com relação à classe de complexidade $W[t]$ ($t \geq 1$), como na teoria da complexidade clássica:*

$\Pi(k)$ é $W[t]$-difícil sob FPT-reduções se todo problema em $W[t]$ se reduz parametricamente a $\Pi(k)$;

$\Pi(k)$ é $W[t]$-completo sob FTP-reduções se $\Pi(k) \in W[t]$ e $\Pi(k)$ é $W[t]$-difícil.

O análogo ao teorema de Cook

O análogo ao teorema de Cook

Aceitação da Máquina de Turing(k)
Instância: Uma máquina de Turing não determinística $\mathbb{M}$ e uma string x.
Parâmetro: Um inteiro positivo k.
Questão: $\mathbb{M}$ aceita x com no máximo k passos?

O análogo ao teorema de Cook

Aceitação da Máquina de Turing(k) pode ser trivialmente resolvido em tempo $O(n^{k+1})$, onde n denota o tamanho total da entrada.

Isso é feito explorando-se exaustivamente todos os caminhos computacionais de k passos. Acredita-se que este resultado não possa ser significativamente melhorado.

O análogo ao teorema de Cook

q-CNF Satisfabilidade Ponderada(k)
Instância: Uma expressão booleana F na forma normal conjuntiva (CNF) tal que cada cláusula possui no máximo q literais ($q \geq 2$).
Parâmetro: Um inteiro positivo k.
Questão: F possui um atribuição satisfatível de peso k?

O análogo ao teorema de Cook

Teorema

(Análogo ao Teorema de Cook) Os seguintes problemas são completos para a classe W[1]:

1. Aceitação da Máquina de Turing(k).
2. q-CNF Satisfabilidade Ponderada(k).

FPT-reduções $\times$ Reduções de Tempo Polinomial

Nesta seção, consideraremos os seguintes problemas:

1. Cobertura por Vértices
2. Conjunto Independente
3. Clique
4. Conjunto Dominante

FPT-reduções $\times$ Reduções de Tempo Polinomial

Nesta seção, consideraremos os seguintes problemas:

1. Cobertura por Vértices
2. Conjunto Independente
3. Clique
4. Conjunto Dominante

FPT-reduções $\times$ Reduções de Tempo Polinomial

Nesta seção, consideraremos os seguintes problemas:

- Cobertura por Vértices $\in$ FPT
- Conjunto Independente é W[1]-completo
- Clique é W[1]-completo
- Conjunto Dominante é W[2]-completo

FPT-reduções × Reduções de Tempo Polinomial

Como é uma FPT-redução de Conjunto Independente para Conjunto Dominante?

Inviabilidade de Núcleos Polinomiais

Ou-composição

Definição

Seja $\Pi \subseteq \Sigma^* \times N$ *um problema parametrizado. Uma Ou-composição de* Π *é um algoritmo de tempo polinomial* D *que recebe como entrada uma sequencia* $((x_1, k), (x_2, k), \ldots (x_m, k))$*, com cada* $(x_i, k) \in \Sigma^* \times N$*, e retorna um par* (x', k')*, tal que*

- *o algoritmo utiliza tempo polinomial em* $\sum_{1 \leq i \leq m} |x_i| + k$*;*
- k' *é delimitado por um polinômio em* k*;*
- $(x', k') \in \Pi$ *se e somente se* $\exists_{1 \leq i \leq m} (x_i, k) \in \Pi$.